PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2016
Profesores: G. Angulo - Á. Lorca - A. Cataldo
R. Cuadrado - S. Encina
J.T. Marquinez - F. Palominos

Solución Examen

Duración: 3 horas.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) (7 puntos) Considere los problemas

$$z_1 = \text{mín} \quad c^\top x \qquad\qquad z_2 = \text{mín} \quad c^\top x$$
$$\text{s.a} \quad A^1 x = b^1 \qquad\qquad \text{s.a} \quad A^1 x = b^1$$
$$A^2 x = b^2 \qquad\qquad A^2 x = b^2$$
$$x \in \mathbb{Z}^n_+, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^n_+,$$

$$z_3 = \text{mín} \quad c^\top x \qquad\qquad z_4 = \text{mín} \quad c^\top x$$
$$\text{s.a} \quad A^1 x = b^1 \qquad\qquad \text{s.a} \quad A^1 x = b^1$$
$$x \in S, \qquad\qquad x \in \text{conv}(S),$$

donde $S = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ : \ A^2 x = b^2\}$ y $\text{conv}(\cdot)$ es la envoltura convexa. Asumiendo que estos problemas tienen solución óptima, indique cómo se relacionan sus valores óptimos.

Solución: Notemos que $\{x \in \mathbb{Z}^n_+ : \ A^1 x = b^1, \ A^2 x = b^2\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ A^1 x = b^1, \ x \in S\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \ A^1 x = b^1, \ x \in \text{conv}(S)\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ A^1 x = b^1, \ A^2 x = b^2\}$. Luego, como los problemas son de minimización, tenemos $z_1 = z_3 \geq z_4 \geq z_2$.

(b) (8 puntos) Considere el problema

$$z^* = \text{mín}\{f(x) : \ g_i(x) \leq b, \ i = 1, \ldots, m\}.$$

Sea $\theta : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$\theta(\lambda) = \text{mín} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x) - b_i) : \ x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Asuma que todos los problemas anteriores tienen solución óptima.

(i) **(4 puntos)** Muestre que $\theta(\lambda) \leq z^*$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$.
Solución: Si x^* es solución óptima del primer problema, entonces $g_i(x^*) - b_i \leq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Por lo tanto, $f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x^*) - b_i) \leq f(x^*) = z^*$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, lo que implica $\theta(\lambda) \leq z^*$.

(ii) **(4 puntos)** Muestre que la función θ es cóncava.

Solución: Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^m_+$, sea $\pi = \alpha\lambda + (1-\alpha)\mu \in \mathbb{R}^m_+$, donde $0 \leq \alpha \leq 1$. Sean $x^*, y^*, z^* \in \mathbb{R}^n$ tales que $\theta(\lambda) = f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(g_i(x^*) - b_i)$, $\theta(\mu) = f(y^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i(g_i(y^*) - b_i)$ y $\theta(\pi) = f(z^*) + \sum_{i=1}^m \pi_i(g_i(z^*) - b_i)$. Tenemos

$$\theta(\pi) = \alpha f(z^*) + \sum_{i=1}^m \alpha\lambda_i(g_i(z^*) - b_i) + (1-\alpha)f(z^*) + \sum_{i=1}^m (1-\alpha)\mu_i(g_i(z^*) - b_i)$$

$$\geq \alpha \left[f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(g_i(x^*) - b_i) \right] + (1-\alpha) \left[f(y^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i(g_i(y^*) - b_i) \right] = \alpha\theta(\lambda) + (1-\alpha)\theta(\mu).$$

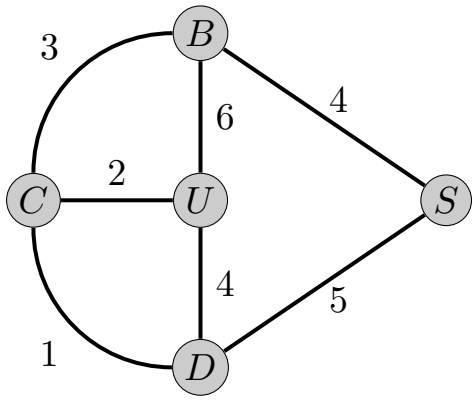
Pregunta 2 (15 puntos)

(a) (6 puntos) Apenas termine su semestre, usted quiere salir de Santiago literalmente lo antes posible. Para ello, en sus momentos de procastinación, ha decidido modelar el siguiente problema de ruta más corta, representando las principales intersecciones de Santiago.

$$\begin{array}{llrrrrrrrcll}
PRMC) & \text{mín} & \multicolumn{7}{l}{6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 + 4x_6 + 5x_7} & & & \\
& \text{s.a.} & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & & = & 1 & \text{(Punto Universidad)} \\
& & -x_1 & & & -x_4 & & +x_6 & & = & 0 & \text{(Punto B)} \\
& & & -x_2 & & +x_4 & +x_5 & & & = & 0 & \text{(Punto C)} \\
& & & & -x_3 & & -x_5 & & +x_7 & = & 0 & \text{(Punto D)} \\
& & & & & & & -x_6 & -x_7 & = & -1 & \text{(Salida de Santiago)} \\
& & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \in & \{0,1\} & \text{(N.V.).}
\end{array}$$

Utilice el algoritmo de Dijkstra para encontrar qué ruta utilizará apenas salga de su último exámen.

Solución: El grafo del problema se presenta a continuación, en el que queremos ir de U a S.



Ejecutando el algoritmo de Dijkstra, con (d_i, p_i):

Nodo - It.	0	1	2	3	4	5
U	$(0, U)$	•				
B	$(\infty, -)$	$(6, U)$	$(5, C)$	$(5, C)$	•	
C	$(\infty, -)$	$(2, U)$	•			
D	$(\infty, -)$	$(4, U)$	$(3, C)$	•		
S	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(8, D)$	$(8, D)$	•

Así, para salir de Santiago lo antes posible, hay que seguir la ruta $U - C - D - S$.

(b) (9 puntos) Un estudio operativo en su empresa le ha hecho llegar al siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{array}{rlll} P) & \text{máx} & 50x_1 + 20x_2 & \\ & \text{s.a.} & -3x_1 + 4x_2 & \leq 200 \\ & & 2x_1 - 2x_2 & \leq 140 \\ & & 2x_1 + 8x_2 & \leq 640 \\ & & 3x_1 + 3x_2 & \geq 90 \\ & & x_1 \ , \ x_2 & \geq 0. \end{array}$$

(i) **(2 puntos)** Evidentemente, a estas alturas, usted no tiene claridad sobre la existencia de solución del problema. Por lo mismo, se le pide demostrarla.

Solución: Para ello, utilicemos el Teorema de Bolzano-Weierstrass:

- ◇ La función objetivo es continua, pues es un polinomio lineal.
- ◇ El dominio es no vacío, pues el punto (30, 0), como ejemplo, pertenece al poliedro factible.
- ◇ El dominio es compacto, pues
  - es cerrado, ya que las restricciones son de la forma $\leq$ y $\geq$, y
  - es acotado, pues de las restricciones (3) y (N.V.) se tiene que $0 \leq x_1 \leq 320$ y $0 \leq x_2 \leq 80$.

Así, el Teorema de B-W nos asegura que el problema admite al menos una solución.

(ii) **(3 puntos)** Un trabajador de su empresa le comentó que desarrolló un solver para tratar este problema de forma rápida. Al ejecutarlo, llegó a que $(120, 50)$ es la solución óptima. Utilizando solamente conceptos de dualidad, demuestre que lo indicado por el solver es lo correcto.

Solución: Consideran el dual de P):

$$\begin{array}{rlll} D) & \text{mín} & 200y_1 + 140y_2 + 640y_3 + 90y_4 & \\ & \text{s.a.} & -3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 3y_4 & \geq 50 \\ & & 4y_1 - 2y_2 + 8y_3 + 3y_4 & \geq 20 \\ & & y_1 \ , \ y_2 \ , \ y_3 & \geq 0 \\ & & y_4 & \leq 0 \end{array}$$

Podemos utilizar la THC:

$$\begin{aligned} y_1(-3x_1 + 4x_2 - 200) &= 0 \\ y_2(2x_1 - 2x_2 - 140) &= 0 \\ y_3(2x_1 + 8x_2 - 640) &= 0 \\ y_4(3x_1 + 3x_2 - 90) &= 0 \\ x_1(-3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 3y_4 - 50) &= 0 \\ x_2(4y_1 - 2y_2 + 8y_3 + 3y_4 - 20) &= 0 \end{aligned}$$

Evaluando con $x^* = (120, 50)$, solución factible primal, llegamos que $y^* = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 18, 7, 0)$. Si se evalúa y^* en las restricciones duales, notamos que y^* es una solución

factible dual. Así, por el Teorema Fuerte de Dualidad, y^* y x^* son ambas óptimas en sus problemas. (Y, además, $z(x^*) = w(y^*) = 7000$). Por ende, el solver está en lo correcto y $(120, 50)$ es la solución óptima primal.

(iii) **(2 puntos)** Analice la optimalidad del problema dual según el algoritmo de Simplex, y corrobore nuevamente lo indicado por el solver.

Solución: Para ello, basta con identificar la base asociada a la solución óptima dual y revisar el criterio de optimalidad. Notar que, para lograr la forma estándar, se reemplaza $y_4 = -\tilde{y_4}$, y se agregan variables de exceso a las restricciones. Las variables básicas son y_2 e y_3, por lo que la base y su inversa quedan:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Así, el criterio de optimalidad queda:

$$\begin{aligned} \bar{c}_R^T &= \begin{pmatrix} 200 & -90 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 140 & 640 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 360 & 420 & 120 & 50 \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el criterio de optimalidad de Simplex indica que esta base dual es óptima.

Luego, dado que esta base es factible y óptima, y está asociada a una base factible primal, entonces, por colorario del Teorema Débil y Fuerte de Dualidad, debe ocurrir que la base otorgada por el solver es óptima en el primal.

(iv) **(2 puntos)** Finalmente, para estar más seguros aún, verifique el cumplimiento de las condiciones de KKT para el punto óptimo del problema primal P), ya sea gráfica o analíticamente.

Solución: Para hacerlo analíticamente, deben cumplirse tanto las condiciones de holgura complementaria $\mu_i(g_i(x) - b_i) = 0, \forall i = 1, \ldots, 6$, como la condición (para el problema estándar)

$$\begin{pmatrix} -50 \\ -20 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu_4 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así, dado que las restricciones 1, 4 y N.V. son restricciones inactivas en el $(120, 50)$, por las condiciones de holgura complementaria, se tiene que $\mu_1 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = 0$, lo que resulta en

$$\begin{pmatrix} -50 \\ -20 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

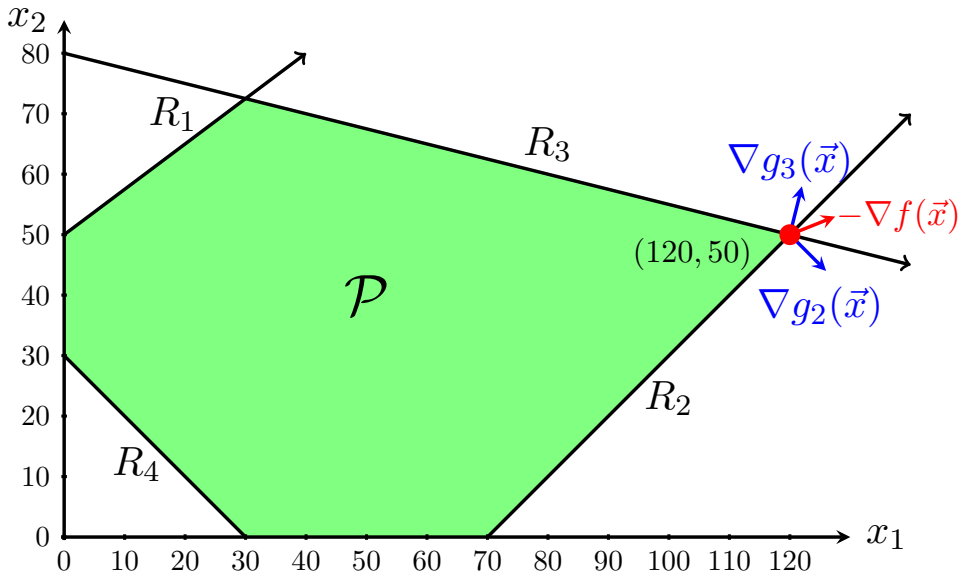
Así, se resuelve que $\mu_1 = 18$ y $\mu_4 = 7$. Dado que $\mu_i \geq 0, \forall i$, entonces se verifican las condiciones de KKT.

Para hacerlo gráficamente, considerando la función objetivo estándar, mín $f(x_1, x_2) = -50x_1 - 20x_2$ (paso no estrictamente necesario), y que las restricciones activas en el punto (120, 50) son la segunda y la tercera, es necesario calcular:

$$-\nabla f(x_1, x_2) = -\nabla f(120, 50) = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x_1, x_2) = \nabla g_2(120, 50) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_3(x_1, x_2) = \nabla g_3(120, 50) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

A continuación se presenta el gráfico del problema con estos tres vectores gradientes (ponderados por algún escalar positivo, para efectos de la claridad de la ilustración) representados desde el punto (120, 50).



Así, podemos notar que el vector $-\nabla f$ se encuentra en el cono generado por los vectores de las restricciones activas en el punto $(120, 50)$, que es justamente la condición necesaria de KKT.

Pregunta 3 (15 puntos)

(a) (5 puntos) Considere el siguiente problema de optimización P).

$$P) \quad \text{mín}_{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \quad x^4 + y^2 + 4xy$$

(i) **(2 puntos)** Escriba la dirección de descenso y el modelo que determina el paso óptimo desde el punto (1,0) para el Método del Gradiente.

Solución: La dirección de descenso sería: $d = -\nabla f(x, y) = -[4x^3 + 4y, 2y + 4x]$

Y evaluada en $(1, 0)$ queda en $d = [-4, -4]$

Por otra parte, se tiene el modelo que determina el paso óptimo es:

$$\text{mín}_{\lambda \geqslant 0} \quad f(1 - 4\lambda, 0 - 4\lambda) = \quad (1 - 4\lambda)^4 + (-4\lambda)^2 + 4(1 - 4\lambda)(-4\lambda)$$

(ii) **(3 puntos)** Escriba la dirección de descenso y el modelo que determina el paso óptimo desde el punto (0,1) para el Método de Newton.

Solución: La dirección de descenso sería: $d = -[\nabla^2 f(x, y)]^{-1} \nabla f(x, y)$

$$d = -\begin{bmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} [4x^3 + 4y, 2y + 4x]$$

Y evaluada en $(0, 1)$ queda en $d = -\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} [4, 2] = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} [4, 2] = [0, -1]$

Por otra parte, se tiene el modelo que determina el paso óptimo es:

$$\text{mín}_{\lambda \geqslant 0} \quad f(0+0\lambda, 1-\lambda) = \quad (1-\lambda)^2$$

(b) (10 puntos) En el primer día de su nuevo trabajo en empresas NegroGato, su jefe le solicita que investigue el uso de cartón en la caja de vino tinto de un litro para que sea el mínimo posible, pues cree que se podría reducir costos en la producción actual de cajas. La condición impuesta por su jefe es que el ancho de la caja no exceda los 8 centímetros. El costo de una caja es proporcional a su área.

(i) **(4 puntos)** Modele la situación descrita.

Solución: Las variables de decisión serían el alto, ancho y alto medidos en centímetros; para los cuales nos referiremos como a, b y c respectivamente. Luego el modelo queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} P) \quad \text{mín} & ab+bc+ca & \\ \text{s.a.} & abc & = 1.000 \\ & b & \leq 8 \\ & a\ ,\ b\ ,\ c & \geq 0 \end{array}$$

(ii) **(6 puntos)** Resuelva el modelo planteado.

Solución: Luego, dado que tenemos un problema no lineal con una restricción de igualdad, otra de desigualdad y otras de signo para cada variable de decisión, debemos utilizar las siguientes condiciones de KKT:

$$\begin{array}{ll} a\left(\frac{\partial f}{\partial a}+\lambda\frac{\partial g}{\partial a}+\mu\frac{\partial h}{\partial a}\right)=0 & \\ \Rightarrow a\left((b+c)+\lambda(0)+\mu(bc)\right)=0 & (1) \\ b\left(\frac{\partial f}{\partial b}+\lambda\frac{\partial g}{\partial b}+\mu\frac{\partial h}{\partial b}\right)=0 & \\ \Rightarrow b\left((a+c)+\lambda(1)+\mu(ac)\right)=0 & (2) \\ c\left(\frac{\partial f}{\partial c}+\lambda\frac{\partial g}{\partial c}+\mu\frac{\partial h}{\partial c}\right)=0 & \\ \Rightarrow c\left((a+b)+\lambda(0)+\mu(ab)\right)=0 & (3) \\ \lambda\left(b-8\right)=0 & (4) \\ \left(abc-1.000\right)=0 & (5) \end{array}$$

Luego por (5), descartamos los escenarios en que a, b o c es igual a cero. Posteriormente, si combinamos (1) con (3) tenemos que:

$$\begin{array}{l} ab-bc=0 \\ \Rightarrow a=c \end{array}$$

Notemos que $\lambda = 0$ implica $a = b = c = 10$, lo cual es infactible. Luego $b = 8$ y entonces de (5):

$$\begin{array}{l} 8ac=1.000 \\ \Rightarrow a^2=125 \\ \Rightarrow a=5\sqrt{5}\approx 11,18 \\ \Rightarrow c=5\sqrt{5}\approx 11,18 \end{array}$$

Luego $\lambda = a(a-b)/b > 0$ y $\mu = -(a+b)/(ab) < 0$.

Pregunta 4 (15 puntos)

Suponga que usted es el gerente de operaciones de una empresa de transporte marítimo, y tiene que encargarse de planificar el transporte de gas natural licuado (GNL) a través de una red de N puertos, sobre un horizonte de T días. El propósito de esta planificación es el de minimizar el costo total de transporte y almacenamiento de GNL sobre este horizonte, satisfaciendo la demanda por GNL en los diferentes puertos, y varias restricciones físicas.

La inyección/demanda (por tierra) de GNL en el puerto i, día t, corresponde a d_{it}, donde $d_{it} > 0$ indica que corresponde a una inyección (u oferta) y $d_{it} < 0$ indica que corresponde a una demanda. Además, el puerto i tiene una capacidad de estanque para f_i toneladas de GNL.

La flota para realizar el transporte consta de B barcos, donde el barco b tiene una capacidad de estanque para g_b toneladas de GNL. Debido a la mala calidad de las tecnologías que dispone, cada vez que un barco es cargado con GNL, se pierde el 1 % de la carga. Además, si un barco es cargado con GNL en un día, entonces no puede ser descargado en el mismo día, y viceversa. Por otra parte, dependiendo de la velocidad del barco b, si éste abandona el puerto j en el día s, entonces el conjunto de combinaciones (i, t) de puertos i a los que puede transportarse, y días de llegada t a este puerto, vienen dados por el conjunto Λ^b_{js}. Es decir, si $(i, t) \in \Lambda^b_{js}$ significa que el barco b puede pasar de estar en el puerto j el día s a estar en el puerto i en el día t. (Naturalmente, un barco puede mantenerse en un puerto, por lo que en particular se tiene que $(i, t) \in \Lambda^b_{i,t-1}$.)

Por seguridad, la máxima cantidad de barcos que pueden cargar o descargar GNL en el puerto i, en el día t, corresponde a q_{it}.

El costo de almacenamiento diario por tonelada de GNL en el puerto i corresponde a h_i, mientras que no hay costo por almacenamiento de GNL en los barcos. El costo de transporte del barco b al pasar desde el puerto i al puerto j corresponde a c_{ij} (independiente de su carga). En caso de cargar o descargar el barco b en el puerto i, en el día t, se debe pagar un costo fijo de a^b_{it}.

Inicialmente (en el día $t = 0$), todos los barcos se encuentran en el puerto 1, y todos los barcos y puertos parten con los estanques de GNL vacíos.

Formule un modelo de optimización de programación entera mixta que represente el problema descrito.

Hint: Una formulación posible de este problema incluye variables binarias del tipo x^b_{jsit} para el transporte de barcos, variables binarias y continuas para la carga y descarga de los barcos en los puertos, y variables de GNL almacenado en puertos y barcos. Nótese que de alguna forma el itinerario de cada barco debe ser determinado, indicando dónde carga/descarga cada uno.

Solución: Las variables de decisión son las siguientes:

- $\diamond$ x^b_{jsit}: 1 si el barco b se transporta desde el puerto j al puerto i partiendo el día s y llegando el día t, 0 si no.
- $\diamond$ y^b_{it}: 1 si el barco b carga GNL en el puerto i en el día t, 0 si no.
- $\diamond$ z^b_{it}: 1 si el barco b descarga GNL en el puerto i en el día t, 0 si no.
- $\diamond$ u^b_{it}: toneladas de GNL cargadas desde el puerto i al barco b en el día t.
- $\diamond$ v^b_{it}: toneladas de GNL descargadas desde el barco b al puerto i en el día t.
- $\diamond$ I_{it}: toneladas de GNL almacenadas en el puerto i al final del día t.
- $\diamond$ H^b_t: toneladas de GNL almacenadas en el barco b al final del día t.

La función objetivo corresponde a minimizar los costos totales:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} h_i \, I_{it} + \sum_{b=1}^{B} \sum_{j=1}^{N} \sum_{s=1}^{T} \sum_{(i,t) \in \Lambda_{js}^b} c_{ji} \, x_{jsit}^b + \sum_{b=1}^{B} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} a_{it}^b \left(y_{it}^b + z_{it}^b \right).$$

El balance de flujo de GNL en puertos y barcos corrresponden a:

$$I_{it} = I_{i,t-1} + \sum_{b=1}^{B} \left(v_{it}^b - u_{it}^b \right) + d_{it} \quad \forall \, i \in \{1, \ldots, N\}, \, t \in \{1, \ldots, T\}$$

$$H_t^b = H_{t-1}^b + \sum_{i=1}^{N} \left(0.99 \, u_{it}^b - v_{it}^b \right) \quad \forall \, b \in \{1, \ldots, B\}, \, t \in \{1, \ldots, T\},$$

donde $I_{i,0} = 0$, $H_0^b = 0$.

Las cotas de almacenamiento en puertos y barcos corresponden a:

$$0 \leq I_{it} \leq f_i \quad \forall \, i \in \{1, \ldots, N\}, \, t \in \{1, \ldots, T\}$$
$$0 \leq H_t^b \leq g_b \quad \forall \, b \in \{1, \ldots, B\}, \, t \in \{1, \ldots, T\}.$$

La relación entre las variables continuas y binarias de carga y descarga en barcos se escriben:

$$0 \leq u_{it}^b \leq M \, y_{it}^b \quad \forall \, b \in \{1, \ldots, B\}, \, i \in \{1, \ldots, N\}, \, t \in \{1, \ldots, T\}$$
$$0 \leq v_{it}^b \leq M \, z_{it}^b \quad \forall \, b \in \{1, \ldots, B\}, \, i \in \{1, \ldots, N\}, \, t \in \{1, \ldots, T\},$$

donde M es un número suficientemente grande.

Un barco solamente puede cargar o descargar si es que se encuentra en el puerto respectivo en el día respectivo, y no puede hacer ambas actividades en el mismo día:

$$y_{it}^b + z_{it}^b \leq \sum_{(j,s):\, (i,t) \in \Lambda_{js}^b} x_{jsit}^b \quad \forall \, b \in \{1, \ldots, B\}, \, i \in \{1, \ldots, N\}, \, t \in \{1, \ldots, T\}.$$

La capacidad de barcos que cargan o descargan en cada puerto está limitada:

$$\sum_{b=1}^{B} \left(y_{it}^b + z_{it}^b \right) \leq q_{it} \quad \forall \, i \in \{1, \ldots, N\}, \, t \in \{1, \ldots, T\}.$$

El balance de flujo en el transporte de barcos corresponde a:

$$\sum_{(j,s):\, (i,t) \in \Lambda_{js}^b} x_{jsit}^b = \sum_{(j,s) \in \Lambda_{it}^b} x_{itjs}^b \quad \forall \, b \in \{1, \ldots, B\}, \, i \in \{1, \ldots, N\}, \, t \in \{1, \ldots, T\}$$

$$1 = \sum_{(j,s) \in \Lambda_{1,0}^b} x_{1,0,j,s}^b \quad \forall \, b \in \{1, \ldots, B\}$$

$$0 = \sum_{(j,s) \in \Lambda_{i,0}^b} x_{i,0,j,s}^b \quad \forall \, b \in \{1, \ldots, B\}, \, i \in \{2, \ldots, N\}.$$

Finalmente, debemos escribir la naturaleza de las variables binarias en el problema:

$$x_{jsit}^b, y_{it}^b, z_{it}^b \in \{0, 1\} \quad \forall \, b, \, j, \, s, \, i, \, t.$$