PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 02-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - M. Klapp
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Examen

Duración: 3 horas.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada lugar que se indique de cada cuadernillo, debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.****. La interrogación cuenta con 68 puntos, el 7 se logra sacando 60 o más puntos en la interrogación.*

Pregunta 1 (20 puntos)

Para cada una de las siguientes preguntas, indique si la afirmación es verdadera o falsa. Justifique adecuadamente su respuesta.

(a) (2 puntos) La función $f(x, y) = x^2/y$ es convexa para el dominio definido por $y > 0$.

Solución: Verdadero. Basta con analizar la matriz Hessiana de la función dada por

$$H_f = \begin{pmatrix} 2/y & -2x/y^2 \\ -2x/y^2 & 2x^2/y^3 \end{pmatrix}.$$

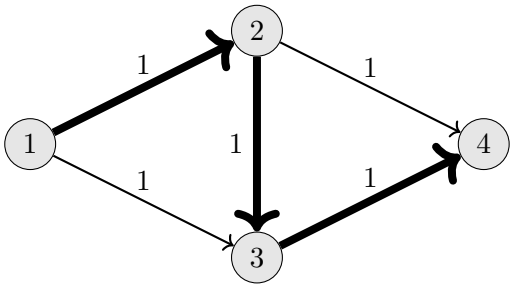
Los determinantes de sus menores principales son: $\Delta_1 = 2/y > 0$ y $\Delta_2 = 4x^2/y^4 - 4x^2/y^4 = 0$. f es convexa, pues H_f es semidefinida positiva.

(b) (2 puntos) Todo problema de optimización lineal con variables continuas tiene al menos una solución óptima en un vértice.

Solución: Falso. El problema mín$\{x_1 + x_2$ s.a. $x_1 + x_2 \geq 0\}$ tiene infinitas soluciones óptimas y ninguna es un vértice.

(c) (2 puntos) Considere una red $G = (N, A)$ con origen $s \in N$ y destino $t \in N$. Suponga que usted conoce un flujo factible distribuido a través de rutas dirigidas desde s hacia t y representado por $x_a \geq 0 \, \forall a \in A$, tal que existe flujo positivo en al menos una de las rutas que van desde s a t. Considerando lo anterior, se puede asegurar que si se inicia el algoritmo de ruta aumentable (Ford & Fulkerson) en $\hat{x}$, entonces en cada arco $a \in A$ nunca disminuirá el valor de $\hat{x}_a$.

Solución: Falso. Es posible que en la red residual exista una ruta aumentable que represente retroceder flujo por un arco. Así, el algoritmo no solo se encarga de aumentar el flujo en cada arco, si no que de redistribuir flujo si es necesario. (Nota: Hasta acá es suficiente para tenerla correcta, el ejemplo a continuación es solo ilustrativo). Considere el siguiente ejemplo de flujo máximo desde 1 hacia 4 con flujo factible 1 por la ruta 1-2-3-4. La única forma de aumentar el valor de flujo a 2 es retrocediendo el flujo por $(2, 3)$.



(d) (2 puntos) Un punto interior del dominio, es decir, un punto factible sin restricciones activas, no puede ser solución óptima de un problema de programación lineal continua si el vector de costo en la función objetivo es no nulo.

Solución: Verdadero. Dado que $\nabla f = c \neq 0$, existe una dirección de descenso $d = -c$. Esto hace que nunca sea óptimo estar en un punto interior.

(e) (2 puntos) Considere los siguientes dos criterios de término para el algoritmo de Dijkstra sobre una red $G = (N, A)$ con costos no negativos, origen $s \in N$ y destino $t \in N$: (1) el que termina cuando todos los nodos se cierran, y (2) el que termina cuando el nodo destino t está cerrado. La cantidad de iteraciones a realizar para determinar la ruta dirigida a mínimo costo desde s hacia t no depende del criterio de término.

Solución: Falso. Sí depende y basta con cerrar t para terminar el algoritmo y garantizar que se tiene la ruta mínima de s a t. Las iteraciones posterior no alterarán la ruta mínima de s a t.

Solución: Verdadero. El criterio de término sólo indica cuándo termina de iterar el algoritmo en sí. Por su parte, su funcionamiento no se ve alterado. Por lo tanto, la cantidad de iteraciones para cerrar t será la misma, independiente del criterio de término.

Cualquiera de estos dos argumentos está ok. Lo importante es que se justifique bien.

(f) (2 puntos) En un problema de optimización continua el precio sombra de un recurso productivo es 5. Entonces, el valor óptimo del problema aumentará siempre en 20 unidades si se dispone de 4 unidades adicionales de este recurso.

Solución: Falso. En general, este procedimiento es una aproximación y es sólo válido cuando se mantiene el conjunto de restricciones activas en el cambio.

(g) (2 puntos) Sean x_1 y x_2 dos soluciones básicas óptimas en vértices adyacentes de un problema lineal continuo. Entonces, se puede garantizar que cualquier combinación convexa de estas soluciones también es solución óptima del problema.

Solución: Verdadero. Si $v^* = c^T x_1 = c^T x_2$, entonces la combinación convexa $x_3 = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ cumple que $c^T x_3 = \alpha c^T x_1 + (1 - \alpha)c^T x_2 = v^*$.

(h) (2 puntos) En general, en el algoritmo de Branch & Bound, a medida que se va avanzando en profundidad en el árbol que se va construyendo, no existe diferencia alguna en el esfuerzo de cómputo entre la opción de resolver las relajaciones lineales de cada nodo en el problema primal o resolverlas en el problema dual.

Solución: Falso. Simplex sobre el problema dual es normalmente menos costoso que sobre el primal en B&B, ya que en nodos hijos se puede iniciar el algoritmo desde las soluciones óptimas de nodos padres que siguen siendo duales factibles al agregar restricciones primales de ramificación (agrega nuevas variables en el dual).

(i) (2 puntos) Considere dos funciones $g(x), f(x)$ continuas con $x \in \mathbb{R}^n$. Optimizar la función $\text{mín}_x\{\text{máx}(f(x), g(x))\}$ equivale a optimizar $\text{máx}_x\{\text{mín}(f(x), g(x))\}$.

Solución: Falso. Ver contraejemplo en Figura 1. la solución óptima de $\text{mín}_x\{\text{máx}(f(x), g(x))\}$ ocurre en el punto A, pero $\text{máx}_x\{\text{mín}(f(x), g(x))\}$ tiene solución óptima en B. Los valores óptimos de ambos problemas también son diferentes.

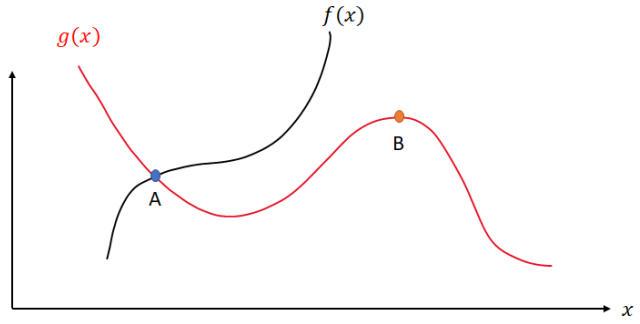


Figura 1: Contraejemplo

(j) (2 puntos) El mínimo de la función $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$ se da en un punto que cumple $\nabla f(x_1, x_2) = 0$, es decir, en $x^* = (0, 0)$.

Solución: Falso. La función no está acotada inferiormente. Por ejemplo, si $x = (t, t)$ se tiene que $f(t, t) = -t^2 \to -\infty$ cuando $t \to \infty$

Pregunta 2 (18 puntos)

(a) (9 puntos) En esta pregunta usted derivará un resultado fundamental de microeconomía. El modelo de teoría del consumidor busca maximizar la utilidad $f(x_1, x_2)$ de un individuo como función del consumo de bienes. Suponga dos bienes representados por sus consumos $x_1, x_2 \geq 0$ y una función de utilidad $f(x_1, x_2) := x_1^\alpha x_2^\beta$, con $\alpha, \beta > 0$ (función Cobb-Douglas).

Además, considere que el individuo tiene una restricción de presupuesto. Específicamente, consumir una unidad del producto $i \in \{1, 2\}$ cuesta $\$p_i > 0$, y su presupuesto es $\$m > 0$ pesos.

El siguiente problema de optimización modela el comportamiento de un consumidor racional:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x_1^\alpha x_2^\beta \\ \text{s.a} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) **(3 puntos)** Considerando que en el óptimo ambos consumos son positivos, derive el consumo óptimo de cada producto en función del presupuesto y de los precios. Verifique que el punto cumpla las condiciones KKT. **Nota:** Este valor se conoce como función de demanda Marshalliana.

Solución: Definiendo el Lagrangeano (para el problema escrito como uno de minimización) como

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = -x_1^\alpha x_2^\beta + \mu(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

Las condiciones, entonces, de KKT son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta + \mu p_1 \leq 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} + \mu p_2 \leq 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - m \leq 0 \tag{3}$$

$$x_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -x_1(\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta + \mu p_1) = 0 \tag{4}$$

$$x_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -x_2(\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} + \mu p_2) = 0 \tag{5}$$

$$\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = \mu(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) = 0 \tag{6}$$

$$x_1, x_2, \mu \geq 0 \tag{7}$$

Dado que ambos consumos son positivos (por enunciado), se da de (4) y (5), que (1) y (2) se cumplen en igualdad.

$$\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta = \mu p_1 \tag{8}$$

$$\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1} = \mu p_2 \tag{9}$$

Dividiendo (8) por (9),

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta}{\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{\alpha x_2 p_2}{\beta p_1} \tag{10}$$

Ahora, también de (8), podemos obtener que $\mu = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{p_1} > 0$, por lo que, (6) dirá que la restricción del problema se encuentra activa. Así, de (3) en igualdad, se puede despejar x_1, dando que $x_1 = \frac{m - p_2 x_2}{p_1}$ (11). Igualando (10) con (11), y despejando x_2 se llega a que

$$x_2^* = \frac{\beta m}{p_2(\alpha+\beta)} \qquad \overset{(10)}{\Longrightarrow} \qquad x_1^* = \frac{\alpha m}{p_1(\alpha+\beta)}$$

(ii) **(3 puntos)** Indique aproximadamente cuánto aumentaría la utilidad del individuo al aumentar el presupuesto en $\$v$ pesos ($v << m$).

Solución: La utilidad del individuo aumentará aproximadamente en

$$-v \cdot \mu = -v \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{p_1} = \frac{\alpha \left(\frac{\alpha m}{p_1(\alpha+\beta)}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\beta m}{p_2(\alpha+\beta)}\right)^{\beta}}{p_1} = \frac{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta} m^{\alpha+\beta-1}}{p_1^{\alpha} p_2^{\beta} (\alpha+\beta)^{\alpha+\beta-1}}$$

No es necesario simplificar para el puntaje completo, pero sí que no dependa de x_1^* ni x_2^*.

(iii) **(3 puntos)** Considere $m = 10, p_1 = 2, p_2 = 1, \alpha = \beta = 1$. Resuelva el problema gráficamente. Muestre claramente el punto óptimo de consumo, y verifique de forma gráfica el cumplimiento de las condiciones de KKT.

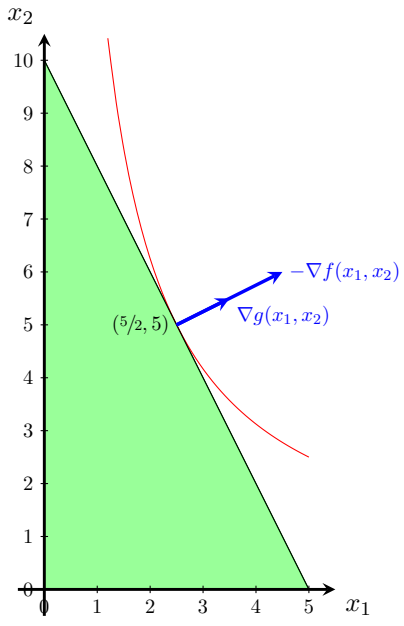
Solución: Las condiciones de KKT buscan que $-\nabla f(x_1, x_2)$ (en forma de minimización) se pueda construir como una combinación lineal del gradiente de la restricción activa en el óptimo.

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \qquad \nabla g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1^* = \frac{5}{2} \qquad x_2^* = 5$$

$$-\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5/2 \end{pmatrix} \qquad \nabla g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gráficamente:



(b) (9 puntos) Considere un grafo dirigido $G = (N, A)$, donde $N = \{1, \ldots, n\}$ es su conjunto de n nodos y A es su conjunto de arcos. Le han solicitado estudiar el problema de definir las rutas a mínimo costo entre el nodo $1 \in N$ y el resto de los nodos de la red $i \in \{2, \ldots, n\}$. El costo por atravesar un arco $a \in A$ está dado por $c_a \in \mathbb{Z}_+$.

Considere tres casos que redefinen el costo de cada arco $a \in A$ a un nuevo valor k_a:

(1) $k_a \equiv 2c_a$

(2) $k_a \equiv c_a + 1$

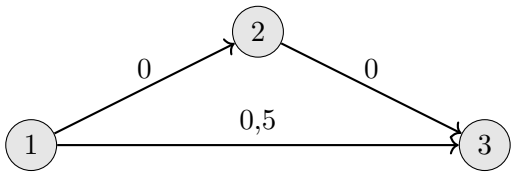
(3) $k_a \equiv c_a + i - j$, donde el arco a va del nodo i al nodo j

Comparando el problema de rutas mínimas desde 1 al resto de la red con costos k_a con respecto al de costos c_a, ¿en cuáles de los casos entregados se mantendrá inalterado el conjunto de rutas a mínimo costo entre 1 e $i \in \{2, \ldots, n\}$? Justifique cada caso.

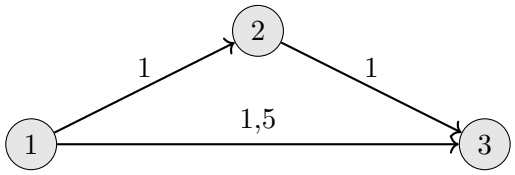
Solución: Para verificar que el conjunto de soluciones óptimas no cambie, se debe demostrar o descartar equivalencia entre los modelos de optimización para cada caso.

(1) $k_a \equiv 2c_a$: En este caso es evidente que las soluciones óptimas serán las mismas, ya que escala la función objetivo por una constante positiva. Luego ambos problemas de optimización son equivalentes.

(2) $k_a \equiv c_a + 1$: Este caso no tiene por qué tener las mismas soluciones óptimas, ya que sobrepenaliza rutas con más arcos que rutas con menos arcos. Por ejemplo en la red:



, la ruta mínima de 1 a 3 es 1-2-3, pero al sumar 1 al costo de cada arco la ruta mínima es 1-3:



(3) $k_a \equiv c_a + i - j$, donde el arco a va del nodo i al nodo j: Este último caso es más complejo. La respuesta es que sí se mantiene el mismo conjunto de soluciones óptimas. Considere una ruta de s a t cualquiera con r arcos $\{s = i_0, i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, i_r = t\}$ de r. Su costo es:

$$\sum_{j=1}^{r} k_{i_{j-1},i_j} = \sum_{j=1}^{r} c_{i_{j-1},i_j} + i_{j-1} - i_j = (s - t) + \sum_{j=1}^{r} c_{i_{j-1},i_j}$$

, es decir, para cualquier ruta dirigida de s a t (independiente de cuál sea la ruta o del número de arcos que usa) se agrega una constante $(s - t)$ al costo de la ruta. Luego el conjunto de rutas a mínimo costo sobre los costos k_a o c_a es equivalente.

Pregunta 3 (14 puntos)

(a) (7 puntos) Considere un problema lineal continua en forma estándar dado por:

$$\min_{x \geq 0} \{c^T x \text{ s.a. } Ax = b\}$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $b \in \mathbb{R}^m_+$ con $m < n$.

Considere que usted ha implementado el método Simplex hasta una iteración intermedia y que su configuración de base actual es $B = \{1, \ldots, m\} \subset \{1, \ldots, n\}$ con matriz básica $A_B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ definida por las primeras m columnas de A.

Sea A^j la columna $j \in \{1, \ldots, n\}$ de A. Suponga que la variable x_{m+1} tiene costo reducido negativo ($c_{m+1} - c_B^T A_B^{-1} A^{m+1} < 0$) y que $\bar{a} := A_B^{-1} A^{m+1} < 0$, es decir es negativo en cada componente.

Demuestre que el vector h definido como

$$h_i = \begin{cases} 1 & i = m+1 \\ -\bar{a}_i & i \leq m \\ 0 & i > m+1 \end{cases}, \qquad i = \{1, \ldots, n\}$$

es un rayo de escape con mejora infinita. Es decir, usted debe demostrar que la solución $y := \begin{Bmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{Bmatrix} + th$ es factible para $t \geq 0$ y que $c^T y \to -\infty$ cuando $t \to \infty$.

Solución: Primero se debe probar que y es factible. Es claro que h es no negativo, por lo que $y := \begin{Bmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{Bmatrix} + th \geq 0$.

Se debe probar que $A \begin{Bmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{Bmatrix} + th = b$ para todo $t \geq 0$. Dado que $A \begin{Bmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{Bmatrix} = b$, se debe probar que $Ah = 0$. Verifiquemos:

$$\begin{aligned} Ah = & \quad [A_B, A^{m+1}, A^{m+2}, \ldots, A^n]h \\ = & \quad [A_B, A^{m+1}, A^{m+2}, \ldots, A^n] \begin{bmatrix} -\bar{a} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ = & \quad [A_B, A^{m+1}, A^{m+2}, \ldots, A^n] \begin{bmatrix} -A_B^{-1} A^{m+1} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ = & \quad -A_B A_B^{-1} A^{m+1} + A^{m+1} \\ = & \quad 0 \end{aligned}$$

Se debe verificar que $c^T h < 0$ para mostrar que cuando $t \to \infty$ se cumple $c^T \left(\begin{Bmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{Bmatrix} + th \right) = c_B A_B^{-1} b + t c^T h \to -\infty$. Verifiquemos:

$$\begin{aligned} c^T h = & \quad -c_B^T \bar{a} + c_{m+1} \\ = & \quad -c_B^T A_B^{-1} A^{m+1} + c_{m+1} \\ < & \quad 0 \qquad (\text{ es justamente el costo reducido de la variable } x_{m+1}) \end{aligned}$$

(b) (7 puntos) Se tiene un problema de optimización lineal entero en dos variables ($x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$) y dos restricciones de desigualdad no estricta. La solución óptima del problema lineal relajado es $x_1 = 25/14$ y $x_2 = 9/14$. La función objetivo del problema original y el valor que alcanza en la solución óptima relajada es $3x_1 + 2x_2 = 93/14$. Se sabe también que el valor de la variable dual asociada a la primera restricción es $13/14$ y el valor de la variables dual asociada a la segunda restricción es $3/14$. El lado derecho de la primera restricción es 6.

Construya un plano cortante de Gomory que sea válido para el problema descrito y expréselo en función de las variables originales x_1 y x_2.

Solución: Se tiene la siguiente información $x_1 = 25/14$, $x_2 = 9/14$, $y_1 = 13/14$ e $y_2 = 3/14$. Además, el problema primal tiene la siguiente función objetivo $3x_1 + 2x_2 = 93/14$. Si asumimos (después veremos que es correcto) que las restricciones del primal son $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b_1$ y $a_3x_1 + a_4x_2 \leq b_2$. Con esto, las restricciones del dual son $a_1y_1 + a_3y_2 \geq 3$ y $a_2y_1 + a_4y_2 \geq 2$, esto último por dualidad y asumiendo que las variables del primal deben ser no negativas (su valor en el óptimo lo es).

Del teorema fuerte de dualidad sabemos que $3x_1 + 2x_2 = 93/14 = b_1y_1 + b_2y_2$ (dado que el primal posee solución óptima), y como $y_1 = 13/14$, $y_2 = 3/14$ y $b_1 = 6$, entonces $b_2 = 5$.

Ahora, como la solución del primal y del dual son distintas de 0, se puede inferir que la solución óptima de ambos problemas son activas en ambas restricciones, por lo que se tiene:

$$\begin{array}{c} a_1x_1 + a_2x_2 = 6 \\ a_3x_1 + a_4x_4 = 5 \\ a_1y_1 + a_3y_2 = 3 \\ a_2y_1 + a_4y_2 = 6 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} a_1\frac{25}{14} + a_2\frac{9}{14} = 6 \\ a_3\frac{25}{14} + a_4\frac{9}{14} = 5 \\ a_1\frac{13}{14} + a_3\frac{3}{14} = 3 \\ a_2\frac{13}{14} + a_4\frac{3}{14} = 2 \end{array}$$

de donde $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$ y $a_4 = 5$. Por lo que el problema primal debería ser:

$$\begin{array}{c} \text{máx} \quad 3x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

y que entrega como solución el punto $x_1 = 25/14$, $x_2 = 9/14$ (es fácil de verificar que los otros vertices de este problema no son óptimos).

Así, la forma estándar queda:

$$\begin{array}{c} \text{mín} \quad -3x_1 - 2x_2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

y como conocemos la solución óptima, sabemos que las variables x_1 y x_2 son las variables básicas, y x_3 y x_4 son las variables no básicas. Entonces tenemos que:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/14 & -1/14 \\ -1/14 & 3/14 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 5/14 & -1/14 \\ -1/14 & 3/14 \end{bmatrix}$$

Así, los dos cortes que se pueden obtener son (basta uno!):

$$(5/14 - \lfloor 5/14 \rfloor)\, x_3 + (-1/14 - \lfloor -1/14 \rfloor)\, x_4 \geq (25/14 - \lfloor 25/14 \rfloor) = (5/14)\, x_3 + (13/14)\, x_4 \geq 11/14$$

quedando: $5x_3 + 13x_4 \geq 11$ y como $x_3 = 6 - 3x_1 - x_2$ y $x_4 = 5 - x_1 - 5x_2$ se tiene: $6 \geq 2x_1 + 5x_2$

y el otro:

$$(-1/14 - \lfloor -1/14 \rfloor)\, x_3 + (3/14 - \lfloor 3/14 \rfloor)\, x_4 \geq (9/14 - \lfloor 9/14 \rfloor) = (13/14)\, x_3 + (3/14)\, x_4 \geq 9/14$$

quedando: $13x_3 + 3x_4 \geq 9$ y como $x_3 = 6 - 3x_1 - x_2$ y $x_4 = 5 - x_1 - 5x_2$ se tiene: $6 \geq 3x_1 + 2x_2$

Pregunta 4 (16 puntos)

Para una entrevista laboral, cada uno de los I postulantes debe ser entrevistado por los tres gerentes de la compañía: gerente general, gerente de recursos humanos y gerente de operaciones. El proceso está diseñado de tal manera que en un mismo día deben ser entrevistados todos los postulantes, y que la primera entrevista de cada postulante debe ser primero con el gerente general. Al salir de la entrevista con el gerente general, cada postulante puede pasar indistintamente por el gerente de recursos humanos o por el gerente de operaciones, no existiendo un orden preestablecido ni preferente, pero siempre considerando que cada postulante debe entrevistarse con estos dos gerentes. Se debe tener en cuenta que cada gerente puede entrevistar a un único candidato a la vez.

El tiempo que toma el gerente g en realizar la entrevista al postulante i está estimado, en t_i^g minutos. Usted conoce ciertas limitaciones temporales de algunos postulantes. Específicamente, si el día comienza en el minuto 0, el postulante i no estará disponible para ser entrevistado entre el minuto R_i y el W_i (inclusive).

Con la información anterior, formule un modelo de programación lineal mixta que planifique en el tiempo las entrevistas de los I postulantes, de manera que se respeten todas las condiciones establecidas y buscando que el proceso de entrevistas termine lo antes posible (considere que el proceso terminará cuando todos los postulantes hayan terminado sus tres entrevistas).

Solución:

Variables

$X_{(i,g)}$ = tiempo en que el postulante i inicia la entrevista con el gerente g.

$V_{(i,g)}$ = $\begin{cases} 1 & \text{si el postulante } i \text{ se entrevista con el gerente } g \text{ antes de su ventana de imposibilidad.} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

$\beta^g_{(i,j)}$ = $\begin{cases} 1 & \text{si el postulante } i \text{ tiene la entrevista con el gerente } g \text{ justo antes (predecesor directo) que el postulante } j \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$

D_i = $\begin{cases} 1 & \text{si el postulante } i \text{ tiene la entrevista con el gerente de recursos humanos (g=RH) antes que la entrevista con el gerente de operaciones (g=O)} \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$

T_{max} = Tiempo en que termina la última entrevista del día.

Función Objetivo

$$\text{mín} \quad T_{max}$$

Restricciones

(a) Se debe garantizar que todo postulante se entreviste primero con el gerente general (g=GG) que con los gerentes de recursos humanos (g=RH) o de operaciones (g=OO).

$$X_{(i,GG)} + t_{(i,GG)} \leq X_{(i,RH)} \qquad \forall i \in I.$$
$$X_{(i,GG)} + t_{(i,GG)} \leq X_{(i,OO)} \qquad \forall i \in I.$$

(b) Se debe garantizar que todo postulante que se entrevista en segundo lugar con el gerente de recursos humanos (g=RH) pasa después por el gerente de operaciones (g=OO) o al revés.

$$X_{(i,RH)} + t_{(i,RH)} - M\,(1 - D_i) \leq X_{(i,OO)} \qquad \forall i \in I.$$
$$X_{(i,OO)} + t_{(i,OO)} - M \cdot D_i \leq X_{(i,RH)} \qquad \forall i \in I.$$

(c) Se debe garantizar que todo postulante pasa a la entrevista con un gerente solo si el gerente terminó la entrevista con el postulante inmediatamente anterior.

$$X_{(i,g)} + t_{(i,g)} \leq X_{(j,g)} + M\left(1 - \beta^g_{(i,j)}\right) \qquad \forall i, j \in I \wedge i \neq j; g \in \{GG, RH, OO\}.$$

(d) Se debe garantizar que todo postulante no estará en entrevistas en su ventana de infactibilidad.

$$X_{(i,g)} + t_{(i,g)} \leq R^g_i + M\left(1 - V_{(i,g)}\right) - \varepsilon \qquad \forall i \in I; g \in \{GG, RH, OO\}.$$
$$X_{(i,g)} + M \cdot V_{(i,g)} \geq W^g_i + \varepsilon \qquad \forall i \in I; g \in \{GG, RH, OO\}.$$

(e) Restricciones para construir las listas de entrevistas (orden de las entrevistas) a cada gerente.

$$\sum_{i \in I \wedge i \neq j} \beta^g_{(i,j)} \leq 1 \qquad \forall j \in I; g \in \{GG, RH, OO\}.$$
$$\sum_{j \in I \wedge j \neq i} \beta^g_{(i,j)} \leq 1 \qquad \forall i \in I; g \in \{GG, RH, OO\}.$$
$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I \wedge j \neq i} \beta^g_{(i,j)} = |I| - 1 \qquad \forall g \in \{GG, RH, OO\}.$$

(f) Restricciones para construir las listas de entrevistas (orden de las entrevistas) a cada gerente.

$$X_{(i,g)} \leq T_{max} \qquad \forall i \in I; g \in \{GG, RH, OO\}.$$

(g) Naturaleza de las variables

$$X_{(i,g)} \geq 0 \qquad \forall i \in I : g \in \{GG, RH, OO\}.$$
$$V_{(i,g)} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I : g \in \{GG, RH, OO\}.$$
$$\beta^g_{(i,j)} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j \in I : g \in \{GG, RH, OO\}.$$
$$D_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I.$$
$$T_{max} \geq 0$$