PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2015
Profesores: P.Álvarez - A.Cataldo
M.Fuentes - D.Pozo - J.Vera

Pauta Interrogación 1

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (16 puntos)

(a) (**4 puntos**) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justifique con precisión.

(i) (**1 punto**) Para un problema de Programación Lineal en su forma estándar, en las iteraciones del método Simplex, la función objetivo mejora o encontramos la solución óptima.

(ii) (**1 punto**) Cuando se resuelve un problema de optimización con restricciones, al encontrar el punto óptimo, todas las restricciones se encuentran activas.

(iii) (**1 punto**) Cualquier problema que se pueda modelar admite una solución óptima. En el peor de los casos, se puede lograr una aproximación a una solución óptima.

(iv) (**1 punto**) Un problema de optimización con función objetivo continua, con el dominio no vacío y no acotado, no tiene solución óptima.

Respuesta:

(i) La afirmación es falsa. En caso de problemas degenerados por ejemplo entre una iteración y otra podría no mejorar el valor de la función objetivo. Otro ejemplo, en alguna iteración se puede detectar no acotamiento.

(ii) La afirmación es claramente falsa. Pueden poner cualquier contraejemplo en dos dimensiones que tenga 3 o más restricciones.

(iii) La afirmación es falsa. Hay problemas infactibles.

(iv) La afirmación es falsa. Puede ser que un problema con un dominio no cerrado tenga solución. Basta con que las curvas de nivel de la función objetivo sigan el camino de crecimiento (o decrecimiento) en sentido contrario a la región no acotada.

(b) (**4 puntos**) Considere el siguiente problema (P):

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{máx} & ax_1 + 2bx_2 \\ \text{s.a:} & & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

¿Qué condición deben cumplir a y b en (P) para que el punto $(x_1, x_2) = (1, 0)$ sea solución óptima?

Respuesta:
La forma estándar de (P) es:

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{mín} & -ax_1 - 2bx_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{s.a:} & & x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ & & 2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

La solución entrega es entonces: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ y $x_4 = 0$. Por lo que las variables básicas son x_1 y x_3. La base queda:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Así, los costos reducidos son:

$$\bar{c_R}^T = \begin{pmatrix} -a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a & -2b \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} - 3b & -\frac{a}{2} + b \end{pmatrix}$$

$$\bar{c_R}^T = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} + 3b \\ \frac{a}{2} - b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nota: También es posible responder la pregunta utilizando análisis gráfico, siempre y cuando el análisis esté bien argumentado.

(c) (**4 puntos**) Considere el siguiente problema P), donde $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & \log((x-2)^2 + y^2 + \alpha) \\ s.a. & \mid x \mid \leq 1 \\ & \mid y \mid \leq 1 \\ & \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1 \\ & x, y \in \mathbb{R}. \end{array}$$

(i) (**2 puntos**) Estudie la existencia de soluciones del problema.

(ii) (**2 puntos**) Escriba un problema equivalente a P) lo más sencillo posible.

Respuesta:

(i) Para la función objetivo esté definida en todo su dominio, se necesita que $\alpha > 0$. Los otros dos términos siempre serán positivos. Podría suceder que $(x-1)^2 + y^2$ nunca se haga cero porque alguna/s restricción/nes lo impiden. Pero no es el caso. El punto perteneciente a la región factible $(x, y) = (1, 0)$ hace que la función objetivo tome el valor $\log(\alpha)$. Entonces, sólo podemos analizar la existencia de soluciones con $\alpha > 0$. En este caso, observamos que la función objetivo es continua. Además, el dominio del problema P) es cerrado dado que no hay ninguna restricción con desigualdad estricta. También el dominio no es vacío, y claramente es acotado por las restricciones $|x| < 1, |y| < 1$. Por ejemplo el (1,1) está solución factible. Por tanto, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, podemos asegurar la existencia de solución.

(ii) Ya vimos que para $\alpha \leq 0$ la función objetivo no está definida. Sólo podemos reformular el problema en otro equivalente para todo $\alpha \mid \alpha > 0$. Para ello realizamos los siguientes cambios:

- En la función objetivo aplicamos una función exponencial que es siempre creciente para los valores que la función objetivo puede tomar. Además como α es constante puede salir fuera de la minimización. Si está dentro, el problema también sigue sencillo.
- Las restricciones con valor absoluto se pueden cambiar por otras dos restricciones lineales. Para $\mid x \mid \leq 1$, se puede sustituir por $x \leq 1$ y $-x \leq 1$.
- La restricción con la raíz cuadrada se puede simplificar como $x^2 + y^2 \geq 1$.

Por tanto, el problema equivalente quedaría:

$$P') \quad \begin{array}{rl} \alpha + \text{mín} & \left((x-1)^2 + y^2\right) \\ s.a. & x \leq 1 \\ & -x \leq 1 \\ & y \leq 1 \\ & -y \leq 1 \\ & x^2 + y^2 \geq 1 \\ & x, y \in \mathbb{R}. \end{array}$$

(d) (**4 puntos**) Conocido el siguiente tableau

a	0	3	0	4	6
0	1	-1	0	2	b
0	0	8	1	4	7
0	0	c	d	1	2
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

el cual está relacionado con un problema lineal de minimización de la Fase II del Simplex. Se pide definir qué valores pueden tomar los parámetros a, b, c y d para que se cumplan las siguientes propiedades:

(i) (**1 punto**) Que el problema original tenga una única solución óptima no degenerada.

(ii) (**1 punto**) Que el problema original tenga múltiples soluciones óptimas no degeneradas.

(iii) (**2 puntos**) Que el problema original tenga solución/nes óptima/s degenerada/s.

Respuesta:

(i) $a = 1, b > 0, c > 0, d = 0.$

(ii) $a = 1, b > 0, c = 0, d = 0.$

(iii) $a = 1, b = 0, c \geq 0, d = 0.$

Pregunta 2 (14 puntos)

(a) (**4 puntos**) Dada una bola (Euclidiana) en $\mathbb{R}^n$ definida como,

$$B(x_c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \quad || \, x - x_c \, ||_2 \leq r\}$$

donde $r > 0$, y $|| \cdot ||_2$ denota la norma Euclidiana. El vector x_c es el centro de la bola y el escalar r su radio. Demuestre que el conjunto $B(x_c, r)$ es convexo para cualquier x_c y $r > 0$.

Indicación:. La norma Euclidiana cumple con la desigualdad triangular. Es decir:

$$|| a + b ||_2 \leq || a ||_2 + || b ||_2 .$$

Respuesta:
Elegimos dos puntos del conjunto $B(x_c, r)$ que llamamos x_1 y x_2. Puesto que pertenecen al conjunto bola, se cumple que $|| x_1 - x_c ||_2 \leq r$ y $|| x_2 - x_c ||_2 \leq r$.

Además sabemos que para la norma Euclidiana se cumple la desigualdad triangular: $|| a + b ||_2 \leq || a ||_2 + || b ||_2$.

Ahora, elegimos un punto $x' = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ y comprobamos si está dentro del conjunto $B(x_c, r)$ para cualquier $0 \leq \lambda \leq 1$. Es decir, ¿se cumple que $|| x' - x_c ||_2 \leq r$? Entonces,

$$\begin{aligned} || x' - x_c ||_2 &= || \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x_c ||_2 \\ &= || \lambda(x_1 - x_c) + (1 - \lambda)(x_2 - x_c) ||_2 \\ &\leq \lambda || (x_1 - x_c) ||_2 + (1 - \lambda) || (x_2 - x_c) ||_2 \\ &\leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r \end{aligned}$$ ■

Nota: También es posible responder la pregunta mostrando que la función norma es conveza.

(b) (**6 puntos**) En la modelación de problemas, a veces, es necesario incluir restricciones lógicas. Un caso particular es la disyunción entre restricciones. Una disyunción implica una pareja de restricciones donde sólo una (cualquiera de las dos) debe satisfacerse, mientras que la otra no es necesario que se satisfaga. Es decir, debe cumplirse una al menos pero no necesariamente las dos. Sean $f(x) \leq 0$ y $g(x) \leq 0$ las dos restricciones que forman la disyunción, la que se define como:

$$f(x) \leq 0 \quad \text{ó} \quad g(x) \leq 0.$$

Para escribir esta condición lógica como restricciones de un problema de optimización, necesitamos incluir una variable binaria y y una constante M. La condición lógica queda reformulada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x) &\leq My \\ g(x) &\leq M(1 - y) \end{aligned}$$

(i) (**1 punto**) Justifique que la reformulación propuesta es equivalente a la condición disyuntiva.

(ii) (**1 punto**) ¿Existe alguna limitación en la elección de la constante M?

(iii) (**2 puntos**) Inspirados en esta formulación, escriba el conjunto de restricciones equivalentes cuando se tienen N desigualdades de las cuales se tienen que cumplir $k < N$ desigualdades. Las N desigualdades están dadas por $f_1(x) \leq 0, f_2(x) \leq 0, \ldots, f_N(x) \leq 0$.

(iv) (**2 puntos**) Se tiene el problema de minimización $\min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+} (x_1^2 + 3x_2)$ sujeto a la restricción disyuntiva ($f(x) \leq 0$ ó $g(x) \leq 0$), donde $f(x) = 2x_1 + 7x_2$ y $g(x) = 3x_1 + 5x_2$. ¿Podemos asegurar que el problema sea convexo?

Respuesta:

(i) Puesto que la variable y es variable binaria, se tienen los siguientes casos:

Para $y = 0$: $f(x) \leq 0$ y $g(x) \leq M$. Se cumple la primera de las restricciones. La segunda restricción está limitada por un valor M que debería ser mayor que una cota superior de $g(x)$ dentro de su dominio. De esta forma, para cualquier x la segunda restricción no limita a $g(x)$.

Para $y = 1$: $f(x) \leq M$ y $g(x) \leq 0$. Se cumple la segunda de las restricciones. La primera restricción está limitada por un valor M que debería ser mayor que una cota superior de $f(x)$ dentro de su dominio. De esta forma, para cualquier x la primera restricción no limita a $f(x)$.

(ii) En el apartado anterior ya hemos dado indicaciones del parámetro M, también conocido como "big-M". Para que el problema sea equivalente, se precisa que M sea mayor que el máximo de las cotas superiores de $f(x)$ y $g(x)$.

(iii) Se puede incluir una variable binaria y_i por cada una de las desigualdades $f_i(x) \leq 0$ que obliga a cumplir dicha desigualdad cuando $y_i = 1$. El conjunto de restricciones se puede reformular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_1(x) &\leq M(1 - y_1) \\ f_2(x) &\leq M(1 - y_2) \\ \cdots &\quad \cdots \\ f_N(x) &\leq M(1 - y_N) \\ \sum_{i=1}^{N} y_i &= k \end{aligned}$$

La última restricción obliga a seleccionar k de las N ecuaciones.

(iv) No, porque el dominio no es convexo. Los dominios que contienen alguna variable entera no son convexos.

(c) (**4 puntos**) Demostrar que si en una iteración del método Simplex, sale de la base la variable l y entra a la base la variable j, entonces la variable l no puede entrar a la base en la siguiente iteración.

Respuesta:

Para demostrar esto, basta con probar que los costos reducidos de la variable l son positivos luego de salir de la base, y entonces, $\bar{c_l} \geq 0$.

Sin pérdida de generalidad, sea $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_l, \ldots, b_m\}$ la base en la iteración en la que variable l abandona la base, y $\hat{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_m\}$, dado que la variable j reemplazará a la variable l en la base.

Se en la iteración actual que:

$$\bar{c_j} < 0, \bar{c_l} = 0$$

como la variable l sale y la variable j entra a la base, se realizan operaciones fila (en el tableau correspondiente) que hacen que:

$$\bar{c_j}' = 0 = \bar{c_j} + R_{kj} \cdot \frac{-\bar{c_j}}{R_{kj}}, \bar{c_l}' = \bar{c_l} + 1 \cdot \frac{-\bar{c_j}}{R_{kj}}$$

pero se sabe que $-\bar{c_j} > 0$, $\bar{c_l} = 0$ y como x_l entra a la base se debe cumplir que $R_{kj} > 0$, luego:

$$\bar{c_l}' = \bar{c_l} + 1 \cdot \frac{-\bar{c_j}}{R_{kj}} > 0$$

(d) (**Pregunta de bono extra: 4 puntos**) Dos poliedros P y Q se dicen isomorfos si existe $f : P \longrightarrow Q$ lineal afín biyectiva.

(i) (**2 puntos**) Muestre que x es un punto extremo de P si y sólo si $f(x)$ es un punto extremo de Q.

(ii) (**2 puntos**) Muestre que los siguientes poliedros son isomorfos:

$$\begin{aligned} P = &\ \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \\ Q = &\ \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : Ax + z = b; z \geq 0\} \end{aligned}$$

Respuesta:

(i) Probemos que si x es punto extremo de P entonces debe ser punto extremo de Q
Sea x un punto extremo de P, entonces se puede escribir $f(x) = Ax + b$ pues es afín. Supongamos que $y := f(x)$ no es punto extremo de Q, luego, existen y_1 e $y_2 \in Q$ tales que $y = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$. Como f es biyectiva se tiene que $x_1 = f^{-1}(y_1)$ y $x_2 = f^{-1}(y_2)$ son puntos de P.
Ahora, $f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) = \frac{1}{2}Ax_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = y$, luego, por biyectividad se concluye que $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = x$ (pues antes definimos que $y = f(x)$). Pero si se puede construir x como combinación lineal de puntos de P no es un punto extremo, lo que es una contradicción, luego $y := f(x)$ debe ser un punto extremo de Q.

(ii) Sea $f : Q \to P$ la función dada por $f(x, z) = x$. Se observa que como $Ax + z = b$ y $z \geq 0$, entonces $Ax \leq b$, por lo que $\forall (x, z) \in Q, f(x, z) \in P$.
La función tal y como ha sido definida es claramente lineal, y es invertible pues la inversa es $f^{-1}(x) = (x, b - Ax)$, y su inversa es única, lo que la hace lineal afín biyectiva. En consecuencia, los poliedros P y Q definidos son isomorfos.

Pregunta 3 (15 puntos)

Considere el siguiente problema de Optimización Lineal:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & 3x_1 + 4x_2 \\ s.a. & 2x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

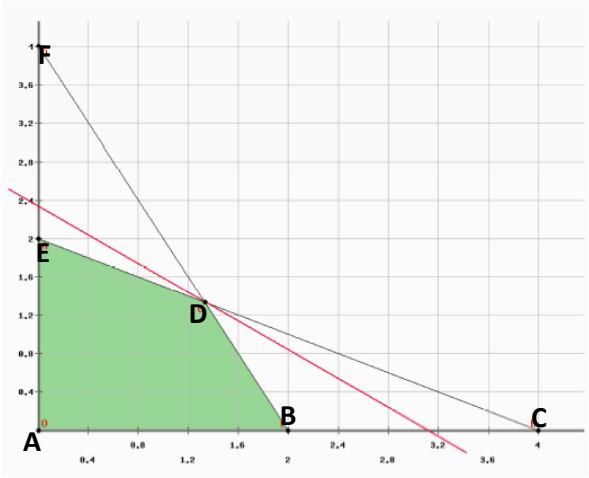
(a) (**1 punto**) Escriba este problema en forma estándar.

(b) (**3 puntos**) Haga un gráfico del problema e identifique en el gráfico todas las soluciones básicas del sistema de ecuaciones de la forma estándar escrita por usted en a). Para cada una indique con claridad cuáles variables son básicas y cuáles son no básicas. Además, de entre todas las soluciones básicas, identifique aquellas que son factibles y, de entre ellas, la óptima.

(c) (**7 puntos**) El punto dado por $(x_1, x_2) = (0, 2)$ es un punto extremo del correspondiente poliedro. A partir de la solución básica factible correspondiente a este punto, utilice el criterio de optimalidad del algoritmo Simplex para determinar si esta solución es óptima o no. En caso que la solución no sea óptima, utilice los criterios del algoritmo Simplex para determinar el próximo punto a evaluar. Sea claro en todos sus pasos.

Indicación: Le puede ser útil recordar que si

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$



entonces:

$$B^{-1} = \frac{1}{ac - bd} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix},$$

(d) (**4 puntos**) Ahora, usando el método SIMPLEX, pero en forma de Tableau, haga una iteración del algoritmo (partiendo de donde resulte obvio partir).

Respuesta:

(a) La forma estándar agrega dos variables de holgura y es:

$$P) \quad \begin{array}{lllll} \text{mín} & -3x_1 - 4x_2 & & & \\ s.a. & 2x_1 + 4x_2 & +x_3 & & \leq 8 \\ & 4x_1 + 2x_2 & & +x_4 & \leq 8 \\ & x_j \geq 0, & & & j = 1, \ldots, 4. \end{array}$$

Aquí se cambió la función objetivo a "min", pero no es realmente necesario hacerlo si el SIMPLEX se hace bien.

(b) El gráfico es el siguiente (que además muestra la solución factible):

En todo caso, hay 6 soluciones básicas, se indican en la siguiente tabla:

Punto	x_1	x_1	x_1	x_1	Factible	Básicas
A	0	0	8	8	SI	3, 4
B	2	0	4	0	SI	1, 3
C	4	0	0	4	NO	1, 4
D	4/3	4/3	0	0	SI	1, 2
E	0	2	0	4	SI	2, 4
F	0	4	4	0	NO	2, 3

(c) En la solución propuesta, que es el punto E, las variables básicas son x_2 y x_4. Usaremos I para llevar los índices de las variables básicas.

Tenemos, entonces, $I = \{2, 4\}$. Luego:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Además,

$$c_B = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_R = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Se calcula fácilmente que:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos los costos reducidos, para lo que necesitamos π, que es:

$$\pi^T = c_B^T B^{-1} = [-1, 0]$$

luego,

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - \pi^T R = [-3, 0] - [-1, 0] \times R = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = [-1, 1]$$

Es decir, $\bar{c}_1 = -1$, $\bar{c}_3 = 1$. La solución actual no es óptima, así que la variable 1 entra a la base. Debemos determinar cuál sale, para lo cual tenemos que calcular $\bar{R}_{\bullet 1}$. Se tiene:

$$\bar{R}_{\bullet 1} = B^{-1} R_{\bullet 1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ahora, tenemos que calcular $\bar{\delta}$ para determinar la variable que sale de la base,

$$\bar{\delta} = \text{mín} \left\{ \frac{2}{1/2}, \frac{4}{3} \right\} = \frac{4}{3},$$

lo que indica que sale la variable x_4.

La nueva base es $I = \{2, 1\}$.

(d) El Tableau inicial es el de la forma estándar:

x_1	x_1	x_1	x_1	$\bar{b}$
2	4	1	0	8
4	2	0	1	8
-3	-4	0	0	0

Ahora, entra la variables 2. El test de razón mínima calcula 8/4 y 8/2. El mínimo se alcanza en la fila 2, así que ese es el pivote y sale la variable 4. El nuevo Tableau es:

x_1	x_1	x_1	x_1	$\bar{b}$
1/2	1	1/4	0	2
3	0	$-1/2$	0	4
-1	0	1	0	-8

Pregunta 4 (15 puntos)

Usted ha sido contratado por la única línea aérea de un país, la cual posee N aviones. Su trabajo consiste en asignar de la manera más rentable posible los aviones a las R rutas que opera la compañía, durante un cierto periodo de tiempo fijo (la temporada de verano, por ejemplo).

En cada ruta r existe una demanda máxima de viajes igual $d_r, r = 1, \ldots, R$ en todo el periodo de estudio, y cada pasajero transportado en un viaje en la ruta r paga una cantidad igual a p_r pesos (una ruta es un viaje desde una ciudad a otra, en un sentido), y ese es el ingreso de la compañía por los viajes. Suponga que la cantidad de aviones no necesariamente permite satisfacer toda la demanda que existe. También se sabe que la ruta r requiere h_r horas de vuelo, $r = 1, \ldots, R$. Cada avión sólo puede ser asignado a una ruta, y una vez asignado a la ruta r se realizarán una cantidad finita y definida de viajes (vuelos) igual a K_r.

Cada avión i posee A_i asientos y hay un costo fijo de operación de c_i pesos por cada viaje realizado en una ruta, y un consumo de combustible a una tasa igual a g_i litros de combustible por hora de vuelo. El costo de cada litro de combustible es M.

(a) (**10 puntos**) Plantee el Modelo que permita asignar los aviones de modo de maximizar las utilidades. Explique e identifique con claridad sus variables de decisión, restricciones y función objetivo del modelo.

(b) (**2 puntos**) Suponga que tiene una solución al modelo. Comente (no es necesario fundamentar matemáticamente) cómo debería variar el resultado del modelo, si el costo de combustible M aumentara en forma considerable.

(c) (**3 puntos**) Suponga que la capacidad de los aviones que tiene actualmente es mucho menor a la demanda, y que el mercado tiene elasticidad precio (e_p) igual a -2. Detalle en qué cambia su modelo con esta nueva información.

Indicación: La elasticidad del precio se define por $e_p = \dfrac{\left(\frac{\triangle Q}{Q}\right)}{\left(\frac{\triangle P}{P}\right)}$

Respuesta:

(a) El problema puede modelarse de la siguiente manera,

Variables de decisión

- y_{ir}: 1, si el avión $i = 1, \ldots, N$ es asignado a la ruta $r = 1, \ldots, R$; 0, en otro caso.
- x_{rk}: cantidad de pasajeros transportados en la ruta $r = 1, \ldots, R$ en el viaje $k = 1, \ldots, K$.

Función objetivo: La asignación de aviones debe maximizar la utilidad de la compañía. Entonces:

$$\max \sum_{r=1}^{R} \sum_{k=1}^{K} p_r x_{rk} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{r=1}^{R} (c_i K + M g_i h_i) y_{ir}$$

Restricciones

(1) Cantidad máxima de pasajeros por cada ruta.

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} x_{rk} y_{ir} \leq d_r, \ \forall r = 1, \ldots, R.$$

(2) Respetar la capacidad del avión por vuelo.

$$x_{rk} \leq \sum_{i=1}^{N} A_i y_{ir},\ \forall r = 1, \ldots, R, k = 1, \ldots, K.$$

(3) Respetar la cantidad de aviones disponibles.

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{N} y_{ir} \leq N.$$

(4) Un avión puede ser asignado a lo más a una categoría.

$$\sum_{r=1}^{R} y_{ir} \leq 1,\ \forall i = 1, \ldots, N.$$

◇ Naturaleza de las variables de decisión.

$$\begin{aligned} y_{ir} \in \{0, 1\}, &\quad \forall r = 1, \ldots, R, i = 1, \ldots, N. \\ x_{rk} \geq 0, &\quad \forall r = 1, \ldots, R, k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

Nota: Existen otros modelos, como por ejemplo considerar la agregadamente la demanda y definir la variable x_r como cantidad de viajeros en la ruta r.

(b) Si el costo M se duplicara, el modelo debería hacer que se baje la cantidad de aviones asignados a volar a cada ruta, por supuesto depende de la relación de M con p. Luego, si el valor de M sigue aumentando, lo que debe ir sucediendo es que cada vez se utilizan menos aviones, hasta el punto en que si $M >>> p$, no se asignan aviones a rutas.

(c) En este caso, se puede dejar el precio adecuado en función de la cantidad de pasajeros que es conveniente transportar a través de una ruta específica. Luego, el precio será variable, y lo denotamos como p_r^*. Entonces, se tiene que:

$$e_p = \frac{\left(\frac{\triangle Q}{Q}\right)}{\left(\frac{\triangle P}{P}\right)} = -2 \Rightarrow -2 = \frac{\left(\frac{d_r - \sum_{k=1}^{K} x_{rk}}{d_r}\right)}{\left(\frac{p_r - p_r^*}{p_r}\right)} \Rightarrow p_r^* = p_r + \frac{p_r}{2} \frac{d_r - \sum_{k=1}^{K} x_{rk}}{d_r}$$

Ahora, basta con reemplazar esta expresión para el precio en la función objetivo y se tiene modelo solicitado.