PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 02-2018
Profesores: A. Cataldo - R. Cuadrado - J. González - M. Klapp

Interrogación 3

Duración: 2 horas.

INSTRUCCIONES:

- *La prueba contiene 60 puntos. Sea estratégico, el orden de preguntas no tiene relación con su dificultad.*
- *Conteste cada pregunta en un cuadernillo. En cada uno coloque su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.***
- *Dos rondas de preguntas al profesor (una 15 minutos después de comenzar, otra cuando transcurra el 60 % del tiempo). Está prohibido hacer preguntas al ayudante. Deje anotado cualquier supuesto.*
- *La prueba es sin apuntes y sin equipos electrónicos. Dichos equipos deben estar siempre apagados.*

Pregunta 1 (15 puntos)

La facultad de Ingeniería Comercial desea planificar los horarios en su semana de exámenes. De acuerdo a su reglamento, todos los exámenes de un mismo curso deben ser impartidos en el mismo día y horario.

Suponga un conjunto J de cursos. Usted conoce el parámetro d_j que define el número de alumnos inscritos en el curso $j \in J$. Para cada curso, puede planificar hasta un máximo de 5 grupos diferentes para rendir el examen en salas separadas.

Por otro lado, el conjunto S detalla el listado de todas las aulas disponibles para rendir el examen, cada una con capacidad k_s para cada $s \in S$. Considere que a la facultad le cuesta $\$c_s$ pesos utilizar el aula $s \in S$ en cualquier módulo y que en una sala y módulo solo pueden estar rindiendo el examen alumnos de un curso.

La universidad exige que ningún alumno $i \in I$ rinda más de tres exámenes el mismo día, ni debe tener más de un examen programado a la vez. El parámetro a_{ij} indica con valor 1 si el alumno i tiene inscrito el curso j y 0 en otro caso.

Formule un modelo de optimización lineal entera que permita a la facultad planificar los horarios de todos los exámenes de todas sus asignaturas durante su semana de exámenes, teniendo en cuenta que el objetivo es minimizar los costos totales incurridos durante esa semana. Asuma que cada examen dura exactamente un módulo horario, y que cada día posee seis módulos horarios.

Solución:

- I, conjunto de alumnos
- $H := \{1, \ldots, 6\}$, conjunto de módulos
- $D := \{1, \ldots, 5\}$, conjunto de días de la semana
- J conjunto de asignaturas

- $G := \{1, \ldots, 5\}$, conjunto de grupos
- S, conjunto de salas

VARIABLES:

X_{jdh}: Binaria, vale 1 si asignatura j se imparte el día d en horario h.

Y_{gjdhs}: Binaria, vale 1 si se asigna grupo g de asignatura j en el día d en el horario h y sala s

FUNCIÓN OBJETIVO:

$$\min \sum_{j \in J, g \in G, d \in D, h \in H, s \in S} Y_{gjdhs} c_s$$

RESTRICCIONES:

R1) Asignar horario a asignatura

$$\sum_{d \in D, h \in H} X_{jdh} = 1 \quad \forall j \in J$$

R2) No tener mas de 3 exámenes el mismo día

$$\sum_{h \in H, j \in J} a_{ij} X_{jdh} \leq 3 \quad \forall i \in I, d \in D$$

R3) No tener mas de 1 examen al mismo momento

$$\sum_{j \in J} a_{ij} X_{jdh} \leq 1 \quad \forall i \in I, d \in D, h \in H$$

R4) Satisfacer la demanda de la asignatura

$$d_j \cdot X_{jdh} \leq \sum_{g \in G, s \in S} k_s \cdot Y_{gjdhs} \quad \forall j \in J, d \in D, h \in H$$

R5) Asignar una unica sala al grupo

$$\sum_{s \in S} Y_{gjdhs} \leq 1 \quad \forall j \in J, d \in D, h \in H, g \in G$$

R6) No utilizar 2 veces un mismo espacio

$$\sum_{g \in G, j \in J} Y_{gjdhs} \leq 1 \quad \forall d \in D, h \in H, s \in S$$

R7) Naturaleza variables

$$\begin{aligned} X_{jdh} &\in \{0,1\} \quad \forall j \in J, d \in D, h \in H \\ Y_{gjdhs} &\in \{0,1\} \quad \forall j \in J, g \in G, d \in D, h \in H, s \in S \end{aligned}$$

Nota de corrección:

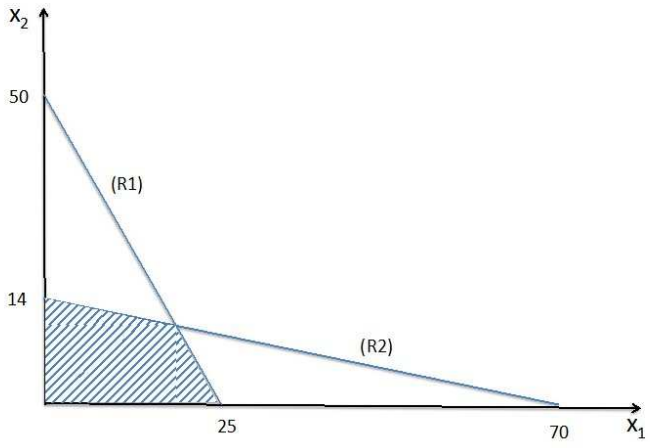
- 5 puntos por modelar correctamente las decisiones

- ◇ 8 puntos por modelar correctamente las restricciones (7 puntos las restricciones + 1 naturaleza vars).
- ◇ 2 puntos x objetivo

Pregunta 2 (15 puntos)

Considere un problema de planificación de la producción de una empresa que produce y vende dos productos: 1 y 2, y en donde x_1 y x_2 son las cantidades a producir de cada uno de ellos. En la figura a continuación, la región achurada muestra las combinaciones factibles de producción de esta empresa.

Además usted sabe que existen dos vértices (puntos extremos) que son solución óptima del problema, uno donde sólo se produce el producto 1 (Solución 1) y otro donde las restricciones ($R1$) y ($R2$) están activas (Solución 2).



(a) **(4 puntos)** Formule un modelo de programación lineal consistente con la información dada.

(b) **(3 puntos)** Formule el problema dual del problema formulado en (a).

(c) **(3 puntos)** Mediante el Teorema de Holguras Complementarias, muestre que la Solución 1 y la Solución 2 son efectivamente soluciones óptimas del problema planteado en (a).

(d) **(5 puntos)** Considere ahora que la empresa puede producir un nuevo producto 3. Los coeficientes que acompañan a la variable (x_3) en las restricciones $R1$ y $R2$ son 1 y 4, respectivamente. El valor del coeficiente asociado a x_3 en la función objetivo es 4.

El gerente de la empresa le hace entrega de un grupo de soluciones que él cree que son correctas. Estas soluciones se entregan en la siguiente tabla:

Soluciones Propuestas	x_1	x_2	x_3
$S1$	10	8	2
$S2$	9	7	7
$S3$	0	0	50
$S4$	8	7	4

Determine, exclusivamente en base a las soluciones entregadas en la tabla, la mayor cota inferior y la menor cota superior para el valor óptimo del problema propuesto.

Solución: Nota de corrección: El alumno puede haber escalado las restricciones y el objetivo del modelo. Eso cambia los resultados de toda la pregunta, pero la lógica es la misma. Lo importante es que se demuestre consistencia con el modelo entregado en 2a.

(a) **(4 puntos)** El modelo es:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{máx} & 2x_1 & + & x_2 & & \\ s.a. & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 50 \\ & x_1 & + & 5x_2 & \leq & 70 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(b) **(3 puntos)** El dual es:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{mín} & 50y_1 & + & 70y_2 & & \\ s.a. & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 2 \\ & y_1 & + & 5y_2 & \geq & 1 \\ & y_1 & , & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(c) **(3 puntos)** El sistema de ecuaciones del Teorema de Holguras Complementarias es:

$$\begin{array}{rcl} (50 - (2x_1 + x_2)) \cdot y_1 & = & 0 \\ (70 - (x_1 + 5x_2)) \cdot y_2 & = & 0 \\ (2 - (2y_1 + y_2)) \cdot x_1 & = & 0 \\ (1 - (y_1 + 5y_2)) \cdot x_2 & = & 0 \end{array}$$

Si evaluamos la solución 1, que es $x_1 = 25$ y $x_2 = 0$ el sistema entrega $y_1 = 1 \geq 0$ e $y_2 = 0 \geq 0$, luego es primal y dual factible, por lo tanto es solución óptima.

Si evaluamos la solución 2, que es $x_1 = 20$ y $x_2 = 10$ el sistema entrega $y_1 = 1 \geq 0$ e $y_2 = 0 \geq 0$, luego es primal y dual factible, por lo tanto es solución óptima.

(d) **(5 puntos)** Para esto construyamos el primal y dual del problema. El primal es:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{máx} & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\ s.a. & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 50 \\ & x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & \leq & 70 \\ & x_1 & , & x_2 & & & \geq & 0 \end{array}$$

y el dual es:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{mín} & 50y_1 & + & 70y_2 & & \\ s.a. & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 2 \\ & y_1 & + & 5y_2 & \geq & 1 \\ & y_1 & + & 4y_2 & = & 4 \\ & y_1 & , & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

con esto se puede construir la siguiente tabla:

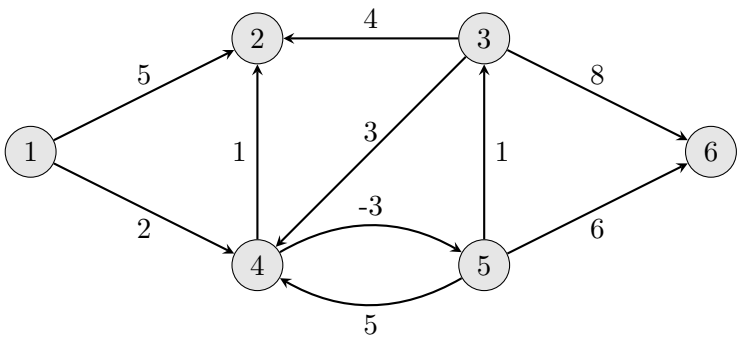
Soluciones Propuestas	¿Punto Extremo?	x_1	x_2	x_3	z	y_1	y_2	¿Primal Fact.?	¿Dual Fact.?
$S1$	NO	10	8	2	36	–	–	SI	–
$S2$	NO	9	7	7	53	–	–	NO	–
$S3$	SI	0	0	50	200	4	0	NO	SI
$S4$	NO	8	7	4	39	–	–	SI	–

Luego, de la tabla se desprende que la mejor cota inferior es 39 y la mejor cota superior es 200.

Pregunta 3 (15 puntos)

En el siguiente grafo $G = (N, A)$ se define un Problema de Flujo a Costo Mínimo (PFCM) sin capacidades y flujos no negativos sobre una red de 6 nodos. Los costos c_a por unidad de flujo están detallados sobre cada arco $a \in A$. Lamentablemente las ofertas netas b_i de cada nodo $i \in N$ no se encuentran disponibles, pero se conoce un solución factible:

$x_{12} = 1$, $x_{14} = 1$, $x_{36} = 2$, $x_{42} = 1$, $x_{53} = 2$, $x_{54} = 5$, $x_{56} = 1$ y el resto de los flujos son nulos.



(a) **(2 puntos)** Derive el valor de b_i para cada nodo $i \in N$ en el grafo.

(b) **(2 puntos)** Ahora considere otra solución factible, que está dada por:

$x_{14} > 0, x_{32} > 0, x_{34} > 0, x_{53} > 0, x_{56} > 0$ y el resto de los flujos son nulos.

Derive los valores de cada variables en esta solución.

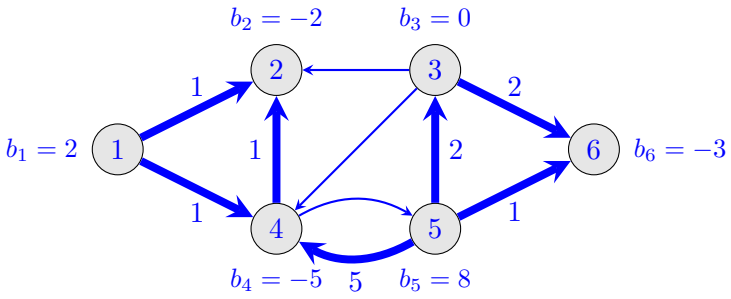
(c) **(2 puntos)** ¿Cuál(es) de las dos soluciones entregadas es un vértice (punto extremo)? Justifique.

(d) **(5 puntos)** Encuentre todas las soluciones óptima de este PFCM. Justifique su respuesta.

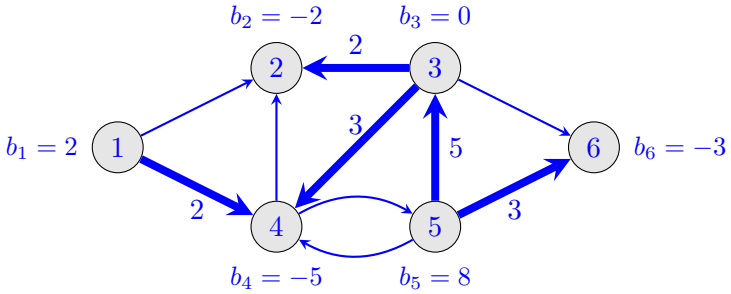
(e) **(4 puntos)** ¿En qué rango de valores debe estar el costo del arco $(3, 2)$ (actualmente en 4) para que exista una solución óptima única con flujo positivo por el arco $(3, 2)$?

Solución:

(a) Se puede evaluar la solución y obtener b_i para cada nodo:

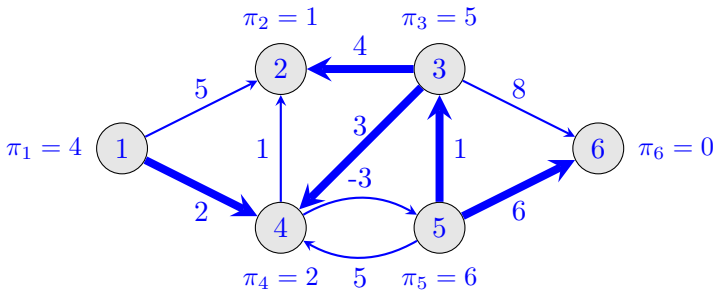


(b) Esta es:



(c) La segunda solución es un árbol-base factible, mientras que la primera no lo es (posee ciclos). Luego, la segunda solución es un vértice.

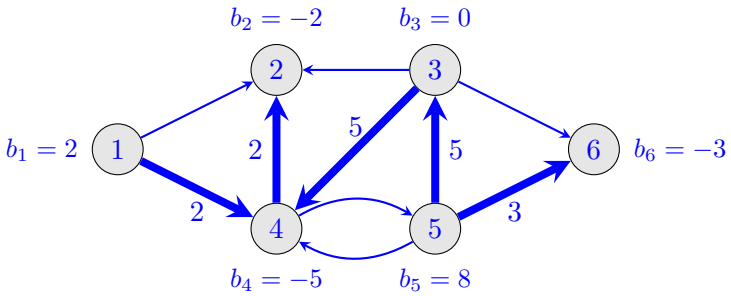
(d) Una estrategia es iniciar con el vértice entregado que resulta ser una solución óptima, tal como se aprecia en el grafo a continuación que detalla potenciales



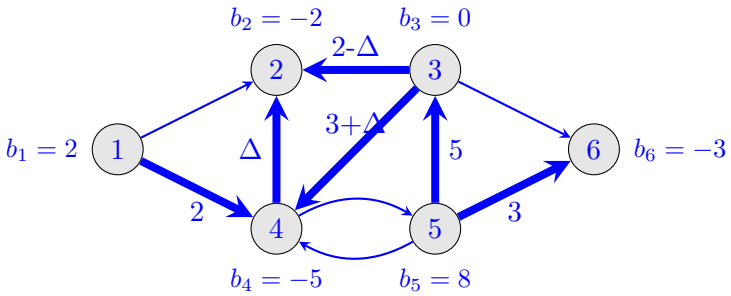
Los costos reducidos fuera de base son

- $r_{12} = 5 - 4 + 1 = 2$
- $r_{36} = 8 - 5 + 0 = 3$
- $r_{42} = 1 - 2 + 1 = 0$
- $r_{45} = -3 - 2 + 6 = 1$
- $r_{54} = 5 - 6 + 2 = 1$

, por lo que existe solución múltiple. La segunda solución vértice óptima es:



cuyas variables duales y costos reducidos son idénticos al problema anterior. Luego, la siguiente familia de soluciones es óptima para todo $\Delta \in [0, 2]$:



(e) El segundo vértice debe dejar de ser óptimo con $(3, 2)$ fuera de base. Para ello, se debe cumplir que $r_{3,2} = c_{3,2} - 5 + 1 < 0$, lo que implica $c_{3,2} < 4$.

Pregunta 4 (15 puntos)

(a) **(3 puntos)** Sea P un problema de optimización lineal con n variables dado por:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. ¿Es la siguiente afirmación verdadera? Justifique.

"Si existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $c^T x \geq b^T y$ para un $x \geq 0$ tal que $Ax \leq b$, entonces P admite solución óptima."

Solución: Falso, se requiere que y sea dual factible para asegurar existencia de solución óptima.

(b) **(3 puntos)** Sea P un problema lineal entero de minimización y sea P^L su relajación lineal. Por otro lado, considere otro problema lineal entero de maximización D y su respectiva relajación lineal D^L que, además, es el problema dual de P^L. ¿Es la siguiente afirmación verdadera? Justifique.

"Si P es infactible y D es factible, entonces D es no acotado."

Solución: Falso. Si P es infactible, puede darse que P^L sea factible. En ese caso, cualquier solución factible de P^L acota a D^L (teorema débil), y sabemos que D^L acota a D, por lo que no necesariamente es no acotado.

(c) **(3 puntos)** Suponga que usted está resolviendo un problema lineal entero de minimización mediante el algoritmo de Branch & Bound. Usted comienza resolviendo la relajación lineal del problema y obtiene solución óptima única. Luego, ramifica en una variable $x_k = q$ que posee valor fraccionario creando dos nodos P_1 y P_2, con restricciones $x_k \leq \lfloor q \rfloor$ y $x_k \geq \lfloor q \rfloor + 1$, respectivamente. Muestre que, si la relajación lineal de P_1 posee solución óptima, entonces su solución debe cumplir $x_k = \lfloor q \rfloor$.

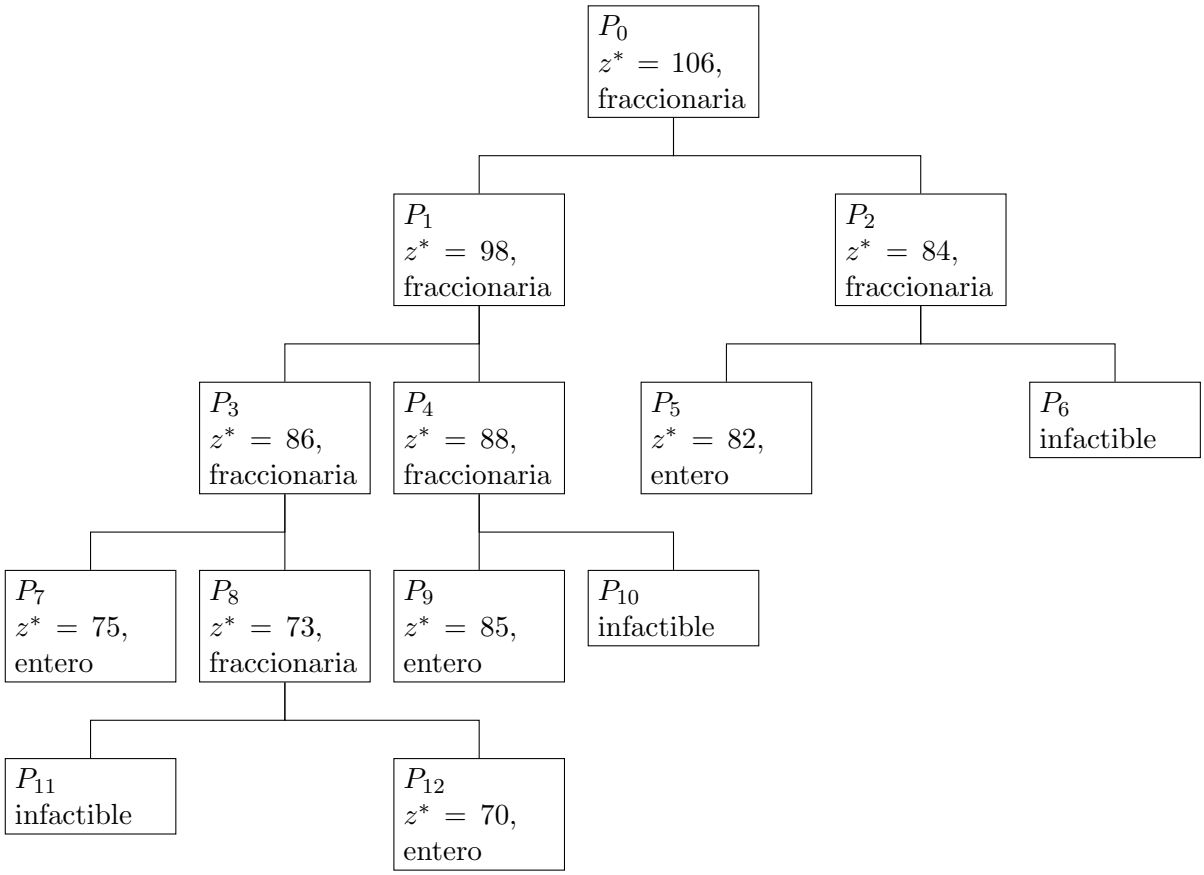
Solución: Nota: Esta es una forma (hay muchas otras).

Sea D_0 y D_1 los problemas duales de las relajaciones lineales de P_0 y P_1, respectivamente. P_1 es idéntico al problema original (P_0) con una restricción adicional. Esto implica que D_1 posee una columna (variable) más que D_0 (dual de P_0).

Demostremos por contradicción: supongamos que la solución óptima de P_1 cumple $x_k < q$. Esto implica que su variable dual asociada debe valer cero, por lo que la solución óptima de D_1 es igual a la solución óptima de D_0. Luego $v(D_0) = v(D_1)$

Por otro lado sabemos que $v(P_0) < v(P_1)$ (La solución óptima de P_0 relajado es única) y se hace infactible al agregar la nueva restricción. Además, por teorema de dualidad fuerte, se tiene $v(D_0) < v(D_1)$, lo que contradice lo enunciado.

(d) Considere el siguiente árbol completo de Branch & Bound (mostrado en la figura). Cada nodo detalla el valor óptimo de su relajación lineal y, además, si es que la solución óptima relajada obtenida es entera, infactible o fraccionaria. Cada ramificación separa un problema en dos subproblemas con una restricción adicional cada uno.



Basándose en la información anterior, responda:

(i) **(3 puntos)** Hay dos estrategias para priorizar el orden en que se resuelven las relajaciones lineales de nodos abiertos en el árbol:

- ◇ *Breadth First Search* (BFS): Resolver por niveles de profundidad, siempre de izquierda a derecha. En este caso, P_0, P_1, P_2, P_3, etc.
- ◇ *Depth First Search* (DFS): Resolver siempre el nivel más profundo del árbol tomando primero al nodo izquierdo. En este caso, P_0, P_1, P_3, P_7, P_8, etc.

¿Cuál requiere resolver menos relajaciones lineales de nodos?

(ii) **(3 puntos)** Suponga ahora que por temas de recursos, usted solo puede resolver 7 nodos. ¿Cuál estrategia logra un mejor incumbente? ¿Cuáles son las mejores cotas superiores e inferiores en cada estrategia?

Solución:

(i) La estrategia 2 requiere resolver menos nodos. La estrategia 1 requiere resolver 11 nodos (poda los problemas P_{11} y P_{12}), mientras que la estrategia 2 requiere resolver 9 nodos (poda los problemas P_5, P_6,P_{11} y P_{12})

(ii) La estrategia 2. La estrategia 1 llega a la solución de P_5 con valor 82, mientras que la estrategia 2 llega a P_9 con un valor de 85.

La estrategia 1 posee cotas de 82 y 88, mientras que la estrategia 2 posee cotas de 85 y 106.