PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2013
Profesores: P. Álvarez - A. Cataldo - R.Giesen
A. Lüer - V. Valdebenito

Interrogación 3

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes: ***Pregunta 1 Partes a), b) y c)****;* ***Pregunta 1 Partes d), e) y f)****;* ***Pregunta 2****; y* ***Pregunta 3****. En cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (20 puntos)

a) (**4 puntos**) Responda y justifique los siguiente problemas.

i) Para el siguiente problema:

$$\min_{x \geq 0} \quad 3x - 2x^2 + x^3 + 2x^4$$

Escriba las condiciones necesarias para un mínimo.

ii) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2 tal que $\nabla f(\bar{x}^*) = (0, a)$ y $H_f(\bar{x}^*) = \begin{bmatrix} 2 & c \\ c & d \end{bmatrix}$.

¿Qué condiciones deben cumplir a, c y d para que $\bar{x}^*$ sea mínimo local?

Respuesta:

i) Todo mínimo $\bar{x}$ es un punto estacionario, es decir se cumple que $\nabla f(\bar{x}) = 0$, o para este caso $\frac{df(\bar{x})}{dx} = 0$. Esto nos lleva la expresión,

$$3 - 4\bar{x} + 3\bar{x}^2 + 8\bar{x}^3 = 0$$

Además, la matriz Hessiana evaluada en el punto debe ser definida positiva. En este caso, esto corresponde a $\frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2} > 0$. Esto nos lleva a la siguiente condición.

$$-4 + 6\bar{x} + 24\bar{x}^2 > 0$$

ii) Basta con que $a = 0$ y que $2d - c^2 > 0$, gracias al criterio de los determinantes de las matrices menores.

b) (**4 puntos**) Considere S al conjunto de puntos en $\mathbb{Z}^2$ que satisfacen las siguientes restricciones:

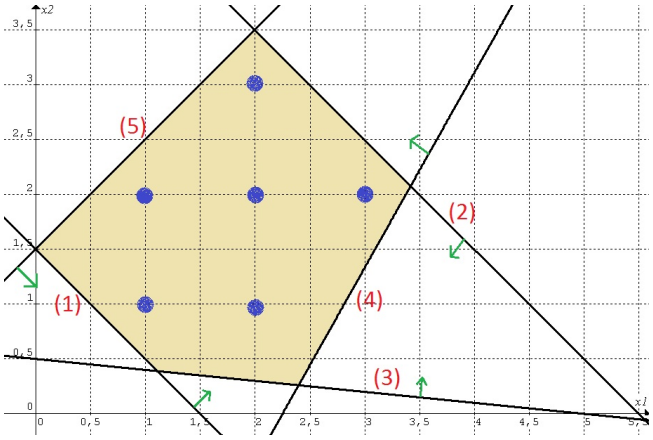
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq \tfrac{3}{2} \\ x_1 + x_2 &\leq \tfrac{11}{2} \\ \tfrac{2}{5}x_1 + 4x_2 &\geq 2 \\ -\tfrac{16}{9}x_1 + x_2 &\geq -4 \\ -x_1 + x_2 &\leq \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

i) El problema lineal continuo asociado a estas restricciones y a la función objetivo (lineal) $c^T x$ ¿tiene solución entera para cualquier elección de c? Argumente.

ii) Si la respuesta a la pregunta anterior es negativa, encuentre una descripción de S, también de la forma $Ax \leq b$, cuya relajación lineal tenga solución entera para cualquier elección de la función objetivo (lineal).

RESPUESTA:

i) Al graficar S (ver la figura siguiente) se observa que no siempre el problema tendrá soluciones óptimas enteras. Por ejemplo si se tiene el objetivo $Z = \text{mín}\, x_1$, es decir $c^T = [1, 0]$ la solución óptima es $(0, 3/2)$, que no tiene coordenadas enteras.



ii) En la figura anterior se marcaron los puntos con coordenadas enteras. Se busca envolverlos de la forma más apretada, es decir, obtener un conjunto de restricciones que definan su envoltura convexa. En este caso, corresponde al sistema.

$$\begin{aligned} -x_2 &\leq -1 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ -x_1 &\leq -1 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

Se observa que los vértices del poliedro definido por el conjunto tiene coordenadas enteras para toda elección de c en la función objetivo $c^T x$.

c) (**4 puntos**) Considere el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\text{mín} \quad x^4 + x^2 y + x y^2 + y^4$$

i) A partir del punto (-1, -1) realice una iteración del método del gradiente aplicado a este problema.

ii) A partir del punto (-1, -1) realice una iteración del método de Newton aplicado a este problema.

RESPUESTA:

i) La expresión para calcular el nuevo punto x^{k+1} es,

$$x^{k+1} = x_k - \lambda^k \nabla^T f\left(x^k\right)$$

Para este problema, se tiene que $\nabla f\left(x,y\right) = (4x^3 + 2xy + y^2, x^2 + 2xy + 4y^3)$. Como $(x^0, y^0) = (-1, -1)$, entonces $\nabla f\left(-1,-1\right) = (-1, -1)$.
Es decir,

$$\left(x^1, y^1\right) = (-1, -1) + \lambda^0 \left(1, 1\right)$$

Para determinar el paso λ^0 debe resolverse el problema unidimensional de minimización parametrizado en éste,

$$f\left(x^1, y^1\right) = f\left(\lambda^0\right) = 2\left(-1 + \lambda^0\right)^4 + 2\left(-1 + \lambda^0\right)^3$$

Minimizando $f\left(\lambda^0\right)$ se obtiene que $\lambda^{0*} = 1$. Es decir, el nuevo punto es,

$$\left(x^1, y^1\right) = (-1, -1) + 1 \cdot (1, 1) = (0, 0)$$

ii) A partir del punto (-1, -1) realice una iteración del método de Newton aplicado a este problema.
La expresión para actualizar el punto es,

$$x^{k+1} = x^k - \left[Hf\left(x^k\right)\right]^{-1} \nabla^T f\left(x^k\right)$$

De la parte anterior ya tenemos que $\nabla f\left(x^0, y^0\right) = (-1, -1)$. La matriz Hessiana,

$$Hf\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2y & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 2x + 2y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf\left(x^0, y^0\right) = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \left[Hf\left(x^0, y^0\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 5/42 & 1/21 \\ 1/21 & 5/42 \end{pmatrix}$$

Es decir, el nuevo punto se calcula como sigue,

$$\left(x^1, y^1\right) = (-1, -1) - \left\{ \begin{pmatrix} 5/42 & 1/21 \\ 1/21 & 5/42 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}^T = (-35/42, -35/42)$$

d) (**3 puntos**) Indique qué valores deben tomar a y b para que la siguiente función $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - bx_1)^2$ sea estrictamente convexa en $\mathbb{R}^3$.

RESPUESTA:

Primero se calculan el gradiente y la matriz Hessiana.

$$\nabla f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left[2a\left(x_1 - x_2\right) - 2b\left(x_3 - bx_1\right), -2a\left(x_1 - x_2\right), 2\left(x_3 - bx_1\right)\right]$$

$$Hf(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2a + 2b^2 & -2a & -2b \\ -2a & 2a & 0 \\ -2b & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Viendo los determinantes de las matrices menores, dan las siguientes condiciones,

$$2a + 2b^2 > 0$$
$$4ab^2 > 0$$
$$0 > 0$$

Es decir, no se puede afirmar que existan a, b tales que la función sea definida positiva. Si en las condiciones anteriores bastará con asegurar que los determinantes menores fueran ≥ 0 (es decir, que la función fuera convexa no estricta), se cumpliría para $a \geq 0$ y $b \in \mathbb{R}$.

e) (**5 puntos**) En la siguiente tabla se entrega información respecto a las cotas máximas de los arcos de una red:

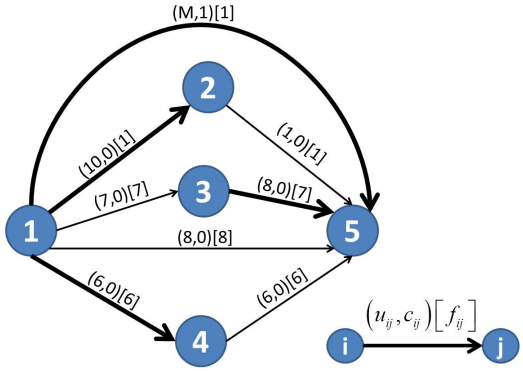
Arcos	Cota máxima
(1,2)	10
(1,3)	7
(1,4)	6
(1,5)	8
(2,5)	1
(3,5)	8
(4,5)	6

Se sabe que a través de esta red es posible transportar un máximo de 22 unidades entre el nodo 1 y el nodo 5. Utilice el algoritmo de simplex especializado en redes para encontrar el valor de las variables duales asociadas a esta solución.

Respuesta:

El problema puede plantearse como minimizar la cantidad de flujo que no pasa por esta red. Se parte de la red original, donde los arcos tienen la cota superior de flujo presentada y costo unitario 0. Se agrega un arco directo desde el nodo 1 al nodo 5, con capacidad suficiente y costo unitario 1. En este nuevo grafo, se calculan los valores duales como siempre.

Dado que el problema tiene cota superiores de flujo, pueden existir arcos fuera de la base que llevan flujo, pero que están en su cota superior. De hecho, hay varias decisiones. La red transformada, indicando con arcos más gruesos los básicos, así como toda la información, es el siguiente grafo.



De donde se obtiene el siguiente sistema,

$$\begin{aligned} \pi_1 - \pi_2 &= 0 \\ \pi_3 - \pi_5 &= 0 \\ \pi_1 - \pi_4 &= 0 \\ \pi_1 - \pi_5 &= 1 \end{aligned}$$

Haciendo $\pi_1 = 0$ se obtienen $\pi_2 = 0$, $\pi_3 = -1$, $\pi_4 = 0$, y $\pi_5 = -1$.

Nota: pueden seleccionarse otras bases, que podrían generar otros valores para los π_i, que también están correctos. Basta con que esa base sea un árbol generador, y que siempre las variables que no estén en sus cotas de flujo sean básicas.

Bono (4 puntos) Puede responder la siguiente pregunta para obtener una bonificación extra máxima de 4 puntos.

f) (**4 puntos**) Se tiene n fichas de dominó en fila:

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) \cdots (a_n, b_n)$$

Las fichas se pueden rotar, es decir, pueden estar orientadas (a_i, b_i) o (b_i, a_i), pero no se pueden intercambiar dos fichas de lugar.

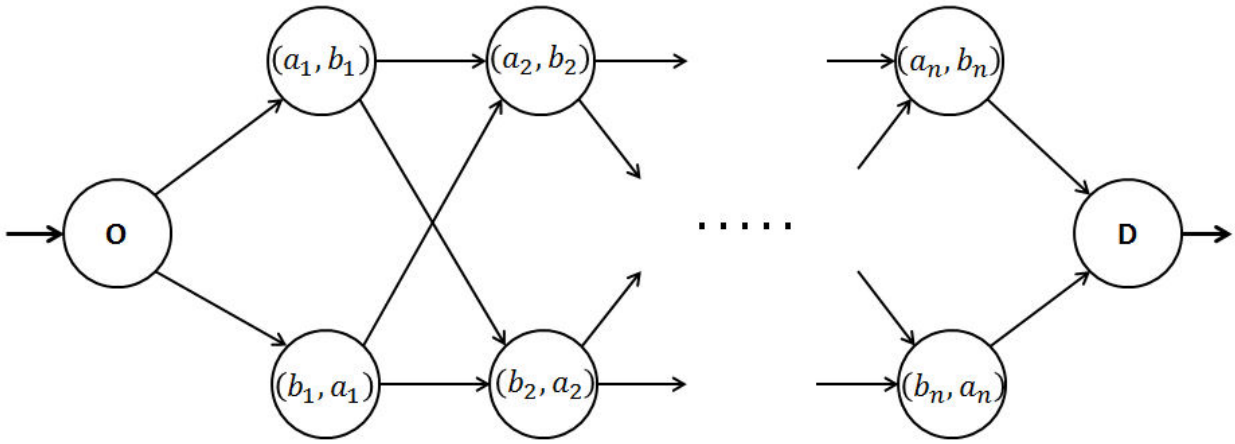
Se define la variación de dos fichas contiguas i y j, δ_{ij} como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} |b_i - a_j| & \text{si están orientadas } (a_i, b_i)(a_j, b_j) \\ |b_i - b_j| & \text{si están orientadas } (a_i, b_i)(b_j, a_j) \\ |a_i - a_j| & \text{si están orientadas } (b_i, a_i)(a_j, b_j) \\ |a_i - b_j| & \text{si están orientadas } (b_i, a_i)(b_j, a_j) \end{cases}$$

Se quiere minimizar $\sum_{i=1}^{n-1} \delta_{i,i+1}$, la suma total de las variaciones de fichas contiguas. Escriba este problema como un problema de flujo a costo mínimo. Para ello, explicite nodos, arcos, costos, etc.

Respuesta:

El siguiente grafo representa la red solicitada. Los costos de los arcos que no consideran los nodos O ni D son los asociados a $\delta_{i(i+1)}$, y los costos de los arcos que consideran estos nodos son 0. La capacidad máxima de todos los arcos es 1 y la mínima es 0.



Pregunta 2 (20 puntos)

Parte A

Sea el siguiente problema de programación lineal entera.

$$\mathcal{P}) \left(\begin{array}{lrrl} \min & -2x_1 & -2x_2 & \\ \text{s.a.} & 4x_1 & +3x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 & +5x_2 & \leq 15 \\ & x_1, & x_2 & \in \mathbb{Z}_0^+ \end{array} \right)$$

a) (**2 punto**) Encuentre la formulación ideal del problema, es decir, el problema cuyo espacio de soluciones envuelva a todos los puntos enteros factibles de $\mathcal{P}$ de la forma más apretada posible (envoltura convexa de los puntos enteros factibles).

b) (**5 puntos**) Resuelva el problema mediante el algoritmo de Ramificación y acotamiento (Branch and Bound). Ramifique primero en x_1, de ser posible. Al ramificar, explore primero la rama derecha. Entregue el árbol de exploración detallando valor objetivo y valores de las variables.

c) (**3 puntos**) El siguiente tableau es óptimo para la relajación lineal del problema, donde x_3 y x_4 son las variables de holguras agregadas a primera y segunda restricción, respectivamente. Determine los cortes de Gomory que pueden obtenerse desde él. Expréselos en las variables originales del problema.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_1	1	0	5/11	−3/11	15/11
x_2	0	1	−3/11	4/11	24/11
$-z$	0	0	4/11	2/11	78/11

Pauta Pregunta 2A

a) La formulación ideal es aquella que contiene a los puntos $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$ y $(0,3)$. Corresponde a,

$$\begin{array}{lllll} \min & -2x_1 & -2x_2 & & \\ \text{s.a.} & x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

b) El árbol resultante se muestra en la Figura 1. Se observa que cuatro soluciones tienen igual valor objetivo, las obtenidas en los nodos 5, 6, 7 y 8 de la figura.

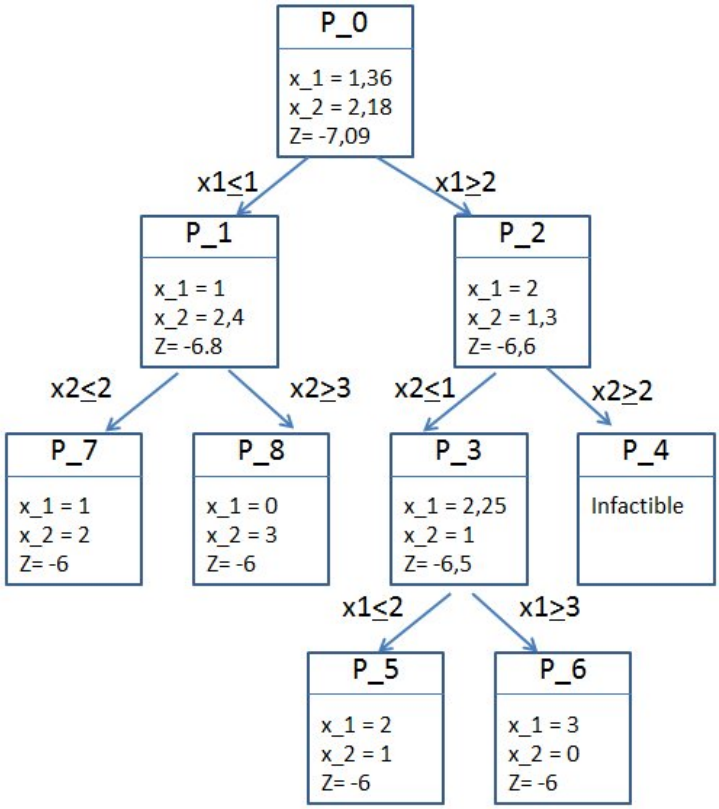


Figura 1: Árbol de ramificación y acotamiento (Branch and Bound) para pregunta 2.A.I.2.

c) Desde el tableau se deducen las siguientes desigualdades de Gomory,

$$\begin{aligned} 5x_3 + 8x_4 &\geq 4 \\ 4x_3 + 2x_4 &\geq 1 \end{aligned}$$

Del enunciado y del problema se observa que se cumple que,

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 &= 15 \end{aligned}$$

Despejando x_3 y x_4 y reemplazando en las desigualdades de Gomory obtenidas, agrupando términos se llega a que estas son,

$$4x_1 + 5x_2 \leq 16$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 7$$

Parte B

Una empresa de transporte de carga requiere programar su flota de camiones para próximas semanas. Dado que recientemente ha negociado un nuevo contrato, el transportista desconoce la ruta óptima a seguir con sus camiones. El gerente de la empresa de transporte asigna esta tarea a un ingeniero recién contratado, el cual señaló en su entrevista tener conocimientos de Optimización. Para tomar esta decisión, se cuenta con la siguiente tabla de distancias:

Origen \ Destino	A	B	C	D	E	F	G
A		2		4			
B			10	1			
C						4	5
D			5		4		
E							7
F							6
G							

a) (**2 puntos**) Construya la red de nodos y arcos que representa el problema anterior.

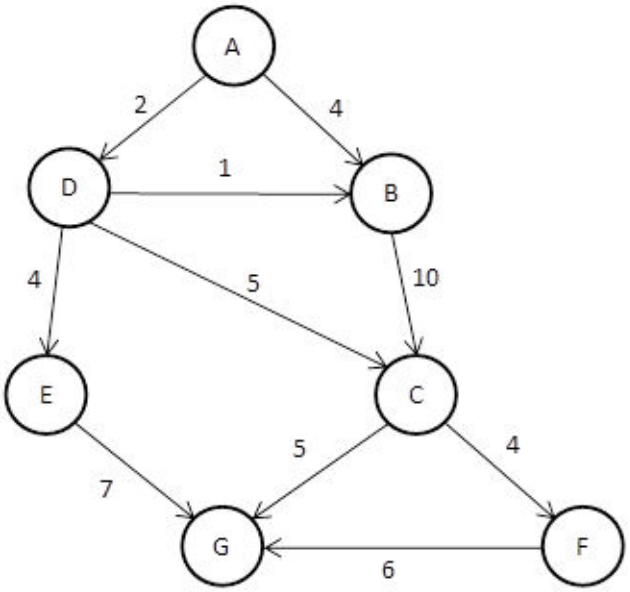
b) (**5 puntos**) Determine las rutas de distancia mínima entre las ciudades A y G.

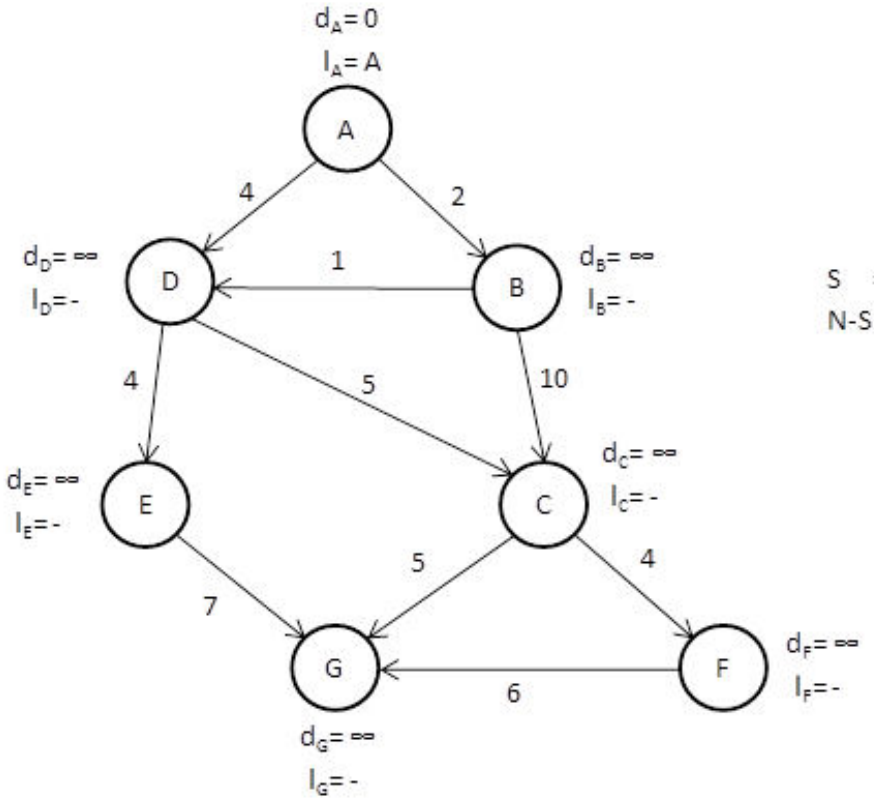
c) (**3 puntos**) Utilizando solamente los diferentes criterios asociados al algoritmo Simplex, encuentre el rango de valores que puede tomar el costo del arco B-C de manera que la solución encontrada en la parte b) siga siendo óptima.

Pauta Pregunta 2B

a) El siguiente grafo representa el problema planteado.

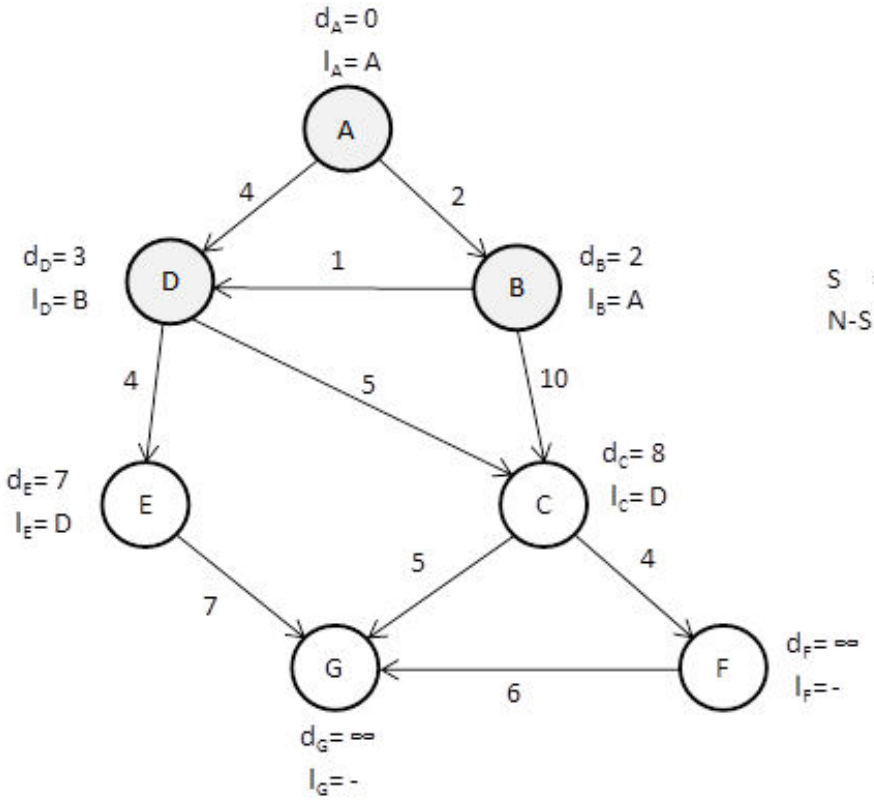
b) En los siguientes grafos se muestran las iteraciones del algoritmo de Dijkstra en la búsqueda del camino más corto entre A y G.


A
2
4
D
1
B
4
5
10
E
C
5
4
7
G
F
6

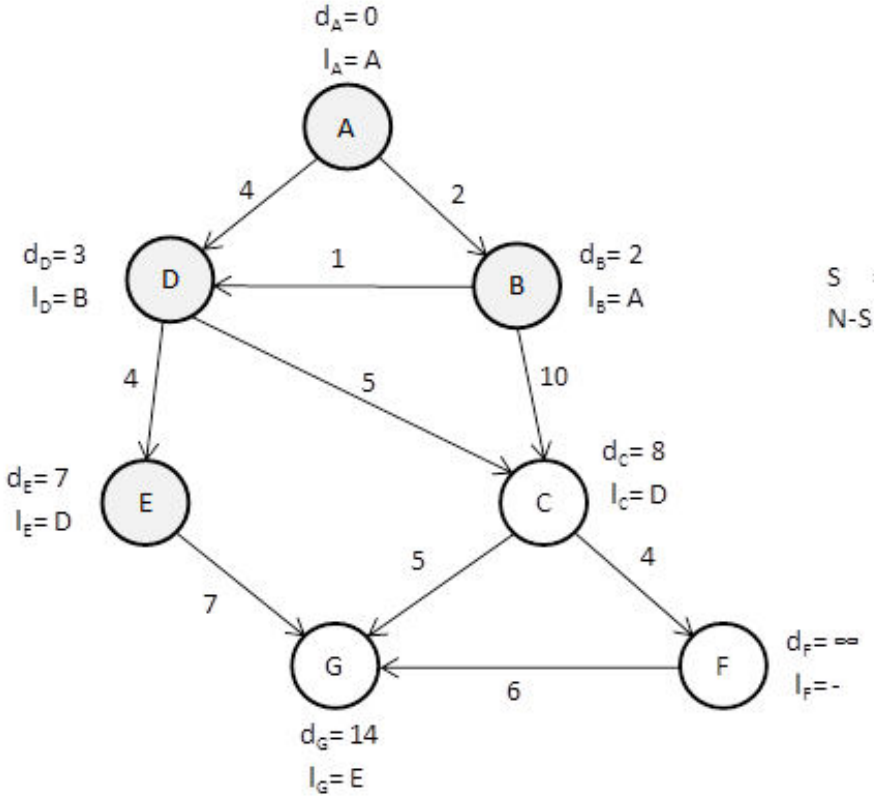

$d_A = 0$
$l_A = A$
A
4
2
$d_D = \infty$
$l_D = -$
D
1
B
$d_B = \infty$
$l_B = -$
4
5
10
$d_C = \infty$
$l_C = -$
$d_E = \infty$
$l_E = -$
E
C
5
4
7
G
F
6
$d_F = \infty$
$l_F = -$
$d_G = \infty$
$l_G = -$

S = {A}

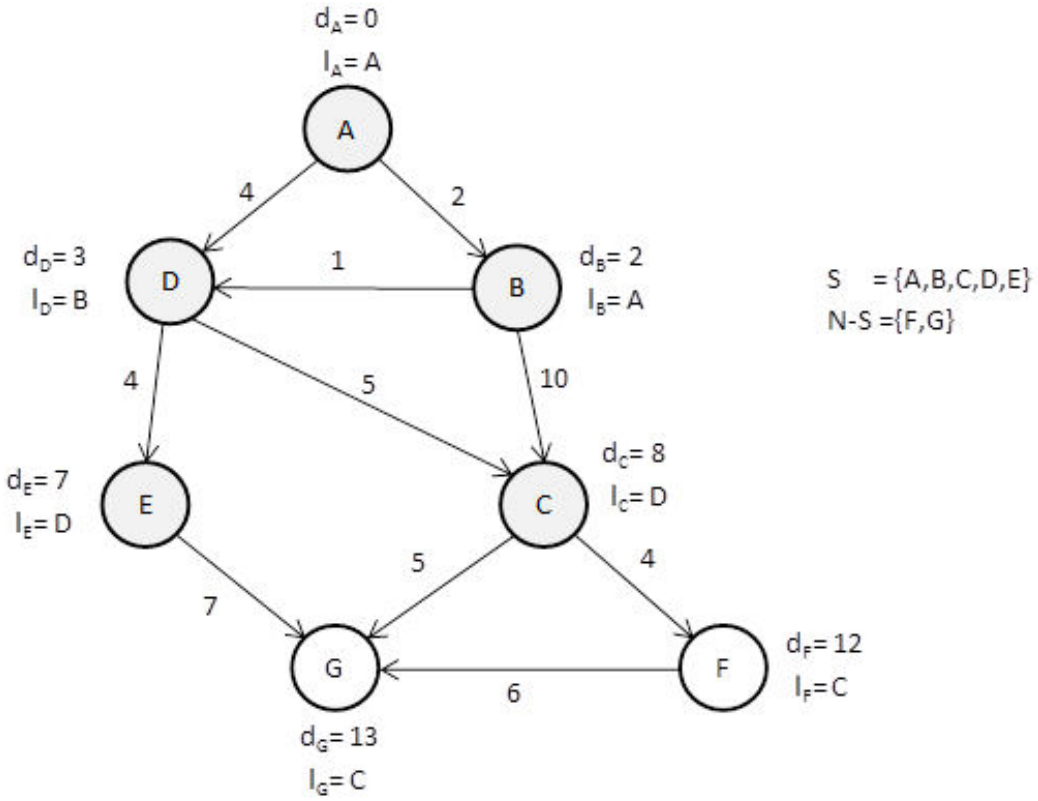
N-S = {B,C,D,E,F,G}

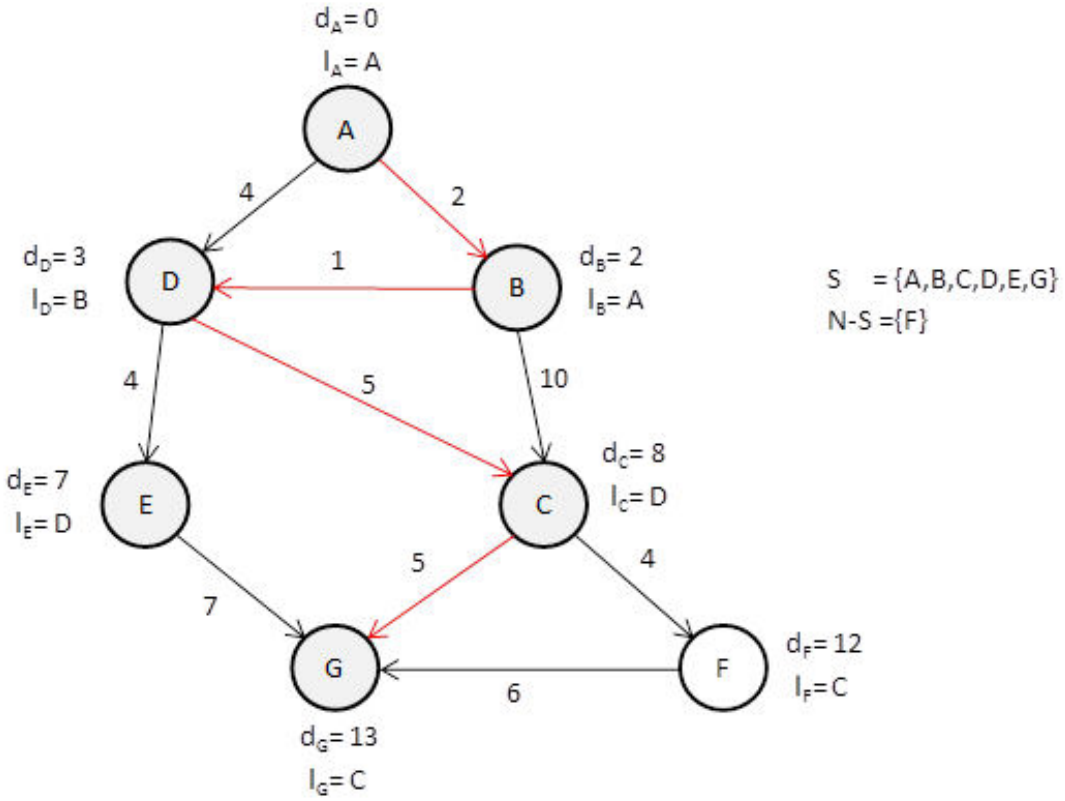


S = {A,B,D}
N-S ={C,E,F,G}



S = {A,B,D,E}
N-S ={C,F,G}





c) Consideremos que la base esta dada por los arcos (A, B). (B, D), (D, C), (C, G) (D, E)

y (C, F) (ojo, esta es una de las diferentes bases que pueden ser utilizadas, solamente importa que la elección de arcos forme un árbol)

Con estas bases calculamos el valor de las variables duales π's:

$$\begin{array}{rcccl} \bar{c}_{AB} & = & 2 - \pi_A + \pi_B & = & 0 \\ \bar{c}_{BD} & = & 1 - \pi_B + \pi_D & = & 0 \\ \bar{c}_{DC} & = & 5 - \pi_D + \pi_C & = & 0 \\ \bar{c}_{CG} & = & 5 - \pi_C + \pi_G & = & 0 \\ \bar{c}_{DE} & = & 4 - \pi_D + \pi_E & = & 0 \\ \bar{c}_{CF} & = & 4 - \pi_C + \pi_F & = & 0 \end{array}$$

con lo que:

$$\begin{array}{rcr} \pi_A & = & 0 \\ \pi_B & = & -2 \\ \pi_C & = & -8 \\ \pi_D & = & -3 \\ \pi_E & = & -7 \\ \pi_F & = & -12 \\ \pi_G & = & -13 \end{array}$$

Luego, la condición para que la solución siga siendo óptima a pesar de cambiar el costo del arco (B, C) es:

$$\bar{c}_{BC} = c_{BC} - \pi_B + \pi_C = c - (-2) + (-8) \geq 0 \rightarrow c_{BC} \geq 6$$

Pregunta 3 (20 puntos)

Machales es un pequeño país que enfrenta elecciones presidenciales dentro de una semana. Ramón Romualdo es uno de los $N+1$ candidatos (para todos los efectos asumiremos que de 1 a N son los rivales de Ramón Romualdo) que busca ganar la presidencia de esta nación que cuenta con M votantes. Las reglas electorales de esta nación indican que los dos candidatos que obtengan mayor votación pasarán a una segunda vuelta.

La encuesta del día de hoy –que es 100 % confiable– dice que R votantes ya han escogido a Ramón Romualdo como su candidato y votarán por él, y que M_i votantes que al final han escogido al candidato i, con $i = 1, \ldots, N$, y votarán por éste. Esta encuesta también indica un total de Q votantes se están indecisos (entonces $R + \sum_{i=1}^{N} M_i + Q = M$).

Al día de hoy, todos los candidatos, salvo Ramón Romualdo, han gastado la totalidad de su presupuesto de campaña. Al candidato Ramón Romualdo aún le quedan P unidades presupuestarias, las que espera utilizar durante esta semana que falta para las votaciones. Para ello, él sabe que deberá gastar C unidades presupuestarias para lograr que uno de los votantes indecisos voté por él en las próximas elecciones. También sabe que para hacer que uno de los votantes del candidato i cambie su decisión y el día de las votaciones voté por él (por Ramón Romualdo), deberá gastar S_i unidades presupuestarias.

a) (**14 puntos**) Asumiendo que los votantes que lleguen indecisos al día de la votación votarán en blanco y que no existen votos nulos, construya un modelo de programación lineal que ayude a Ramón Romualdo a tomar las decisiones que le aseguren pasar a la segunda vuelta, ojalá con la primera mayoría. Suponga que Ramón Romualdo no irá segunda vuelta en caso de empatar en el segundo lugar con otro(s) candidato(s).

b) (**6 puntos**) Ahora asuma que los votantes indecisos sí votarán por algún candidato el día de la elección, pero esa información no se conoce. Modifique el modelo planteado en la parte a) para que bajo esta nueva condición se siga asegurando que el candidato Ramón Romualdo pasa a segunda vuelta.

Pauta Pregunta 3

a) El modelo es el siguiente,

   (I) Variables de decisión
   - $\diamond$ V: cantidad de votos del candidato A.
   - $\diamond$ V_i: cantidad de votos del candidato i.
   - $\diamond$ G_i: variable binaria que toma valor 1 si el candidato A obtiene más votos que el candidato i, 0 en otro caso.
   - $\diamond$ W_i: cantidad de votantes del candidato i que A logra que cambien su decisión y voten por él.
   - $\diamond$ X: cantidad de votantes indecisos que A logra que voten por él.

   (II) Función objetivo

$$Z = \text{máx} \sum_{i=1}^{N} G_i$$

(III) Restricciones

◇ Respetar el presupuesto disponible.

$$CX + \sum_{i=1}^{N} S_i W_i \leq P$$

◇ Contar los votos del candidato A.

$$V = R + X + \sum_{i=1}^{N} W_i$$

◇ Contar los votos de los demás candidatos

$$V_i = N_i - W_i \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

◇ Acotar por abajo la variable G_i.

$$G_i \geq \frac{V - V_i}{N} \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

◇ Acotar por arriba la variable G_i.

$$G_i \leq 1 - \frac{V_i + 1 - V}{N} \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

◇ Asegurar que va a segunda vuelta.

$$1 - \frac{N - 2 - \sum_{i=1}^{N} G_i}{N} \geq 1$$

◇ Naturaleza de las variables

$$G_i \in \{0, 1\} \ \ \forall i = 1, \ldots, N.$$

$$V \geq 0, \text{ entero}$$

$$V_i \geq 0, \text{ enteros } \forall i = 1, \ldots, N.$$

$$W_i \geq 0, \text{ enteros } \forall i = 1, \ldots, N.$$

$$X \geq 0, \text{ entero}$$

b) Las modificaciones se deben a que se debe considerar el peor caso. Este peor caso corresponde a estar primero y que el segundo y tercero recibieran los votos indecisos necesarios para pasarlo, o que estando segundo, el que esta tercero recibiera los votos de indecisos necesarios para pasarlo. Al considerar el peor caso también estamos asumiendo que él no recibe votos de los indecisos que queden al momento de las votaciones.

(I) Variables de decisión adicionales.

◇ α: variable binaria que toma valor 1 si Ramón Romualdo está en primer lugar antes de que se realice la votación, 0 en otro caso.

- ◇ β: variable binaria que toma valor 1 si Ramón Romualdo está en segundo lugar antes de que se realice la votación, 0 en otro caso.
- ◇ δ_1: cantidad de votos que tiene el candidato con más votos de entre los $i = 1, \ldots, N$.
- ◇ δ_2: cantidad de votos que tiene el segundo candidato con más votos de entre los $i = 1, \ldots, N$.
- ◇ γ_i: variable binaria que indica si el candidato i es el que tiene más votos de entre los candidatos $i = 1, \ldots, N$.

(II) Se deben agregar las siguientes restricciones:

- ◇ Construcción de variables α:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} G_i - (N-1)}{N} \leq \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} G_i}{N}$$

- ◇ Construcción de variables β:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} G_i - (N-2)}{(N-1)} - N\alpha \leq \beta \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} G_i}{N-1} + N\alpha$$

- ◇ Condición que dice que no puede ser primero y segundo a la vez:

$$\alpha + \beta \leq 1$$

- ◇ Condición para asegurar ir a segunda vuelta si iba primero antes de las votaciones:

$$Q - X \leq 2V - \delta_1 - \delta_2 + M(1 - \alpha)$$

- ◇ Condición para asegurar ir a segunda vuelta si iba segundo antes de las votaciones:

$$Q - X \leq V - \delta_2 + M(1 - \beta)$$

- ◇ Construcción de δ_1:

$$\delta_1 \geq V_i \qquad \forall i = 1, \ldots, N.$$

- ◇ Construcción de δ_2:

$$\delta_2 \geq V_i - M\gamma_i \qquad \forall i = 1, \ldots, N.$$

- ◇ Construcción de γ_i:

$$\frac{V_i - \delta_1 + 1}{M} \leq \gamma_i \qquad \forall i = 1, \ldots, N.$$

- ◇ Naturaleza de las variables

$$\alpha, \beta \in \{0, 1\}$$

$$\delta_1, \delta_2 \geq 0$$

$$\gamma_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i = 1, \ldots, N.$$