PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 01-2018
Profesores: R. Cuadrado - S. Encina - F. Palomino
J.T. Marquinez - A. Cataldo - J. González

Interrogación 3

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***

La interrogación cuenta con 66 puntos, el 7.0 se obtiene sumando 60 o más puntos.

Pregunta 1 (20 puntos)

(a) **(12 puntos)** Comente acerca de la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando tanto si son verdaderas como si son falsas.

(i) **(3 puntos)** Si el problema primal posee una solución óptima entera y el problema dual es factible, necesariamente la solución óptima del problema dual corresponderá a una solución entera también.

Solución: Falso, se propone un contra ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 3.5x \\ \text{s.a.} \quad & x \geq 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & y \\ \text{s.a.} \quad & y \leq 3.5 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

En donde la solución óptima del problema P) sería entera, pero la de su respectivo problema dual no.

(ii) **(3 puntos)** En un problema de programación entera –que se resuelve mediante Branch & Bound– a partir de un nodo con solución óptima acotada, es posible tener que los respectivos problemas duales asociados a las ramificaciones de ese nodo puedan transformarse en problemas infactibles.

Solución: Falso: Por teorema débil de la dualidad, si la solución óptima del nodo era acotada, necesariamente implica que el problema dual asociado a ese nodo también posee una solución óptima acotada, por lo tanto factible. Luego, a medida que se vaya ramificando ese nodo, los respectivos problemas duales asociados a las ramificaciones siempre tendrán como solución factible la solución del problema dual del inicio, ya que únicamente lo que estamos realizando para estos es incluir nuevas variables al problema.

(iii) **(3 puntos)** Considerando el siguiente problema de la mochila:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 9x_4 \\ \text{s.a.} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

el corte $x_1 + x_2 \leq 1$ es una desigualdad válida equivalente a las desigualdades válidas construidas por el método de cortes de Gomory.

Solución: Falso, ya que el corte $x_1 + x_2 \leq 1$ no corta del espacio de soluciones factibles la solución óptima de la relajación lineal del problema presentado (que es $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2/5$ y $x_4 = 1$), lo que si haría un corte generado mediante el método de corte de Gomory.

(iv) **(3 puntos)** Un problema de programación lineal puede ser infactible, pero su respectivo problema relajado no acotado.

Solución: Verdadero, por ejemplo el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 \\ \text{s.a.} & x_2 = 2.5 \end{array}$$

Tiene una solución relajada no acotada, pero no posee solución factible entera.

(b) **(4 puntos)** Sea P_{entero}) un problema de programación lineal de minimización en variables enteras con valor óptimo w^*. A su vez, sea P) y D) los problemas primal y dual asociados al problema relajado de P_{entero}), con valor óptimo z^* y v^* respectivamente, siendo ambas soluciones únicas. Se sabe que P) es un problema de Programación Lineal cuya función objetivo no es una constante.

Indique si se puede garantizar que al aplicar un corte de Gomory sobre P_{entero}), el valor óptimo del nuevo problema dual asociado a su relajación lineal cumple que $v_n^* > v^*$, con v_n^* el valor óptimo de este nuevo problema dual relajado.

Solución: Considerando que la solución de la relajación lineal P) es única, al aplicarle un Corte de Gomory se garantiza que esa solución es cortada del espacio de soluciones factibles. En consecuencia, en la próxima iteración la solución $z_N^* = v_N^* > z^* = v^*$, con lo que se tiene que $v_n^* > v^*$.

(c) **(4 puntos)** Suponga que se tiene un problema P, el cual es:

$$\begin{array}{lll} P) & \text{Min} & c^T x \\ \text{s.a.} & Ax \leq b, & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

Usted sabe que el poliedro $\{x : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$ tiene todos sus vértices asociados a puntos enteros excepto por uno. Este vértice fraccionario solo presenta una de sus n componentes fraccionarias. Al resolver P) por el método de Branch & Bound se debe ramificar en dos problemas: P_1), el cual resulta infactible, y P_2), el cual posee solución entera.

Determine si el poliedro asociado a P_2) es la envoltura convexa de P.

Solución: No necesariamente es así. Si bien pueden existir casos en donde esto ocurra, no siempre se va a cumplir. Lo más sencillo es encontrar un contraejemplo.

El poliedro puede ser $\{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + 3x_2 \leq 6, 2x_1 - x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Pregunta 2 (14 puntos)

(a) **(4 puntos)** Considere un poliedro no vacío, definido como $P = \{\mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$, donde $A \in M^{m \times n}$ sin soluciones degeneradas. Demuestre que $x_j = 0$, $\forall x \in P$ (o sea, la coordenada j-ésima de una solución cualquiera de P siempre toma valor 0), si y solo si existe un $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^T A \geq 0$, $y^T b = 0$ con $\left(y^T A\right)_j > 0$.

Solución: Construyamos el par de problemas primal y dual necesarios para la demostración:

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{Max } 0x & \\ \text{s.a:} & Ax = b & \\ & x \geq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} (D) & \text{Min } y^T b & \\ \text{s.a:} & y^T A \geq 0 & \\ & y \text{ irrestricto} & \end{array}$$

Con esto, se deben realizar dos partes para la demostración:

- $\Rightarrow$ Como (P) es no vacío tiene solución finita, con lo que (D) tiene solución óptima finita. Sea entonces $\bar{y}$ el óptimo de (D). Como $\bar{y}$ es factible, debe cumplir $\bar{y}^T A \geq 0$, y por el Teorema de Dualidad Fuerte se cumple que $\bar{y}^T b = 0$.

  Finalmente, si $x_j = 0 \; \forall x \in P$, entonces la restricción dual asociada a este x_j no es activa para ningún y, por lo que se debe cumplir que $\left(y^T A\right)_j > 0$.
- $\Leftarrow$ Si $\left(y^T A\right)_j > 0$, entonces por el Teorema de Holguras Complementarias se debe cumplir que $x_j = 0$.

(b) **(4 puntos)** Suponga que usted se enfrenta a un problema de producción. Debe decidir cuánto confeccionar de cada producto. Conoce el vector de beneficios, c, el vector de recursos, b, y la matriz de ocupación de recursos, A. El problema es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & c^T x \\ \text{s.a.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Usted ya resolvió el problema y obtuvo que la solución es $x^* > 0$, única no degenerada.

Ahora bien, le indican que existe un nuevo producto que puede confeccionar, el cual tiene un beneficio β y un vector de ocupación de recursos α. Usando argumentos de dualidad, indique la relación matemática que se debe cumplir con α, β, y los valores que ya conoce del problema para que convenga producir el nuevo producto. Considere que la matriz A y su traspuesta son invertibles.

Solución: Tenemos que el dual del problema es:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & b^T y \\ \text{s.a.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Ahora bien, el problema con el nuevo producto es:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & c^T x + \beta z \\ \text{s.a.} & [A \; \alpha] \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \leq b \\ & x, z \geq 0 \end{array}$$

Por lo que su dual es:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & b^T y \\ \text{s.a.} & A^T y \geq c \\ & \alpha^T y \geq \beta \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Entonces, si el nuevo producto conviene producirlo, la solución óptima primal cambiará y, por lo tanto, la dual también. Para que esto pase, la restricción que se agregó en el dual debe ser infactible para la solución dual que llamaremos y^*. Entonces, se debe cumplir que:

$$\alpha^T y^* < \beta$$

Sin embargo, no conocemos y^*, pero se puede determinar en función de la información conocida. Para saber cuánto es, usemos el Teorema de Holguras Complementarias. De esto, sabemos que $(A^T y^* - c)x^* = 0$. Como $x^* > 0$, entonces $A^T y^* = c$. Como A^T es invertible, se tiene que $y^* = \left(A^T\right)^{-1} c$. Así, la relación que se debe cumplir es:

$$\alpha^T \left(A^T\right)^{-1} c < \beta$$

(c) **(6 puntos)** Responda de manera concisa las siguientes preguntas sobre "Mixed integer programming based heuristics for the Patient Admission Scheduling problem" subido en la página del curso[1]

(i) **(2 puntos)** ¿En qué consiste la Fase de Descomposición de la implementación del PAS?

(ii) **(2 puntos)** ¿Cómo se relacionan las heurísticas F&R y F&O?

(iii) **(2 puntos)** ¿Cuáles son los tres costos generales que se minimizan en la función objetivo del modelo planteado para asignar pacientes?

Solución:

(i) **(2 puntos)** Se descompone el problema original en pequeños problemas separándolos en intervalos de tiempo y tipos de pacientes. Para hacer esto se construye una métrica basada en tiempos de estadía, preferencias por tipo de habitación, fecha de admisión, tipo de especialidad y edad del paciente. Esta métrica permite ordenar a los pacientes en una lista, y así determinar pacientes que serán incluidos en la asignación en el intervalo de tiempo correspondiente, ya que el horizonte de evaluación es dividido en intervalos de tiempo.

(ii) **(2 puntos)** Con F&R se obtiene rápidamente soluciones factibles, las que son utilizadas como mejor solución actual para el calendario de asignaciones de pacientes con el uso de F&O, que se encarga de mejorarlas, todo en un enfoque iterativo de solución.

(iii) **(2 puntos)** Uno de ellos es la penalidad combinada por no respectar las restricciones menos duras del problema (edad, tratamientos especiales, tipo de habitación, especialidad, habitaciones con equipos especiales), el otro es el de no respetar las políticas de género en la asignación de habitaciones a pacientes, y el último es el de transferencia de pacientes de una a otra habitación.

Pregunta 3 (14 puntos)

(a) **(10 puntos)** Un anciana pareja de jubilados, para generar un ingreso adicional a su vejez, llevan varios meses produciendo a mano pantalones y chalecos para su venta. Sus conocimientos de optimización le han permitido definir el siguiente modelo de optimización

$$\begin{array}{lll} P) \quad \text{Max} & 80x_1 + 90x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 + 3x_2 & \leq 200 \\ & 4x_1 + 2x_2 & \leq 300 \\ & x_1 + x_2 & \leq 80 \\ & x_1, x_2 & \geq 0, \end{array}$$

en que x_1 y x_2 representa la cantidad de pantalones y chalecos, respectivamente, que ambos producirán a mano al mes. La primera, segunda y tercera restricción consideran el límite de

[1] Turhan, A. & Bilgen, B. (2017). Mixed integer programming based heuristics for the Patient Admission Scheduling problem. Computers & Operations Research, 80, 38–49.

metros de lana, metros cuadrados de género y metros de hilo oriental, respectivamente, con los que cuentan al mes. Todos los meses han estado produciendo la cantidad óptima según (P), que considera 20 pantalones y 60 chalecos.

Luego de meses producción, sus hijos, también vendedores, les ofrecen aumentar (y sólo aumentar) sus recursos al valor que quieran. Sin embargo, el orgullo de la anciana pareja no es menor, y no aceptarán nada gratuito; además de que ya llevan funcionando mucho tiempo bajo un plan de producción óptimo (estructura de solución). Tras discutirlo en familia, han llegado al siguiente trato:

- ◇ Cualquier aumento de recursos para la anciana pareja será tal que no les cambiará la estructura de la solución.
- ◇ Los ancianos pagarán \$2 por cada metro de lana que reciban, \$10 por cada metro cuadrado de género que reciban, y \$70 por cada metro de hilo oriental que reciban.
- ◇ Sólo uno de los recursos podrá aumentar su cantidad.
- ◇ Deben utilizar conceptos de dualidad, y no pueden usar ningún gráfico.
- ◇ Que todos juntos determinen la matriz básica óptima inversa. Definiendo x_4 como la holgura de la segunda restricción, entre todos llegaron a que

$$B^{-1}_{\{x_1,x_2,x_4\}} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

(i) **(6 puntos)** Dado que la pareja es ajena a conceptos y metodología de Simplex, ayude Usted a la anciana pareja a determinar cuál de los recursos aumentar para que la ganancia aumente lo más posible, cumpliendo siempre las condiciones del trato. Indique claramente qué recurso aumentó, en cuánto y la ganancia neta (valor óptimo nuevo − valor óptimo actual).

Solución: Primero, el problema dual de (P) corresponde a

$$\begin{array}{lll} D) \quad \text{Min} & 200y_1 + 300y_2 + 80y_3 & \\ \text{s.a.} & y_1 + 4y_2 + y_3 & \geq 80 \\ & 3y_1 + 2y_2 + y_3 & \geq 90 \\ & y_1, y_2, y_2 & \geq 0, \end{array}$$

Considerando la solución primal óptima $(x_1^*, x_2^*) = (20, 60)$, con THC podemos determinar que

$$\begin{array}{rl} y_1(x_1 + 3x_2 - 200) &= 0 \\ y_2(4x_1 + 2x_2 - 300) &= 0 \\ y_3(x_1 + x_2 - 80) &= 0 \\ x_1(y_1 + 4y_2 + y_3 - 80) &= 0 \\ x_2(3y_1 + 2y_2 + y_3 - 90) &= 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rl} 0 &= 0 \\ y_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 &= 80 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 &= 90, \end{array}$$

de donde sale que $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (5, 0, 75)$.

Por otra parte, necesitamos hacer un poco de sensibilidad para determinar cuánto puede aumentar cada lado derecho de restricción:

R1)

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 200 + \delta_1 \\ 300 \\ 80 \end{pmatrix} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -100 \leq \delta_1 \leq 40$$

R2)

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 300+\delta_2 \\ 80 \end{pmatrix} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -100 \leq \delta_2$$

R3)

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 80+\delta_3 \end{pmatrix} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -40/3 \leq \delta_3 \leq 20$$

Con toda esta información, se puede construir la siguiente tabla para determinar qué recurso aumentar. La segunda columna muestra el máximo δ para cada restricción:

Rest	$\vec{\delta}_{\max}$	$\vec{y^*}$	Costo	Ganancia neta
R1)	40	\$5	\$2	$(5-2)\cdot 40 = \$120$
R2)	∞	\$0	\$10	$(0-10)\cdot\infty = \$-\infty$
R3)	20	\$75	\$70	$(75-70)\cdot 20 = \$100$

Así, la anciana pareja recibirá 40 metros de lana adicionales, generando una ganancia neta de \$120 a su valor óptimo.

(ii) **(2 puntos)** Considere ahora que la anciana pareja desea producir camisetas de lana, que consume 20 metros de lana, 1 metro cuadrado de género y 1 metro de hilo oriental, y que genera ganancias de \$125. Explíquele, teniendo en cuenta lo expuesto en (i) y utilizando conceptos de dualidad, por qué en el óptimo las camisetas de lana no serán vendidas.

Solución: Si la anciana pareja vende unidades de camisetas de lana, requieren de 20 metros de lana, 1 metro cuadrado de género y 1 metro de hilo oriental, por lo tanto el costo de una unidad de camiseta de lana es $20 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 75 = \$175$. Sin embargo la ganancia es de sólo de \$125 por unidad. Luego, la anciana pareja no se beneficia de producir camisetas.

(b) **(6 puntos)** Considere el siguiente problema de programación lineal entera:

$$\begin{array}{rll} \text{Max} & 4x_1 + 7x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 + 5x_2 & \leq 12 \\ & x_1 - x_2 & \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0, & \text{enteros} \end{array}$$

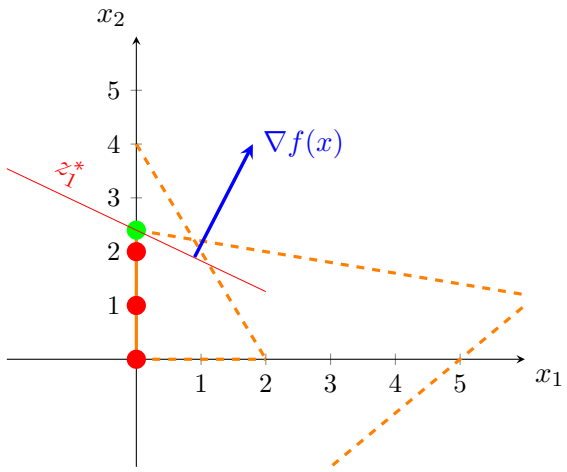
Al resolver la relajación lineal de este problema se obtiene que $x_1 \cong 0,89$ y que $x_2 \cong 2,2$; además la función objetivo vale $z_0 \cong 19,1$.

Resuelva dos nuevos subproblemas mediante Branch & Bound e indique cuánto valor de la función objetivo se podría estar sacrificando por detenerse luego de resolver estos dos subproblemas. Para ello utilice como regla de trabajo que: (1) su prioridad para ramificar es x_1 por sobre x_2 (2), que resolverá siempre el subproblema bajo la condición de cota superior (que acota por arriba a la variable ramificada), y (3) que su construcción del árbol es siempre en profundidad.

Solución: Dadas las reglas se debe agregar la restricción $x_1 \leq 0$, obteniendo el siguiente subproblema $P1$):

$$\begin{array}{rll} \text{Max} & 4x_1 + 7x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 + 5x_2 & \leq 12 \\ & x_1 - x_2 & \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & x_1 & \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0, & \end{array}$$

Al resolver mediante método gráfico, obtenemos lo siguiente:

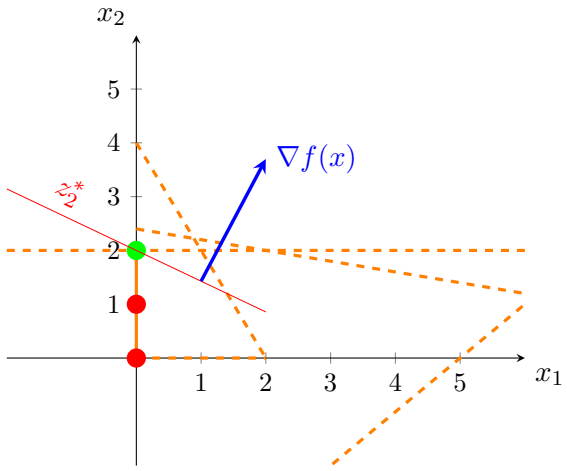


Por lo que la solución óptima de este subproblema es $x_1^* = 0$ y $x_2^* = 2{,}4$, obteniendo como valor de la función objetivo $z_1^* = 16{,}8$.

Ahora, siguiendo la regla mencionada construimos el subproblema $P2$), agregando la restricción $x_2 \leq 2$ a $P1$), lo cual queda:

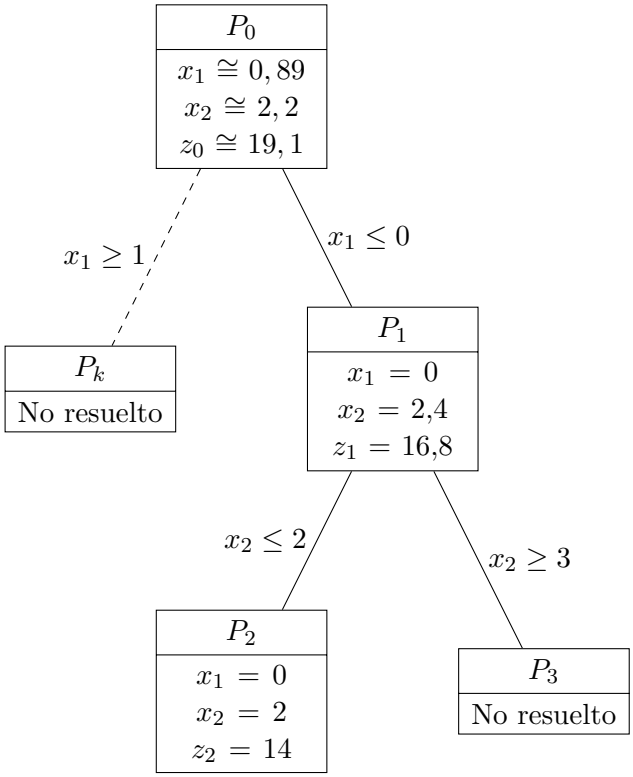
$$\begin{array}{lll} \text{Max} & 4x_1 + 7x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 + 5x_2 & \leq 12 \\ & x_1 - x_2 & \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & x_1 & \leq 0 \\ & x_2 & \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0, & \end{array}$$

Al resolver mediante método gráfico, obtenemos lo siguiente:



Con lo que la solución óptima de este subproblema es ($x_1^* = 0$ y $x_2^* = 2$, obteniendo como valor de la función objetivo $z_2^* = 14$, quedando como incumbente.

A modo de resumen, el árbol parcial luego de los dos subproblemas realizados queda:



Con la información anterior, se puede determinar que se podría estar sacrificando hasta 19,1 - 14 = 5,1 unidades de la función objetivo.

Pregunta 4 (18 puntos)

Comenzando con el espíritu mundialero que llegará en un par de meses, considere que para un torneo de fútbol de barrio –organizado por la asociación vecinal– se han inscrito diversos equipos, que han inscrito un conjunto I, conociéndose el ranking (puntaje) de cada uno de estos equipos (información contenida en el parámetro r_i, que contiene puntos del equipo i). Para la conformación de este torneo se ha definido que no habrán más de $K2$ grupos ni menos de $K1$ (con $K1 < K2$), que cada uno de los equipos integrará solamente un grupo, que los grupos estarán integrados por a lo menos 2 y a lo más N equipos, y que la diferencia de ranking entre los equipos de un mismo grupo no puede ser de más de Ω puntos.

También se requiere construir el calendario de partidos de este torneo. Las reglas de la asociación vecinal indican que: el torneo debe jugarse en días corridos (o sea, sin días sin algún partido en medio del calendario de partidos); que debe terminar lo antes posible (considerando que todo comienza el día 1); que todos los equipos de un mismo grupo deben jugar exactamente un partido entre ellos; y que un equipo puede jugar a lo más un partido al día.

Considerando la información anterior, construya un modelo de programación entera que permita confeccionar el calendario de partidos de este torneo, considerando que existe infraestructura suficiente para jugar diariamente todos los partidos que se requiera.

Solución: Esta toda la información en el enunciado para modelar lo solicitado, solamente falta que de los datos se considere el siguiente parámetro:

- $\diamond$ $[T :]$ cantidad de dias a considerar para la programación de los partidos. Para esto, basta con ver que el grupo con más equipos puede tener a lo más N, por lo que la cantidad de partidos

posible en un grupo con esa cantidad de equipos es $\begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{N(N-1)}{2}$ que definimos con T.

VARIABLES:

$$x_{ig}: \begin{cases} 1, \text{ si el equipo } i \in I \text{ es asignado al grupo } g = 1, \ldots, K2. \\ 0, \text{ e.o.c} \end{cases}$$

$$y_{ij}^t: \begin{cases} 1, \text{ si el equipo } i \in I \text{ juega contra el equipo } j \in I. \text{ el día } t = 1, \ldots, T \\ 0, \text{ e.o.c} \end{cases}$$

$$\alpha_g: \begin{cases} 1, \text{ si el grupo } g = 1, \ldots, K2 \text{ existe (contiene al menos 2 equipos).} \\ 0, \text{ e.o.c} \end{cases}$$

$$\beta^t: \begin{cases} 1, \text{ si durante el día } t = 1, \ldots, T \text{ se disputa algún partido.} \\ 0, \text{ e.o.c} \end{cases}$$

FUNCIÓN OBJETIVO: MINIMIZAR LA CANTIDAD TOTAL DE DÍAS EN QUE SE JUEGA

$$\min \sum_{t=1}^{T} \beta^t$$

RESTRICCIONES:

R1) Cada equipo es asignado exactamente a un grupo.

$$\sum_{g=1}^{K2} x_{ig} = 1 \quad \forall i \in I.$$

R2) Cada grupo "creado"tiene una cantidad mínima y máxima de equipos que lo integran.

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leq N\alpha_g \quad \forall g = 1, \ldots, K2.$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq 2\alpha_g \quad \forall g = 1, \ldots, K2.$$

R3) No deben crearse menos de $K1$ grupos.

$$\sum_{g=1}^{K} 2\alpha_g \geq K1$$

R4) Se debe respetar la condición de ranking en la conformación de los grupos.

$$(r_i - r_j) \leq \Omega + M\,(2 - x_{ig} - x_{jg}) \quad \forall i, j \in I : i \neq j; g = 1, \ldots, K2.$$

con $M \ggg 0$.

R5) Garantizar que los días de partidos son consecutivos.

$$\beta^t \leq \beta^{t-1} \quad \forall t = 2, \ldots, T.$$

R6) Un equipo juega con otro a lo más una vez, sin importar quien es primero (local) y segundo (visita).

$$\left(\sum_{t=1}^{T} y_{ij}^t\right) + \left(\sum_{t=1}^{T} y_{ji}^t\right) \leq 1 \quad \forall i, j \in I : i \neq j.$$

R7) Relacionar variable β^t con variables y_{ij}^t.

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I: j \neq i} y_{ij}^t \leq M\beta^t \quad \forall i, j \in I : i \neq j.$$

con $M \ggg 0$.

R8) Primera relación de variable y_{ij}^t con variables x_{ig}: que si dos equipos no pertenecen al mismo grupo entonces no debe programarse su partido (en ningún día).

$$\sum_{t=1}^{t} \left(2y_{ij}^t + 2y_{ji}^t\right) \leq x_{ig} + x_{jg} \quad \forall i, j \in I : i \neq j; g = 1, \ldots, K2.$$

R9) Segunda relación de variable y_{ij}^t con variables x_{ig}: que si dos equipos pertenecen al mismo grupo entonces debe programarse su partido (en un único solo día).

$$\sum_{t=1}^{t} \left(y_{ij}^t + y_{ji}^t\right) \geq x_{ig} + x_{jg} - 1 \quad \forall i, j \in I : i \neq j; g = 1, \ldots, K2.$$

R10) Naturaleza variables.

$$\begin{array}{rll} x_{ig} & \in \{0,1\} & \forall i \in I; g = 1, \ldots, K2. \\ y_{ij}^t & \in \{0,1\} & \forall i, j \in I : i \neq j; t = 1, \ldots, T. \\ \alpha_g & \in \{0,1\} & \forall g = 1, \ldots, K2. \\ \beta^t & \in \{0,1\} & \forall t = 1, \ldots, T. \end{array}$$