PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2014
Profesores: P.Álvarez - P.Carrillo - A.Cataldo
H.Larraín - A.Lüer - J.Vera

Pauta Interrogación 2

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (10 puntos)

(a) (**2 puntos**) Considere el siguiente problema de Programacíón Lineal:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.a.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Suponga que los puntos extremos (o vértices) de la región factible de ese problema son $x^1, x^2, \ldots, x^k$. Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "El valor óptimo del problema es igual a mín$\{c^T x^1, c^T x^2, \ldots, c^T x^k\}$".

Respuesta: Falso. El problema podría ser no acotado, y en ese caso el problema no posee valor óptimo.

(b) (**3 puntos**) Indique justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(i) Si el primal de un problema es no acotado, entonces el dual del problema es infactible y viceversa.

(ii) En un problema de producción, el cálculo del precio sombra de un recurso productivo es 8. Entonces, si se adquieren 3 unidades de este recurso productivo, la función objetivo del problema (utilidad) cambiará en 24 unidades.

(iii) Si un problema factible posee alguna variable irrestricta, el problema escrito en formato estándar siempre poseerá soluciones óptimas múltiples.

Respuesta:

(i) Falso. El recíproco no es necesariamente cierto: el dual de un problema infactible puede ser también infactible.

(ii) Falso. Esto es sólo cierto si este cambio no altera la base óptima. En otras palabras, con el cambio puede volverse activa una nueva restricción.

(iii) Verdadero. Supongamos que la variable x_i de un problema es irrestricta. Esta variable en el problema estándar es representada por la diferencia de dos variables positivas, $x_i = x_i' - x_i''$, $x_i', x_i'' \geq 0$. Sea x_i^* el valor óptimo de x_i en el problema original. Evidentemente, x_i^* puede ser escrito de infinitas formas como la diferencia de dos variables enteras, lo que prueba que la afirmación es cierta.

(c) (**2 puntos**) ¿Qué condición(es) debe cumplir la solución óptima de la Fase I del Algoritmo Simplex para que el problema original sea factible?

RESPUESTA: Se debe cumplir que el valor de la función objetivo en el óptimo es cero. Es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^* = 0$$

(d) (**3 puntos**) En un problema de Programación Lineal, ¿qué significa que un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se encuentre sobredeterminado? Grafique o describa un problema que posea un punto sobredeterminado pero en donde el problema no tenga restricciones redundantes.

RESPUESTA: Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se encuentra sobredeterminado si está definido como la intersección de $n+1$ o más hiperplanos. Un ejemplo de punto sobredeterminado en $\mathbb{R}^3$ corresponde a la punta de una pirámide de base cuadrada: dicho punto queda determinado como la intersección de cuatro planos, ninguno de los cuales puede ser eliminado sin alterar el dominio. Entonces, un problema de maximización cuyo dominio corresponda esta pirámide es un ejemplo de lo que se pide.

(e) (**Bono extra: 5 puntos**) Explique brevemente cuáles eran las complejidades principales que tenía el problema de operaciones en la industria vitivinícola que fue presentado en la charla del Prof. Alejandro MacCawley.

RESPUESTA: El problema abordado se refiere a la programación de líneas de embotellado de vino. Una de las principales complejidades se encuentra en el hecho que existen distintos formatos de botellas y las líneas deben ser detenidas para poder acondicionarlas al nuevo formato. Esto toma una cantidad de tiempo bastante grande. Adicionalmente, lo mismo ocurre con las etiquetas, hay una cantidad enorme y cada destino de venta va asociado a distintas etiquetas. También debe hacerse preparación de las líneas de etiquetado. Todo esto complejiza significativamente la programación.

Pregunta 2 (14 puntos)

(a) (**5 puntos**) Considere $P = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, \forall i = 1, \ldots, n\}$.

(i) (**2 puntos**) Demuestre que si $x \in P$ y existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $0 < x_i < 1$, entonces x no es punto extremo (vértice) de P.

(ii) (**3 puntos**) Demuestre que si $x \in \{0, 1\}^n$ (es decir, x_i puede valer 0 ó 1), entonces x es un punto extremo (vértice) de P.

RESPUESTA:

(i) Sea un vector $x \in P$, con $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sea x_i una componente de x tal que $0 < x_i < 1$. Sean $x' = x_1, x_2, \ldots, 0, \ldots, x_n$ y $x'' = x_1, x_2, \ldots, 1, \ldots, x_n$ el vector que se obtiene de tomar x y cambiar su i-ésimo elemento por un 0 y un 1 respectivamente. Resulta claro que si $x \in P$, entonces $x', x'' \in P$. Entonces, el vector x puede ser expresado como:

$$x = (1 - x_i) \cdot x' + x_i \cdot x''$$

Como $0 < x_i < 1$, y $x' \neq x''$, podemos concluir que x es combinación convexa de dos puntos pertenecientes a P, lo que implica que no es un vértice de P.

(ii) Supongamos que $x \in 0,1^n$ no es vértice. Entonces, existen x' y x'', $x' \neq x''$, tales que x es combinación convexa de x' y x'', es decir:

$$x = (1-\lambda) \cdot x' + \lambda \cdot x'',\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Si $x' \neq x''$, entonces en particular tiene que existir i tal que $x'_i \neq x''_i$. La condición de combinación convexa implica que:

$$x_i = (1-\lambda) \cdot x'_i + \lambda \cdot x''_i,\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

La variable x_i puede tomar valores 0 ó 1. Si $x_i = 0$, la condición anterior implicaría que $x'_i = x''_i = 0$, por lo que x_i no puede valer 0. Si $x_i = 1$, la condición implicaría que $x'_i = x''_i = 1$, lo que demuestra por contradicción que x no puede ser escrito como combinación convexa de x' y x'' con $x' \neq x''$, y por lo tanto es necesariamente un vértice de P.

(b) (**4 puntos**) Sean P) y P') problemas lineales tales que:

$$\begin{array}{rll} \text{P) min} & c^T x & \\ \text{s.a.} & Ax = b & \\ & x \geq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rll} \text{P') min} & c^T x & \\ \text{s.a.} & Ax = b' & \\ & x \geq 0 & \end{array}$$

Demuestre que si P) es un problema cuya solución óptima no es acotada, entonces el problema P') no puede poseer solución óptima, independiente del valor que tome el vector b'.

Respuesta: Sean D) y D') los problemas duales de P) y P'). Los problemas D) y D') poseen el mismo dominio, y difieren únicamente en la función objetivo. Por lo tanto, si P) es un problema no acotado, por dualidad débil su problema dual D) poseerá dominio vacío, lo que implica que D') también posee dominio vacío.

Dualidad fuerte dice que si P') posee valor óptimo, éste debe tener el mismo valor que el valor óptimo de D'). Como el dominio de D') es vacío, entonces P') no puede tener solución óptima.

(c) (**5 puntos**) Considere un problema de transporte cuyo modelo de Programación Lineal es el siguiente:

$$\begin{array}{lll} \min & \displaystyle\sum_{i \in O} \sum_{j \in D} c_{ij} x_{ij} & \\ \text{s.a:} & \displaystyle\sum_{j \in D} x_{ij} = a_i & \forall i \in O \\ & \displaystyle\sum_{i \in O} x_{ij} = b_j & \forall j \in D \\ & x_{ij} \geq 0 & \forall i \in O, \forall j \in D \end{array}$$

Donde O y D corresponden al conjunto de orígenes y destinos del problema, c_{ij} es el costo unitario de enviar carga desde $i \in O$ hasta $j \in D$, a_i es la cantidad que se debe enviar desde $i \in O$, y b_j es la cantidad que se debe hacer llegar a $j \in D$ con $\displaystyle\sum_{i \in O} a_i = \sum_{j \in D} b_j$. La variable x_{ij} representa la cantidad a enviar desde $i \in O$ hasta $j \in D$.

(i) (**2 puntos**) Demuestre que la matriz A de este problema no puede ser de rango máximo.

(ii) (**1 punto**) Escriba el problema dual.

(iii) (**2 puntos**) En el óptimo del problema, cierto arco x_{ij} lleva flujo > 0. ¿Qué condición deben cumplir los precios sombra de los nodos i y j?

Respuesta:

(i) Si sumamos las restricciones asociadas a $i \in O$ obtenemos que $\sum_{i\in O}\sum_{j\in D} x_{ij} = \sum_{i\in O} a_i$. Sumando las restricciones asociadas a $j \in D$, se obtiene que $\sum_{i\in O}\sum_{j\in D} x_{ij} = \sum_{j\in D} b_j$. Como por definición $\sum_{i\in O} a_i = \sum_{j\in D} b_j$, ambos resultados son equivalentes, lo que implica que al menos una restricción es redundante, lo que prueba que la matriz A no es de rango máximo.

(ii) Definimos las variables duales $u_i, i \in O$ y $v_j, j \in D$. El problema dual es:

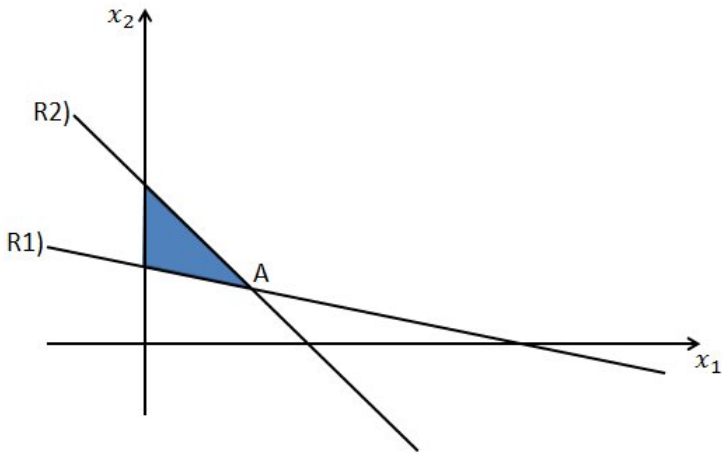
$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i\in O} a_i u_i + \sum_{j\in D} b_j v_j \\ \text{s.a:} & u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad \forall i \in O, \forall j \in D. \end{array}$$

(iii) En el óptimo, si $x_{ij} > 0$, por complementariedad de holguras su restricción asociada en el problema dual se debe cumplir en igualdad, es decir:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

Pregunta 3 (10 puntos)

Considere un problema de optimización que busca maximizar $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2$, donde el espacio de soluciones factibles corresponde al área ennegrecida en la siguiente figura:



Se conocen las coordenadas del punto A: $x_1 = 8/7$ y $x_2 = 6/7$. Se sabe además que la inversa de la base en el punto A es:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/7 & 8/7 \\ 1/7 & -1/7 \end{bmatrix} \quad \left(\text{y } B = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

(a) (**2 puntos**) Muestre que el punto A **no** es solución óptima del problema planteado.

(b) (**3 puntos**) Utilice el Algoritmo Simplex, usando el punto A como punto de partida, para encontrar la solución óptima del problema planteado. Entregue el valor de las variables y de la función objetivo en el óptimo.

(c) (**2 puntos**) Determine el rango de valores para el lado derecho de la restricción R1) de modo que se mantenga la estructura de la base óptima del problema.

(d) (**3 puntos**) Ahora considere que se agrega una nueva variable, w, al problema planteado. La columna asociada a w en las restricciones es $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar el costo de w en la función objetivo para que la estructura de la solución obtenida en (b) siga siendo óptima?

RESPUESTA:

(a) Para esto, vemos si se cumple el criterio de optimalidad del algoritmo Simplex en el punto A.

Del gráfico apreciamos que el problema es de 2 variables y 2 restricciones. La restricción R1) es de $\geq$ y R2) es de $\leq$. Sabemos que en problemas de este tipo, la forma estándar queda con 2 ecuaciones y 4 variables (las 2 originales más una de holgura para cada restricción). Luego, 2 serán las variables básicas y 2 las no básicas. Dada la información $x_1 = 8/7 > 0$ y $x_2 = 6/7 > 0$, ambas son las variables básicas del problema, siendo h_1 (holgura de restricción R1)) y h_2 (holgura de restricción R2)) las no básicas.

Entonces se tiene:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{h_1} & \bar{c}_{h_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1/7 & 8/7 \\ 1/7 & -1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -3/7 & 11/7 \end{pmatrix}$$

como se ve, el costo reducido de la variable h_1 es negativo, luego, el punto A no es solución óptima del problema.

(b) De la parte a) se tiene que la variable h_1 entra a la base. Se aplica el criterio de salida para ver que variable la abandona. Para ello, necesitamos:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 8/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}$$

y

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} -1/7 & 8/7 \\ 1/7 & -1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & 8/7 \\ -1/7 & -1/7 \end{bmatrix}$$

$$min \left\{ \frac{8/7}{1/7} \right\} = 8 \mapsto \text{sale } x_1 \text{ de la base.}$$

Entonces, la nueva base está constituida por las variables h_1 y x_2.

La nueva base y matriz R son:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left(\text{y } B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificando el criterio de optimalidad para esta base se tiene:

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{x_1} & \bar{c}_{h_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$$

y como los costos reducidos de ambas variables no básicas son no negativos, estamos en el óptimo.

Para determinar el valor de las variables necesitamos conocer b. Sabemos, de la parte (a) que:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 8/7 \\ 6/7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1/7 & 8/7 \\ 1/7 & -1/7 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El valor de las variables en el óptimo corresponde a:

$$x_B^* = \bar{b} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$$

y sabemos que $x_1^* = h_2^* = 0$. El valor de la función objetivo en el óptimo es $z^* = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 10$.

(c) Para esto formulamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_B^* = \bar{b} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto b_1 \in (-\infty, 16]$$

(d) Para esto, construimos el siguiente sistema de ecuaciones sobre la nueva variable w

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \rightarrow c_w \in [-15, \infty)$$

Pregunta 4 (10 puntos)

(a) **(7 puntos)** Considere el problema

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & 2x_1 + 2x_2 \\ s.a. & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 6x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(i) **(2 puntos)** Encuentre, de la forma que estime conveniente, una solución óptima para el problema P). Indique cuál es el valor óptimo.

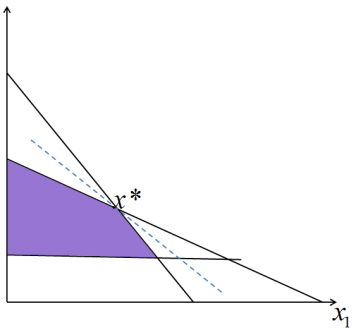
(ii) **(1 punto)** Escriba el problema dual de P).

(iii) **(2 puntos)** Usando la solución óptima encontrada en i), determine una solución óptima del problema dual. ¿Es única la solución dual? Justifique con precisión.

(iv) **(2 puntos)** Suponga que el lado derecho de la primera restricción cambia de valor de 6 a $6,2$. Sin resolver nuevamente, indique cuánto será el nuevo valor óptimo del problema P) con ese cambio. Justifique con precisión todo su desarrollo.

Respuesta:

i) (**(2 puntos)** Lo más directo es hacer esto en forma gráfica:



La solución óptima es $x_1^* = 2, x_2^* = 2$, con un valor óptimo de 8.

ii) (**(1 punto)** El dual es:

$$D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & 6y_1 + 18y_2 - y_3 \\ s.a. & y_1 + 6y_2 \geq 2 \\ & 2y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 2 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Esto se puede escribir también con $y_3 \leq 0$ y sumado en la función objetivo y la segunda restricción, en vez de restado.

iii) (**(2 puntos)** Esto se hace notando que como (x_1^*, x_2^*) es estrictamente positivo, por holguras complementarias las restricciones del dual se deben cumplir con igualdad. Además, la tercera restricción primal es inactiva, luego $y_3^* = 0$. Entonces, obtenemos una solución dual del sistema

$$\begin{array}{ll} y_1 + 6y_2 & = 2 \\ 2y_1 + 3y_2 & = 2 \end{array}$$

lo que da $y_1^* = 2/3$, $y_2^* = 2/9$, que da un valor óptimo igual a 8, como debe ser.

iv) (**(2 puntos)** Para esto usamos la estimación con la variables dual de la primera restricción: $y_1^* = 2/3$. El cambio es $\Delta b_1 = 0,2$, así que el óptimo va a cambiar en $y_1^* \times \Delta b_1 = (2/3) \times 0,2 = 0,133$. Hacer el cálculo de esta manera está bien ya que el rango de $0,2$ no afecta la estructura de la solución. Eso basta verlo a partir de la solución gráfica o viendo que cambiando a $6,2$ la solución cambia pero la tercera restricción sigue siendo no activa. También se podría deducir de hacer explícitamente el análisis de sensibilidad, pero no es necesario.

(b) **(3 puntos)** Considere el siguiente problema de Programación Lineal:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

donde A es de m filas y n columnas, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, y adicionalmente $b \geq 0$. Suponga que a este problema se le aplica el procedimiento de Fase I para determinar una solución básica factible inicial. El problema de Fase I es:

$$PF1) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{i=1}^{m} t_i \\ s.a. & Ax + It = b \\ & x, t \geq 0 \end{array}$$

donde I es la matriz identidad de m filas y m columnas. ¿Es posible que el dual del problema PF1), sea no acotado? Justifique con precisión su respuesta.

RESPUESTA: Si el dual del problema PF1) fuera no acotado, por los teoremas de dualidad tendríamos que el primal, es decir PF1) debería ser infactible. Pero eso no es posible ya que el problema PF1) siempre es factible (basta tomar $t = b$).

Pregunta 5 (10 puntos)

Una empresa debe programar el procesamiento de un conjunto T de trabajos en un conjunto M de máquinas, donde la cantidad de trabajos es mayor a la cantidad de máquinas. De ese modo, es necesario que las máquinas trabajen "en paralelo" con varios trabajos asignados a cada una de ellas. El tiempo de procesamiento del trabajo $i \in T$ en la máquina $k \in M$ se denota C_i^k.

Además, existe un tiempo de preparación en el que se debe incurrir cuando se procesa un trabajo después de otro, pero este tiempo depende del orden en que se hacen los trabajos en una máquina. Denotamos, entonces, por S_{ij}^k el tiempo de preparación para el trabajo $j \in T$, si este se programa inmediatamente después del trabajo $i \in T$, en la máquina $k \in M$.

Formule un modelo de programación lineal entera mixta que encuentre la programación de los trabajos que minimiza el tiempo en que termina el último de ellos.
(Indicación: Para modelar, puede serle útil definir trabajos ficticios al inicio y al fin, cada uno con tiempos adecuados.)

Solución:

Para formular más fácilmente el problema, conviene extender el conjunto de trabajos, creando un trabajo ficticio de inicio (O) y un trabajo ficticio de término (D).

El nuevo conjunto de trabajo es $\tilde{T} = T \cup \{O, D\}$. Los tiempos de procesamiento de estos trabajos es nulo, al igual que los tiempos de preparación.

Una definición posible de variables es,

- μ: tiempo de término del último trabajo.
- t_i: tiempo de término del trabajo $i \in T$.
- X_{ij}^k: 1, si el trabajo $i \in T \cup \{O\}$ va inmediatamente antes del trabajo $j \in T \cup \{D\}$, en la máquina $k \in M$; 0, en otro caso. ($i \neq j$).

El modelo resultante es,

(1) Función objetivo.

$$\text{mín}\, \mu$$

(2) Construcción mini-max.

$$\mu \geq t_i, \ \forall i \in T$$

(3) Cálculo de los tiempos de término de los trabajos.

$$t_j \geq t_i + C_j^k + S_{ij}^k - M\left(1 - X_{ij}^k\right), \ \forall i \in T \cup \{O\}, j \in T, k \in M : i \neq j$$

(4) Condición inicial (convencionalmente 0).

$$t_O = 0$$

(5) Asignación de trabajos a máquinas.

$$\sum_{\substack{j \in T \cup \{D\}: \\ i \neq j}} \sum_{k \in M} X_{ij}^k = 1, \ \forall i \in T \cup \{O\}$$

(6) Primer trabajo en cada máquina.

$$\sum_{j \in T \cup \{D\}} X_{Oj}^k = 1, \ \forall k \in M$$

(7) Último trabajo en cada máquina.

$$\sum_{j \in T \cup \{O\}} X_{jD}^k = 1, \ \forall k \in M$$

(8) Continuidad de precedencias.

$$\sum_{\substack{i \in T \cup \{O\}: \\ i \neq j}} X_{ij}^k = \sum_{\substack{l \in T \cup \{D\}: \\ j \neq l}} X_{jl}^k, \ \forall j \in T, k \in M$$

(9) Dominio de las variables de decisión.

$$t_i \geq 0, \ \forall i \in \tilde{T}$$

$$X_{ij}^k \in \{0, 1\}, \ \forall i \in T \cup \{O\}, j \in T \cup \{D\}, k \in M : i \neq j$$