PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 01-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palominos
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Pauta Interrogación 2

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***
Como puede notar, la interrogación cuenta con 65 puntos. Bastan 60 puntos para obtener una nota igual a 7.0 en la interrogación.

Pregunta 1 (16 puntos)

(a) **(8 puntos)** Responda, siempre justificando claramente su respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) **(2 puntos)** Si $f : D \to R$ es una función cóncava definida sobre un dominio convexo $D \subset \mathbb{R}^n$, entonces el problema Max $f(x)$ s.a. $x \in D$ no puede ser un problema convexo.
Solución: Falso, este problema es convexo ya que cumple con las condiciones de convexidad.

(ii) **(2 puntos)** En un problema con múltiples soluciones óptimas, al menos dos de ellas siempre corresponden a vértices del dominio.
Solución: Esta afirmación es falsa, ya que puede ocurrir que sólo una de ellas corresponda a un vértice del dominio. Esto puede ocurrir, por ejemplo, cuando un problema tiene un dominio no acotado y las soluciones múltiples se dan en una de las aristas no acotada.

(iii) **(2 puntos)** El punto x^* es máximo global estricto si x^* es punto factible y si $f(x^*) > f(x)\,,\ \forall x \in D : x \neq x^*$.
Solución: Verdadero. Efectivamente, para que un punto del espacio de soluciones factibles sea óptimo exclusivo, se debe garantizar que el valor que alcanza la función objetivo en este punto es estrictamente mejor que el que alcanza cualquier otro punto del espacio de soluciones factibles, excluyendo ese punto.

(iv) **(2 puntos)** En un problema de minimización, al seleccionar la variable que entra a la base siempre se debe escoger la que tenga el menor costo reducido para garantizar la convergencia al óptimo (si existe) en el menor número de iteraciones.
Solución: No necesariamente debe ser la que tiene menor costo reducido, lo único que debe cumplirse es que la variable que se toma debe tener un costo reducido menor o igual a cero.

(b) **(4 puntos)** Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$. Se sabe que uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

$$(1) \quad Aw \leq 0,\ c^T w > 0$$
$$(2) \quad A^T q = c,\ q \geq 0$$

Considere el poliedro $P = \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y \leq c\}$, y el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{rll} \min & c^T x & \\ & Ax & = 0 \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

Pruebe que P es no vacío si y sólo si el mínimo del problema lineal descrito es cero.

Solución: Supongamos que P es no vacío, y entonces, que $\exists\, y \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T y \leq c$. Agregando una variable de holgura $h \geq 0$ y escribiendo $y = u - v$ con $u, v \leq 0$ se tiene:

$$A^T u - A^T v + h = c$$

Definamos ahora: $N^T = \begin{pmatrix} A^T & -A^T & I \end{pmatrix}$ y $q = (u, v, h)$, y se tiene que $N^T q = c$ con $q \geq 0$, lo que es equivalente a la ecuación (2) entregada en el enunciado. Luego, la ecuación (1) del sistema no se puede cumplir, esto entonces es que $\nexists\, w \in \mathbb{R}^n$ tal que $Nw \leq 0$ y $c^T w > 0$. Si definimos $w = -x$ entonces se tiene que $Nx \geq 0$ y $c^T x < 0$, y si $x = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces tenemos $\nexists\, w \in \mathbb{R}^n$ tal que $A^T x \geq 0$ y $c^T x < 0$. Sin embargo, el problema lineal presentado tiene solución factible cuando $x = 0$, luego, $A^T x \geq 0$ tiene solución, entonces se debe tener que $c^T x \geq 0$, con lo que se concluye que cuando $x = 0$ se alcanza el mínimo del problema lineal, que es 0.

Ahora, supongamos que el problema lineal planteado tiene su mínimo en 0. Entonces, no puede existir $x \geq 0$ tal que $Ax = 0$ y $c^T x < 0$ (pues el mínimo es 0 y no ¡0). Entonces no se cumple (1), y por lo tanto se cumple (2), lo que implica que $\exists\, q \geq 0 : A^T q = c$. Por lo tanto, $P = \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y \leq c\}$ es factible pues basta definir $y = q$.

(c) **(4 puntos)** Suponga que se ha resuelto un problema de programación lineal, siendo su solución óptima única. Explique cómo se puede obtener, a partir de la solución óptima, la solución básica factible con valor de la función objetivo más próxima al valor óptimo de ella.

Solución: Para esto, supongamos que x_j es una variable no básica en la solución óptima. Se sabe que si x_j ingresara a la base deberá tomar el valor que le entrega el criterio de salida:

$$\text{Min}\left\{\frac{\bar{b}_i^*}{\bar{a}_{ij}^*} : \bar{a}_{ij}^* > 0\right\}_{i \in \text{Var.Básicas}} = \frac{\bar{b}_p^*}{\bar{a}_{pj}^*}$$

luego, si x_j entra sale x_p (la variable que minimiza la expresión anterior de entre las variables básicas). Este cambio, hace que la función objetivo empeore –en este caso aumente su valor– en:

$$\bar{c}_j^* \cdot \frac{\bar{b}_p^*}{\bar{a}_{pj}^*}$$

Ahora, se tiene replicar este procedimiento para toda variable no básica, y la que tenga un menor resultado en el aumento del valor de la función objetivo, obteniendo entonces la solución básica factible con valor de la función objetivo más próxima al valor óptimo.

Pregunta 2 (14 puntos)

(a) **(6 puntos)** Sea C un conjunto finito de índices, $\{a^i\}_{i \in C} \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto de vectores (y entonces, cada a^i es un vector), B una matriz de $m \times n$, $c \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$. Considere el problema lineal que llamaremos P_C:

$$
\begin{array}{rcll}
z_C & = & \max & by + \sum_{i \in C} c_i x_i \\
& & \text{s.a:} & By + \sum_{i \in C} a^i x_i = d \\
& & & \sum_{i \in C} x_i \leq k \\
& & & x_i \leq 1 \qquad \forall i \in C \\
& & & x, y \geq 0
\end{array}
$$

Si el conjunto C es muy grande, consideramos la posibilidad de aproximar el valor z_C por $z_{C'}$ con $C' \subset C$.

(i) **(2 puntos)** Utilice el teorema de existencia de soluciones de Bolzano-Weierstrass para justificar si P_C admite solución óptima.
Solución: El teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que debemos encontrar un problema con función objetivo continua, espacio compacto (cerrado y acotado) y no vacío para garantizar que tiene solución óptima. En este caso, es fácil verificar que no se puede comprobar que el espacio sea cerrado. Las variables x lo son, pues están acotadas por 0 por abajo y por 1 por arriba, pero las variables y no están acotadas. Del primer grupo de restricciones, se puede observar que basta con que la matriz B sea una matriz de ceros para que y no está acotada por arriba.

(ii) **(4 puntos)** Pruebe que si (x^*, y^*) es factible para $P_{C'}$, entonces la solución: $y = y^*$, $x_i = x_i^*$ si $i \in C'$, $x_i = 0$ si $i \notin C'$, es factible para P_C. Deduzca que $z_{C'} \leq z_C$.
Nota: debe considerar la posibilidad que P_C y/o $P_{C'}$ sean infactibles.
Solución: Sea (x^*, y^*) un punto factible para $P_{C'}$, y sea (x, y) tal que $y = y^*$, $x_i = x_i^*$ si $i \in C'$, $x_i = 0$ si $i \notin C'$. Se puede ver que si (x^*, y^*) es un punto factible para $P_{C'}$, entonces $x^*, y^* \geq 0$ y con esto (dada la definición que acabamos de hacer para (x, y)), $x, y \geq 0$ y que $x_i = 0$ o $x_i = x_i^* \leq 1$ (pues x^* es factible para $P_{C'}$, y ahí se tiene la restricción que dice que $x_i^* \leq 1$).
Ahora,

$$By + \sum_{i \in C} a^i x_i = By + \sum_{i \in C'} a^i x_i^* = d$$

esto pues (x^*, y^*) es factible para $P_{C'}$, luego cumple la restricción $By + \sum_{i \in C'} a^i x_i^* = d$, y por la definición de (x, y), sabemos que $By + \sum_{i \in C} a^i x_i = By + \sum_{i \in C'} a^i x_i^*$.
Por último,

$$\sum_{i \in C'} x_i^* \leq k \Leftrightarrow \sum_{i \in C' \setminus C} 0 + \sum_{i \in C} x_i = \sum_{i \in C} x_i \leq k$$

Por lo tanto, se probó que el punto (x, y) cumple con las tres restricciones de P_C, luego es factible para P_C.
Ahora bien, llamemos A al poliedro descrito por el espacio de soluciones factibles de $P_{C'}$, entonces resolver $P_{C'}$ es equivalente a resolver P_C en el poliedro:

$$P = A \cap \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{|C|} \times \mathbb{R}^n : x_i = 0 \, \forall i \in C \setminus C' \right\}$$

Como $P \subseteq A$, entonces si $P_{C'}$ es factible se tiene que cumplir que $z_{C'} \leq z_C$ (porque el problema es de maximización).
Chequeando ahora que pasa cuando alguno de los problemas es infactible, se tiene que si P_C es infactible, entonces $P_{C'}$ es infactible pues está contenido su espacio en el espacio de P_C, así, $z_{C'} = z_C = -\infty \Rightarrow z_{C'} \leq z_C$. Ahora, si $P_{C'}$ es infactible entonces $z_{C'} = -\infty$ y por lo tanto es claro que se cumplirá que $z_{C'} \leq z_C$.

(b) **(8 puntos)** PetrolCargo es una empresa que transporta enormes cantidades de petróleo en buques de carga entre los cinco continentes. Recientemente adquirió un contrato con dos empresas petroleras que desean utilizar de forma exclusiva sus servicios en el próximo buque que zarpe. La empresa PetrolA podrá transportar petróleo ligero y/o petróleo pesado, pagando por ello 3 mil dólares y 2 mil dólares por cada mil litros transportados de cada tipo respectivamente. A su vez que la empresa PetrolB pagará 5 mil dólares por cada mil litros de petróleo mediano transportados en el buque.

El buque de carga tiene una capacidad máxima de 25.000 toneladas, a repartir entre las empresas. Para ello, estima que las densidades de los petróleos son de 4 tons/1.000 litros, 8 tons/1.000 litros y 5 tons/1.000 litros para los petróleos liviano, pesado y mediano respectivamente. Y, por otro lado, el contrato definido entre PetrolCargo y PetrolA indica que el buque de carga debe transportar como mínimo 2 millones de litros de petróleo en total para esta empresa.

(i) **(2 puntos)** Construya un modelo de programación lineal que le permita a PetrolCargo determinar cómo cargar el buque de modo que maximice sus ingresos. Además, construya la forma estándar asociada a este problema.

Solución: Definiendo x_1 y x_2 como la cantidad de miles de litros que se cargarán de petróleo ligero y de petróleo pesado respectivamente, y x_3 como la cantidad de miles de litros que se cargarán de petróleo mediano, el modelo de optimización asociado al problema es el que sigue:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a.} \quad & 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 25.000 \\ & x_1 + x_2 \geq 2.000 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Así, la forma estándar queda:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\ \text{s.a.} \quad & 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 = 25.000 \\ & x_1 + x_2 - x_5 = 2.000 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

(ii) **(4 puntos)** Considere que PetrolCargo consideraba **llenar** el buque con 2 millones de litros de petróleo pesado para PetrolA y 1,8 millones de litros de petróleo mediano para PetrolB. Indique si esa idea es la que le genera más ingresos a PetrolCargo (utilizando sus conocimientos del algoritmo de Simplex matricial) y, en caso de no serla, ayúdele a encontrarla mediante Simplex matricial e indique los ingresos óptimos.

Solución: Dado que $x_2 = 2.000$ y $x_3 = 1.800$ son las variables positivas, y se requieren dos variables básicas, tenemos que esas son las variables básicas. $x_1 = x_4 = x_5 = 0$. Así,

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Así, evaluando la optimalidad de esa solución, llegamos a que

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \not\geq \vec{0},$$

por lo que no es óptima. Luego, es necesario cambiar de base y, para ello, ingresamos x_1 a la base. Para determinar cuál sale:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2.000 \\ 1.800 \end{pmatrix} \qquad \bar{R} = B^{-1}R = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ \mathbf{-4/5} & 1/5 & 8/5 \end{bmatrix}$$

$$\text{mín}\left\{\frac{2000}{1},\ \cdot\right\}$$

Así, la variable que sale de la base es x_2. Luego, es necesario otra evaluación de optimalidad para la base que considera a x_1 y x_3 como variables básicas.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Así, evaluando la optimalidad de esa solución, llegamos a que

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \geq \vec{0},$$

que indica que la distribución es óptima. Luego, dado que

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2.000 \\ 3.400 \end{pmatrix},$$

tenemos que el buque debe cargarse con 2 millones de litros de petróleo liviano para PetrolA y con 3,4 millones de litros de petróleo mediano para PetrolB. Esto genera una ganancia de 23 millones de dólares para PetrolCargo.

(iii) **(1 puntos)** La forma de cargar un buque que Ud. determinó en (b), ¿es la única forma de hacerlo óptimamente? Justifique.

Solución: Sí, es la única forma de cargar el buque de forma óptima. Esto se puede reconocer dado que,

$$\bar{c}_R > \vec{0}$$

para todas las variables no básicas.

(iv) **(1 puntos)** Para que los encargados puedan respaldar su sugerencia ante sus gerentes de forma técnica, preséntele el formato canónico óptimo del problema.

Solución: Dado que

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4/5 & 1/5 & 4/5 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2.000 \\ 3.400 \end{pmatrix} \qquad z = c_B\bar{b} = -23.000$$

la forma canónica óptima será

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \bar{c}_R^T x_R + c_B^T\bar{b} \\ \text{s.a.} & x_B + \bar{R}x_R = \bar{b} \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & -23.000 + 5x_2 + x_4 + x_5 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 - x_5 = 2.000 \\ & \frac{-4}{5}x_2 + x_3 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5 = 3.400 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Pregunta 3 (17 puntos)

Usted ha sido contratado como traductor *Part-Time* en FlixNet, de Inglés y Japonés al Español. En su primer mes debe traducir a lo menos mil frases o perderá su contrato. Por otra parte a usted le toma un minuto traducir una frase del Inglés, pero dos minutos del Japonés. Además usted desea dedicarle a esta actividad no más de diez horas a la semana, para poder rendir adecuadamente con sus responsabilidades académicas (*Hint*: eso implicaría 2.400 minutos al mes).

Finalmente, le van a pagar cien pesos por frase en Inglés y trescientos pesos por frase en Japonés que traduzca. Asuma que se pueden traducir fracciones de frases.

(a) **(2 puntos)** Escriba el modelo de optimización lineal que permite resolver su dilema, y luego construya la forma estándar de ese modelo.

Solución: El modelo de optimización lineal es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 100x_I + 300x_J \\ \text{s.a.} \quad & x_I + 2x_J \leq 2.400 \\ & x_I + x_J \geq 1.000 \\ & x_I, x_J \geq 0 \end{aligned}$$

Donde x_I representa la cantidad de frases en Inglés a traducir y x_J representa la cantidad de frases en Japonés a traducir.

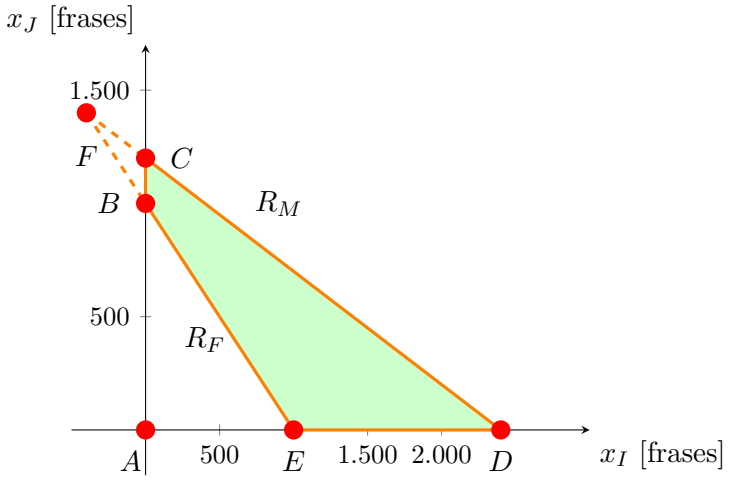
Por otra parte, el modelo en su forma estándar es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -100x_I - 300x_J \\ \text{s.a.} \quad & x_I + 2x_J + x_M = 2.400 \\ & x_I + x_J - x_F = 1.000 \\ & x_I, x_J, x_M, x_F \geq 0 \end{aligned}$$

Donde x_M representa la variable de holgura de la restricción del tope de minutos y x_F la variable de holgura asociada a la restricción del mínimo de frases a realizar.

(b) **(3 puntos)** Resuelva el problema en forma estándar mediante el método gráfico, donde debe indicar cuáles son todas las soluciones básicas posibles, si son factibles o no, las variables que forman la base y el valor de todas las variables de decisión. Respalde la elección del óptimo dibujando las curvas de nivel asociadas a la función objetivo y declare explícitamente cuál es el punto óptimo (no solamente en el gráfico).

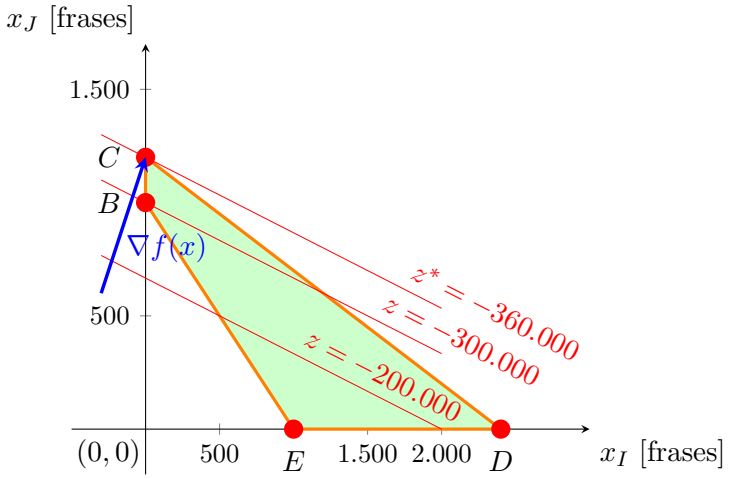
Solución: Al graficar, vemos las siguientes 6 soluciones básicas (que no todas son puntos esquina):



Luego, podemos resumir la información solicitada en la siguiente tabla:

Puntos	x_I	x_J	x_M	x_F	Factible	Básicas
A	0	0	2.400	1.000	No	M y F
B	0	1.000	400	0	Si	J y M
C	0	1.200	0	200	Si	J y F
D	2.400	0	0	400	Si	I y F
E	1.000	0	1.400	0	Si	I y M
F	-400	1.400	0	0	No	I y J

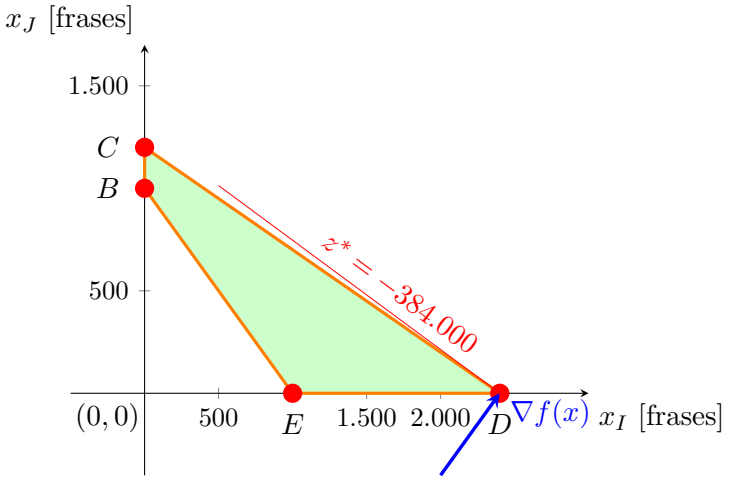
Luego al graficar las curvas de nivel asociadas a la función objetivo, podemos apreciar que el óptimo se encuentra en el punto C.



(c) **(2 puntos)** Desde FlixNet le indicaron que en su segundo mes, el valor a pagar por frase traducida del Inglés va a cambiar. ¿En qué rango de pagos usted cambiaría su estructura de decisión? Debe respaldar gráficamente su respuesta.

Solución: Para que cambie su estructura de decisión, debería por lo menos igualar la pendiente de alguna de las restricciones activas. Para igualar la pendiente asociada a la naturaleza de la variable x_I, debería hacer cero el valor a pagar por x_J, lo cual no es factible en el contexto del problema. Por lo tanto, tratamos de igualar la pendiente de la restricción asociada al tope de minutos. Dado que en esta restricción el coeficiente asociado a x_I es la mitad que del asociado a x_J, entonces cuando el valor pagado por frase en Inglés es mayor a 150, cambia nuestra estructura de decisión.

Por ejemplo si es 160, vemos en el siguiente gráfico que el nuevo óptimo sería el punto D.



(d) **(8 puntos)** Una decisión posible es traducir mil frases del Inglés. A partir de esta solución, utilice el criterio de optimalidad del algoritmo Simplex matricial para determinar si esta solución es óptima o no. En caso que la solución no sea óptima, utilice los criterios del algoritmo Simplex matricial para determinar qué variable de decisión entra a la base, cuál sale de la base y el punto al que nos movimos. Sea claro en todos sus pasos.

Solución: Dado que nos están dando el punto E, quiere decir que la base está formada por x_I y x_M, por lo que:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Además:

$$c_B = \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_R = \begin{bmatrix} -300 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2.400 \\ 1.000 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Así, evaluando la optimalidad de esa solución, llegamos a que:

$$\pi^T = {c_B}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -100 \end{bmatrix}$$
$$\bar{c}_R^T = {c_R}^T - \pi^T R = \begin{bmatrix} -300 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\bar{c}_R^T = \begin{bmatrix} -200 & -100 \end{bmatrix} \ngeq \vec{0}, \text{ por lo que no es óptima.}$$

Luego, es necesario cambiar de base y, para ello, ingresamos x_J a la base. Para determinar cuál sale:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.400 \end{pmatrix} \qquad \bar{R} = B^{-1}R = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{mín} \left\{ \frac{1.000}{1}, \frac{1.400}{1} \right\}$$

Así, la variable que sale de la base es x_I. Por lo que nos trasladamos al punto B.

(e) **(2 puntos)** Escriba el problema artificial de Fase I con el menor número de variables artificiales posibles.

Solución: Luego el problema artificial de Fase I con menos variables artificiales es el siguiente:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{mín} & y & & \\
\text{s.a.} & x_I + 2x_J \quad + x_M & & = 2.400 \\
& x_I + x_J \qquad\quad - x_F \quad + y & & = 1.000 \\
& x_I, x_J, x_M, x_F, y \quad \geq 0 & &
\end{array}
$$

Donde y es la única variable artificial requerida.

Pregunta 4 (18 puntos)

En el restaurante "El Ciervito", su dueño Jaimito tiene la difícil decisión de planificar el menú a ofrecer para los próximos T días. Para ello, Jaimito debe escoger para cada una de sus categorías dos alternativas entre las J diferentes opciones existentes en cada categoría. Considere que existen C categorías a considerar (para que tenga una idea, algunas categorías son: entrada, plato de fondo, postre).

A su vez, la preparación de cada plato conlleva a la utilización de insumos básicos descritos en el parámetro a_{ij}, que indica la cantidad de insumo i que consume la preparación de un plato j. Para abastecerse, Jaimito realiza sus compras de insumos mediante un sistema de despacho, el cual se entrega en cajas de K_i unidades del insumo i a un precio c_i por caja. Como son productos de origen animal y vegetal, estos poseen fechas de vencimiento establecidas, las cuales siempre corresponden a TE_i días posteriores a la compra del producto i (asuma que los productos son entregados en el mismo período que se realizó la compra). Adicionalmente, una vez que un insumo ha superado su fecha de expiración, estos no pueden ser utilizados en la preparación de alimentos.

Jaimito conoce el menú que prepararán en el restaurante rival "La Hiena" para cada uno de los siguientes T días. Para ello construyó el parámetro PR_{tj}, el cuál indica con valor 1 si en el día t el restaurante rival preparará el plato j y 0 en caso contrario (considere que los platos que pueden realizar ambos restaurantes son los mismos y son idénticos en todo sentido). Para tener éxito, Jaimito sabe que en cada día debe al menos tener un plato en común en al menos dos categorías diferentes con el restaurante rival. A su vez, se conoce que el plato j tendrá una demanda máxima de d_{jt} unidades en el día t, y que lo puede vender a un precio de PV_j. En aquellos días en que el plato preparado en "El Ciervito" coincida con un plato ofrecido en el restaurante rival, Jaimito deberá venderlo a mitad de precio (considere este descuento como descuento *plato rival*).

Por último Jaimito sabe que si ofrece más de dos días de manera consecutiva en su restaurante un mismo plato, éste debe ser vendido con un descuento del DR_j pesos en su precio final (aplica posterior al descuento *plato rival*).

Plantee un modelo de optimización lineal, con variables continuas y/o enteras, que le permita al restaurante "El Ciervito" maximizar sus utilidades en el horizonte de los próximos T días.

Solución:

Índices:

- ◇ i: insumos
- ◇ t: días
- ◇ j: preparación
- ◇ w: dias para expiración
- ◇ c: categorías platos

Variables:

Y_{it}: Cantidad de cajas del insumo i comprados en el día t.

Z_{jt}: Variable binaria que indica con valor 1 si se ofrece el plato j en el día t.

X_{tiwj}: Variable entera que indica la cantidad utilizada del insumo i, que tiene w dias para expirar, para la preparación de un plato j durante el día t.

W_{jt}: Variable entera que indica la cantidad de platos j preparados en el día t.

I_{iwt}: Variable entera que indica la cantidad de insumos i con w dias de días para expirar al término del día t.

U_{jt}: Variable binaria que indica con valor 1 si en el día $t-1$ y t se preparó el plato j, 0 en caso contrario.

V_{jt}: Variable entera que indica la cantidad de platos j preparados en el día t, cuando en el día $t-1$ también se ofreció el mismo plato j en el menú.

α_{tc}: Variable binaria que indica con valor 1 si en el día t tenemos al menos 1 plato en común para la categoría c con el restaurante rival, 0 en otro caso.

Parámetros:

PV_j: Precio de venta del plato j en el día t.

PD_{jt}: Valor de descuento en el precio del plato j en el día t debido a competencia.

c_i: Costo de adquisición de una caja del insumo i.

K_i: Cantidad de unidades de insumo i en cada caja comprada.

DR_j: Valor de descuento en el precio del plato j producto de repetir el plato de un día para otro.

a_{ij}: Cantidad de insumo i necesario para la preparación de 1 plato j.

PR_{jt}: Valor 1 cuando el restaurante rival ofrece el plato j en el día t, 0 en otro caso.

PC_{jc}: Valor 1 cuando el plato j pertenece a la categoría c, 0 en otro caso. Se construye de manera directa con la información entregada en la interrogación.

TE_i: Cantidad de días iniciales de expiración del insumo i.

Función objetivo:

$$\text{Max} \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{C \cdot J} (PV_j - PD_{jt}) W_{jt} - \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{I} c_i Y_{it} - \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{C \cdot J} DR_j V_{jt}$$

Restricciones

R1) Cantidad de platos j preparados en el día t deben corresponderse al uso de insumos.

$$W_{jt} \leq \sum_{w=1}^{TE_i} \frac{X_{tiwj}}{a_{ij}} \qquad \forall j = 1, \ldots, C \cdot J; t = 1, \ldots, T; i = 1, \ldots, I.$$

R2) Restricciones de inventario de acuerdo a tiempos de perecibilidad restantes.

$$I_{iwt} = K_i Y_i - \sum_{j=1}^{C \cdot J} X_{tiwj} \qquad \forall i = 1, \ldots, I; t = 1, \ldots, T; w = TE_i.$$

$$I_{iwt} = I_{i(w+1)(t-1)} - \sum_{j=1}^{C \cdot J} X_{tiwj} \qquad \forall i = 1, \ldots, I; t = 1, \ldots, T; w = 2, \ldots, TE_i - 1.$$

$$I_{iwt} \geq I_{i(w+1)(t-1)} - \sum_{j=1}^{C \cdot J} X_{tiwj} \qquad \forall i = 1, \ldots, I; t = 1, \ldots, T; w = 1.$$

$$I_{iwt} = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, I; w = 1, \ldots, TE_i; t = 1.$$

R3) Restricción demanda.

$$W_{jt} \leq d_{jt} \qquad \forall j = 1, \ldots, C \cdot J; t = 1, \ldots, T.$$

R4) Activación platos.

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{w=1}^{TE_i} X_{tiwj} \leq M Z_{jt} \qquad \forall j = 1, \ldots, C \cdot J; t = 1, \ldots, T.$$

$$W_{jt} \leq M Z_{jt} \qquad \forall j = 1, \ldots, C \cdot J; t = 1, \ldots, T.$$

R5) Elección de platos por categoría.

$$\sum_{j=(c-1) \cdot J+1}^{c \cdot J} Z_{jt} = 2 \qquad \forall t = 1, \ldots, T; c = 1, \ldots, C.$$

R6) Platos en común restaurante rival por categoría.

$$\alpha_{tc} \leq \sum_{j=(c-1) \cdot J+1}^{c \cdot J} PR_{jt} Z_{jt} \qquad \forall t = 1, \ldots, T; c = 1, \ldots, C.$$

$$\sum_{c=1}^{C} \alpha_{tc} \geq 2 \qquad \forall t = 1, \ldots, T.$$

R7) Dias consecutivos platos

$$Z_{j(t-1)} + Z_{jt} \leq 1 + U_{jt} \qquad \forall j = 1, \ldots, C \cdot J; t = 1, \ldots, T : t \geq 1$$

$$W_{jt} \leq V_{jt} + M(1 - U_{jt}) \qquad \forall j = 1, \ldots, C \cdot J; t = 1, \ldots, T.$$

R8) Naturaleza variables

$$X_{tiwj}, W_{jt}, V_{jt}, Y_{it}, I_{iwt} \in Z_0^+$$

$$Z_{jt}, U_{jt} \in \{0, 1\}$$

$$\alpha_{tc} \in \{0, 1\}$$