PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2014
Profesores: P.Álvarez - P.Carrillo - A.Cataldo
H.Larraín - A.Lüer - J.Vera

EXAMEN

Duración: 2 horas y 15 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado, **con letra clara y legible**. *Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

La prueba cuenta con 66 puntos, basta sumar 60 puntos de estos puntos para obtener un 7.0 como nota.

Pregunta 1 (15 puntos)

(a) (**3 puntos**) Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, y en cualquiera de los casos justifique con precisión su respuesta: "un problema de flujo a costo mínimo en el cual la oferta supera a la demanda no puede ser resuelto con el algoritmo SIMPLEX especializado a redes".

Respuesta: La afirmación es falsa como está planteada, ya que la red puede ser modificada (con un nodo y arcos auxiliares, que son como variables de holgura) para que quede equilibrada, y ahí es aplicable el algoritmo.

(b) (**3 puntos**) Considere el problema de Programación Lineal:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ s.a. & Ax \leq b \end{array}$$

Escriba las condiciones KKT para este problema y argumente que los correspondientes multiplicadores de Lagrange son soluciones óptimas del problema dual a P).

Respuesta: El problema es de maximización, así que lo primero que haremos será cambiarlo a

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & -c^T x \\ s.a. & Ax \leq b \end{array}$$

para que esté en nuestro formato estándar. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ el vector de multiplicadores de Lagrange. El Lagrangeano es:

$$L(x,u) = -c^T x + u^T(Ax - b)$$

Las condiciones KKT dicen que si x^* es óptimo, entonces existen multiplicadores $u^* \geq 0$ tales que:

$$-c + A^T u^* = 0, (u^*)^T(b - Ax^*) = 0$$

lo que significa que $A^T u^* = c$. Ahora, el dual de P) es:

$$D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & b^T u \\ s.a. & A^T u = c, u \geq 0 \end{array}$$

Entonces, se ve claramente que u^* es factible para D). Por otro lado, como se cumplen condiciones de holguras complementarias, eso implica de inmediato la igualdad de las funciones objetivos y, por lo tanto, u^* es óptimo.

(c) (**3 puntos**) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. Suponga que $\bar{x}$ es tal que $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Si $Hf(\bar{x})$, el Hessiano de f en $\bar{x}$, es una matriz semidefinida positiva, ¿qué puede decir sobre el punto $\bar{x}$?

Respuesta: No puede decirse nada concluyente. El teorema (visto en clases) exige que el Hessiano sea una matriz definida positiva para asegurar un mínimo local. Además, tampoco podemos asegurar convexidad de f ya que la propiedad del Hessiano es sólo en el punto $\bar{x}$.

(d) (**3 puntos**)"Un problema de Optimización que sea convexo siempre tiene soluciones óptimas". ¿Es verdadera o falsa esta afirmación? En cualquiera de los casos, justifique con precisión.

Respuesta: La afirmación es falsa, porque tenemos primero que asegurar que sea factible y, aún así, todavía podría ser no acotado. Programación Lineal entrega un ejemplo de esto.

(e) (**3 puntos**) "En la Fase I del algoritmo SIMPLEX, si al llegar al óptimo una variable artificial es básica, entonces el problema es infactible". ¿Es verdadera o falsa esta afirmación? En cualquiera de los casos, justifique con precisión.

Respuesta: La afirmación es falsa, porque la solución óptima puede ser degenerada y si esa variable artificial es básica y vale 0, podría todavía ser sacada de la base y el problema todavía es factible.

Pregunta 2 (12 puntos)

(a) (**6 puntos**) Considere la siguiente función:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + \alpha x_2^2 + 5x_1 + 6x_2$$

Queremos resolver el problema de optimización no lineal no restringido:

$$\min_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)$$

(i) (**2 puntos**) Determine el rango de valores de α que garantizan que esta función es convexa. Justifique con precisión su argumento.
Respuesta: Para este problema, su gradiente es,

$$\nabla f\,(x_1, x_2) = (8x_1 + 4x_2 + 5,\ 4x_1 + 2\alpha x_2 + 6)$$

Y su Hessiano es,

$$Hf\,(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Luego, buscamos que Hf sea definido positivo. Una alternativa es buscar los valores para los que,

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 \\ 4 & 2\alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Tenga ambas raíces en λ reales y positivas, o bien que todos los determinantes de los menores principales sean positivos, que es más fácil. Es decir, se buscan los valores de α tales que,

$$8 > 0(\text{trivial}), \quad 16\alpha - 16 > 0 \ \Rightarrow\ \alpha > 1$$

(ii) (**4 puntos**) Suponga que $\alpha = 4$ (que está en el rango que usted determinó en (i)). Partiendo del punto $(x_1^0, x_2^0) = (10, 10)$, desarrolle una iteración del método del gradiente para encontrar el mínimo de la función.
Respuesta: Es decir, la función a considerar es,

$$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 5x_1 + 6x_2$$

En los métodos de descenso, la fórmula de actualización de las coordenadas es,

$$x^{k+1} = x^k + \lambda^k d^k$$

Donde la dirección de descenso es $d^k = -\nabla f\left(x^k\right)$. Si,

$$\nabla f\left(x_1, x_2\right) = \left(8x_1 + 4x_2 + 5,\ 4x_1 + 8x_2 + 6\right)$$

Entonces $d^0 = -\nabla f\left(x^0\right) = (-125, -126)$. Con esto, las nuevas coordenadas vendrán dadas por,

$$\begin{aligned} x_1^1 &= 10 - 125\lambda^0 \\ x_2^1 &= 10 - 126\lambda^0 \end{aligned}$$

La función objetivo parametrizada en λ^0 resulta ser,

$$f\left(\lambda^0\right) = 4\left(10 - 125\lambda^0\right)^2 + 4\left(10 - 125\lambda^0\right)\left(10 - 126\lambda^0\right) + 4\left(10 - 126\lambda^0\right)^2 + 5\left(10 - 125\lambda^0\right) + 6\left(10 - 126\lambda^0\right)$$

Derivando respecto a λ^0, resulta,

$$\frac{df}{d\lambda^0}\left(\lambda^0\right) = 8\left(10 - 125\lambda^0\right) + 4\left(10 - 125\lambda^0\right)\cdot -126 + 4\left(10 - 126\lambda^0\right)\cdot -125 + 8\left(10 - 126\lambda^0\right) + 5\cdot -125 + 6\cdot -126$$

La raíz de $\frac{df}{d\lambda^0}\left(\lambda^0\right) = 0$ es $\lambda^{0*} = \frac{11261}{123992}$. Con esto se pueden calcular las nuevas coordenadas, de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} x_1^1 &= 10 - \tfrac{11261}{123992}125 \approx -1,353 \\ x_2^1 &= 10 - \tfrac{11261}{123992}126 \approx -1,443 \end{aligned}$$

(b) (**6 puntos**) Usted ha recibido N invitaciones para asistir al teatro callejero durante esta temporada. El teatro callejero ha programado M funciones para esta temporada (asuma que $M < N$) y usted tiene que decidir a qué función va, pudiendo eventualmente invitar algunos amigos con sus entradas (una entrada por persona). Para usted asistir a la función m le reporta un beneficio de B_m unidades de felicidad más A_m unidades de felicidad por cada amigo que invite (y si no voy a una función, no invito ningún amigo).

Formule el problema de programación dinámica que le permita determinar la manera más adecuada para utilizar sus invitaciones (es decir, escriba la recursión de Programación Dinámica, definiendo con claridad los elementos que use).

Respuesta: Definamos los componentes de un modelo de programación dinámica determinística:

- ◇ Etapas: cada uno de las M funciones.
- ◇ Variables de Decisión:

  x_m, variable binaria que indica si asistirá a la función de teatro callejero m.

  y_m, variable discreta que indica la cantidad de invitaciones que hará para la función de teatro callejero m.
- ◇ Variables de Estado:
  S_m, cantidad de entradas disponibles justo antes de la función de teatro callejero m.
- ◇ Función de Recurrencia:
$$S_{m+1} = \text{Max}\left\{0, S_m - x_m - y_m\right\}$$
- ◇ Condiciones iniciales:
$$S_1 = N$$
- ◇ Condiciones del problema:

  No invitar a amigos si no asiste a la función callejera respectiva:

$$y_m \leq N \cdot x_m$$

◇ Función de Utilidad:

$$U_m = B_m \cdot x_m + S_m \cdot y_m$$

◇ Valor Residual: No existe en este problema.

◇ Utilidad Futura:

$$V_m = B_m \cdot x_m + S_m \cdot y_m + V_{m+1}\left(\text{Max}\left\{0, S_m - x_m - y_m\right\}\right)$$

Pregunta 3 (10 puntos)

Dado el siguiente problema,

$$\begin{array}{rl} P)\ \min & (x_1-3)^2+(x_2-1)^2 \\ \text{s.a.} & -x_1+x_2 \leq 2 \\ & x_1+2x_2 \leq 2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

(a) (**1 punto**) Resuelva P) gráficamente.

(b) (**2 punto**) Plantee las condiciones de KKT para P).

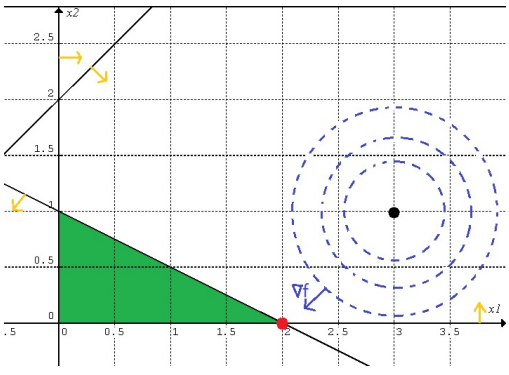
(c) (**2 puntos**) Determine si la solución gráfica obtenida en (a) satisface las condiciones de KKT planteadas en (b).

(d) (**2 puntos**) Muestre formalmente que la solución obtenida en (a) es el óptimo global del problema.

(e) (**3 puntos**) ¿Cómo interpreta el valor de los multiplicadores asociados a las restricciones?

Pauta

(a) El dominio del problema se muestra en la Figura 1 en verde, mientras que las curvas de nivel del objetivo se muestran como trazos discontinuos. Se observa que la función objetivo mide la distancia (al cuadrado) de los puntos factibles a $(3,1)$, que es el mínimo del problema irrestricto. Dentro del dominio, el punto más cercano es el vértice $V3$ del poliedro resultante, con coordenadas $(x_1^*, x_2^*) = (2,0)$, con valor óptimo $z^* = 2$, y denotado por un punto rojo.



(b) El lagrangeano asociado es,

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = (x_1-3)^2 + (x_2-1)^2 + \lambda_1(-x_1+x_2-2) + \lambda_2(x_1+2x_2-2) \tag{1}$$

Las condiciones de KKT para el problema,

$$x_1^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = 0 \Rightarrow x_1^*\left[2(x_1^*-3) - \lambda_1^* + \lambda_2^*\right] = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) \geq 0 \Rightarrow 2(x_1^* - 3) - \lambda_1^* + \lambda_2^* \geq 0 \tag{3}$$

$$x_2^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = 0 \Rightarrow x_2^* [2(x_2^* - 1) + \lambda_1^* + 2\lambda_2^*] = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) \geq 0 \Rightarrow 2(x_2^* - 1) + \lambda_1^* + 2\lambda_2^* \geq 0 \tag{5}$$

$$\lambda_1^* [g_1(x_1^*, x_2^*) - b_1] = 0 \Rightarrow \lambda_1^* [-x_1^* + x_2^* - 2] = 0 \tag{6}$$

$$g_1(x_1^*, x_2^*) \leq b_1 \Rightarrow -x_1^* + x_2^* \leq 2 \tag{7}$$

$$\lambda_2^* [g_2(x_1^*, x_2^*) - b_2] = 0 \Rightarrow \lambda_2^* [x_1^* + 2x_2^* - 2] = 0 \tag{8}$$

$$g_2(x_1^*, x_2^*) \leq b_2 \Rightarrow x_1^* + 2x_2^* \leq 2 \tag{9}$$

$$x_1^*, x_2^* \geq 0 \tag{10}$$

$$\lambda_1^*, \lambda_2^* \geq 0 \tag{11}$$

(c) Reemplazando las coordenadas $(2, 0)$ en las condiciones resulta lo siguiente,

$$\begin{gathered}
2[2(2-3) - \lambda_1^* + \lambda_2^*] = 0 \\
2(2-3) - \lambda_1^* + \lambda_2^* \geq 0 \\
0[2(0-1) + \lambda_1^* + 2\lambda_2^*] = 0 \\
2(0-1) + \lambda_1^* + 2\lambda_2^* \geq 0 \\
\lambda_1^*(-2 + 0 - 2) = 0 \\
-2 + 0 \leq 2 \\
\lambda_2^*(2 + 2 * 0 - 2) = 0 \\
2 + 2 * 0 \geq 2 \\
2 \geq 0,\ 0 \geq 0 \\
\lambda_1^*, \lambda_2 \geq 0
\end{gathered}$$

Que se reduce a,

$$\begin{gathered}
2(2-3) - \lambda_1^* + \lambda_2^* = 0 \\
2(0-1) + \lambda_1^* + 2\lambda_2^* \geq 0 \\
\lambda_1^* = 0 \\
\lambda_2^* \geq 0
\end{gathered}$$

Cuya solución entrega $\lambda_2^* = 2$ que es consistente con todo el sistema anterior. Es decir, la solución $(x_1^*, x_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = (2, 0, 0, 2)$ satisface las condiciones de KKT del problema, luego es un punto estacionario regular.

(d) Al estudiar el problema se observa que,

i. La función objetivo es convexa estricta (basta ver que su matriz Hessiana es definida positiva para todo valor de (x_1, x_2).

ii. El dominio es convexo, porque es la intersección de espacios convexos (desigualdades lineales).

Luego, el problema es convexo, y por tanto las condiciones de primer orden (KKT) bastan para asegurar optimalidad global de los puntos obtenidos. Además se sabe que este punto será único, debido a la convexidad estricta de la función objetivo.

(e) Los valores óptimos de los multiplicadores son estimaciones lineales de las tasas de cambio del objetivo ante cambios (pequeños) en los lados derechos de las restricciones. El hecho que $\lambda_1^* = 0$ indica que el valor óptimo no cambiara ante cambios pequeños en el primer lado derecho, lo que es consistente con que la restricción está inactiva en el óptimo. Por otra parte, $\lambda_2^* = 2$ indica que el valor óptimo variará 2 Δ_{b_2} unidades, si el segundo lado derecho pasa de ser $b_2 = 2$ a $b_2' = 2 + \Delta_{b_2}$.

Pregunta 4 (14 puntos)

(a) (**7 puntos**) En el hotel El Colorcillo del Amico, que es propiedad de Don Giordini, se encuentran hospedadas 10 personas. Para la jornada de hoy 3 de estas personas asistirán a una misa en la Plaza de San Pedro, otras 3 deben llegar a las Catacumbas de San Sebastián para un tour guiado, y las últimas 4 irán al estadio olímpico de Roma a ver un partido de fútbol.

La distancia en kilómetros que separa los puntos de interés se muestra en la siguiente tabla.

Origen\ Destino	Hotel	Plaza	Estadio	Catacumbas
Hotel	-	1	13	12
Plaza	-	-	4	-
Estadio	13	5	-	4
Catacumbas	4	-	-	-

Don Giordino desea aconsejar a sus huéspedes sobre el camino que deben hacer para llegar a cada lugar, acompañarlos a al menos uno de estos sitios y dirigirse de regreso a su hotel (los huéspedes se quedarán realizando sus actividades). Todo esto, buscando minimizar la distancia total recorrida por el grupo completo (esto considera a los 10 huéspedes realizando sus actividades y a Don Giordini de regreso en su hotel).

Para ello, le ha solicitado a usted que:

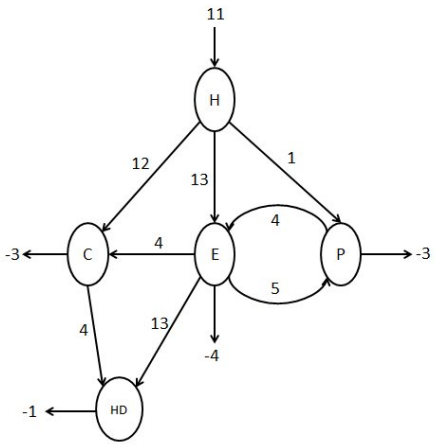
(i) (**2 puntos**) Construya un grafo que permita representar la situación antes descrita como un problema de flujo a costo mínimo.

(ii) (**1 puntos**) Obtenga "visualmente"la solución óptima del problema.

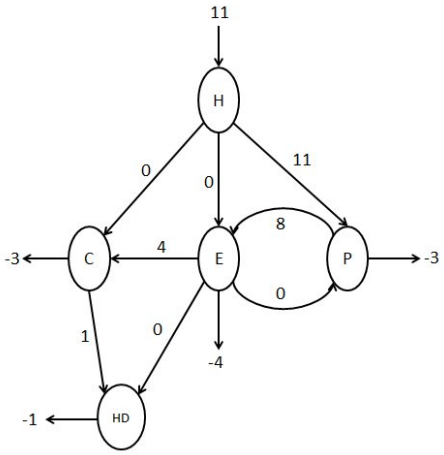
(iii) (**4 puntos**) Utilice el criterio de optimalidad del algoritmo Simplex especializado en redes (para el problema de Flujo a Costo Mínimo) para demostrar que la solución que obtuvo en (ii) es óptima.

Pauta (a)

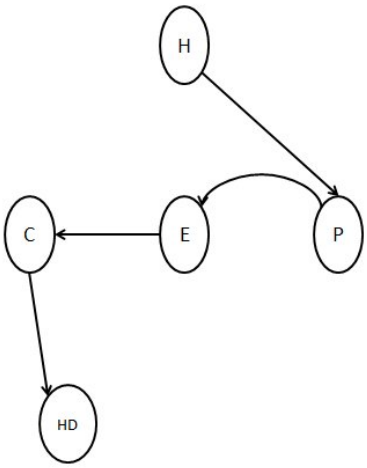
(i) Considerando que la cota inferior de todos los arcos es 0 y no posee cota superior, el grafo queda (mostrando la distancia en cada arco):



(ii) La solución sería:



(iii) El árbol básico asociado a la solución de (ii) es:



el sistema de ecuaciones para calcular las variables duales es:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \bar{c}_{H,P} & = & c_{H,P} - \pi_H + \pi_P & = & 1 - \pi_H + \pi_P & = & 0 \\ \bar{c}_{P,E} & = & c_{P,E} - \pi_P + \pi_E & = & 4 - \pi_P + \pi_E & = & 0 \\ \bar{c}_{E,C} & = & c_{E,C} - \pi_E + \pi_C & = & 4 - \pi_E + \pi_C & = & 0 \\ \bar{c}_{C,HD} & = & c_{C,HD} - \pi_C + \pi_{HD} & = & 4 - \pi_C + \pi_{HD} & = & 0 \end{array}$$

de donde, una vez fijado $\pi_H = 0$, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} \pi_H & = & 0 \\ \pi_P & = & -1 \\ \pi_E & = & -5 \\ \pi_C & = & -9 \\ \pi_{HD} & = & -13 \end{array}$$

ahora, el cálculo del costo reducido de las variables no básicas queda:

$$\begin{array}{rcrcrcll} \bar{c}_{H,C} & = & c_{H,C} - \pi_H + \pi_C & = & 12 - (0) + (-9) & = & 3 \geq 0 & \checkmark \\ \bar{c}_{H,E} & = & c_{H,E} - \pi_H + \pi_E & = & 13 - (0) + (-5) & = & 8 \geq 0 & \checkmark \\ \bar{c}_{E,P} & = & c_{E,P} - \pi_E + \pi_P & = & 5 - (-5) + (-1) & = & 9 \geq 0 & \checkmark \\ \bar{c}_{E,HD} & = & c_{E,HD} - \pi_E + \pi_{HD} & = & 13 - (-5) + (-13) & = & 5 \geq 0 & \checkmark \end{array}$$

Se verifica que la solución entregada en (ii) es óptima pues todas las variables no básicas cumplen con su respectivo criterio de optimalidad.

(b) (**7 puntos**) Considere el siguiente problema de Programación Lineal:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & 3x_1 + 4x_2 - x_3 \\ s.a. & -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 3 \\ & 3x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(i) (**4 puntos**) Escriba el problema dual a P) y, a partir de la solución óptima del problema dual, determine la solución óptima de P). Justifique con precisión sus argumentos.

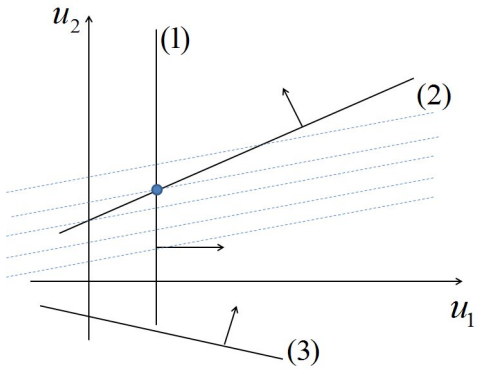
(ii) (**3 puntos**) Determine a cuánto debe cambiar el lado derecho de la primera restricción de P) de modo que el problema sea infactible. Justifique con precisión su argumento.

Pauta (b)

(i) El problema dual es:

$$D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & -3u_1 + 6u_2 \\ s.a. & 2u_1 \geq 3 \\ & -2u_1 + 3u_2 \geq 4 \\ & 4u_1 + 3u_2 \geq -1 \\ & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{array}$$

El gráfico muestra el problema y el punto destacado es la solución óptima, que tiene coordenadas $(u_1^*, u_2^*) = (3/2, 7/3)$, para un valor óptimo igual a $9,5$.



La restricción (3) del dual es inactiva, con lo cual concluimos de inmediato (por holguras complementarias) que $x_3^* = 0$. Además, como $(u_1^*, u_2^*) > 0$, se tiene que las dos restricciones del primal se cumplen con igualdad. Luego, las demás variables óptimas del primal salen del sistema:

$$\begin{array}{rl} -2x_1 + 2x_2 & = 3 \\ 3x_2 & = 6 \end{array}$$

Luego, la solución óptima del primal es $x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1/2, 2, 0)$, para un valor que también da (como tiene que ser) $9,5$.

(ii) Si hacemos el dual no acotado, el primal será infactible. Eso se logra si la pendiente de la función objetivo del problema dual (que es actualmente igual a 3/6=1/2) se hace igual o mayor a 2/3. Eso se logra si el valor 3 cambia a 4 ya que ahí la pendiente sería igual a $4/6 = 2/3$.

Pregunta 5 (15 puntos)

Un fanático de fútbol vive en Santiago y está pensando en asistir a las eliminatorias de "La Roja" en su camino a Rusia 2018. Se jugarán N partidos (con N par), conociéndose la programación de éstos desde ya. Las eliminatorias están organizadas en "fechas dobles", que constan de un primer partido el primer viernes de cada mes y el lunes siguiente a ese viernes. Es decir, el partido 1 se juega el primer viernes del primer mes, el 2 el lunes siguiente, el 3 el primer viernes del segundo mes, y así sucesivamente. Cada partido puede ser de local o visita, lo que está descrito por el parámetro A_n, que vale 1 si el partido n se juega fuera de Chile, y 0 si se juega de local (la localía es siempre en Santiago).

Si este hincha asiste a los dos partidos de una fecha doble en que "La Roja" juega ambos de visita, viajará de Santiago a la ciudad del primer partido, luego a la ciudad en la que se juega el segundo partido (de la fecha doble) y luego regresa a Santiago. Si sólo uno de los partidos es de visita, va y vuelve a la ciudad de ese partido, y si ambos son en Santiago, obviamente no tiene que viajar a ningún lado.

El precio de la entrada al partido n es C_n unidades monetarias. El costo del pasaje desde Santiago a la ciudad donde se jugará el partido n es de H_n unidades monetarias, y el pasaje de retorno a Santiago desde la ciudad donde se juega el partido n tiene un costo de K_n unidades monetarias. El costo del pasaje desde la ciudad donde se realiza el partido n a la ciudad donde se jugará el partido $n+1$ es de G_n unidades monetarias. Recuerde que ésto sólo se considera en una fecha doble con dos partidos de visita para Chile.

A este hincha, asistir al partido n le genera una felicidad valorada en B_n unidades de felicidad. Además, cuenta con un presupuesto de R unidades monetarias.

Basándose en la información anterior, formule un modelo de programación lineal entera binario, que permita a este esforzado hincha tomar las decisiones para maximizar su felicidad, sin superar el presupuesto del que dispone.

Pauta

Pauta Opción A: Esta respuesta es válida solamente si definieron el parámetro adicional.

Primero definimos un nuevo conjunto y un nuevo parámetro con base en la información entregada:

Conjunto Nuevo

NI: conjunto de partidos que son comienzo de fecha doble, y entonces, con $n = 1, 3, 5, \ldots, N-1$.

Parámetros Nuevo

α_n: parámetro binario que vale 1 si $A_n \cdot A_{n+1} = 1$, y que vale 0 en cualquier otro caso.

considerando esto, y asumiendo que existen los costos de todos los desplazamientos, incluso Santiago-Santiago, pero que éste pasaje y/o descuenta toma valor 0. Con esto se tiene:

Variables

x_n: variable binaria que vale 1 si este fanático asistirá al partido n, y que vale 0 en cualquier otro caso.

y_n: variable binaria que vale 1 si este fanático asistirá a los dos partidos de una fecha doble que comienza con el partido $n \in NI$, y que vale 0 en cualquier otro caso.

Función objetivo Maximizar la felicidad de este hincha:

$$\text{máx} \sum_{n=1}^{N} B_n x_n$$

R1) Debe respetarse el presupuesto.

$$\sum_{n=1}^{N} C_n x_n + \sum_{n=1}^{N} (H_n + K_n) x_n + \sum_{n \in NI} (G_n - H_{n+1} - K_n) y_n \alpha_n \leq R$$

R2) Primera relación entre las variables.

$$y_n \geq x_n + x_{n+1} - 1 \qquad \text{para } n \in NI.$$

R2) Segunda relación entre las variables.

$$2y_n \leq x_n + x_{n+1} \qquad \text{para } n \in NI.$$

R4) Naturaleza de la variable

$x_n \in \{0, 1\}$, para $n = 1, \ldots, N$.
$y_n \in \{0, 1\}$, para $n \in NI$.

Pauta Opción B.

Variables

x_n: variable binaria que vale 1 si este fanático asistirá al partido n, y que vale 0 en cualquier otro caso.

y_n: variable binaria que vale 1 si este fanático asistirá a la fecha doble que parte en el partido n, y vale 0 en otro caso.

z_n: variable binaria que vale 1 si este fanático asistirá sólo al primer partido de una fecha doble que parte en el partido n, y vale 0 en otro caso.

u_n: variable binaria que vale 1 este fanático si asistirá sólo al segundo partido de una fecha doble que parte en el partido n, y vale 0 en otro caso.

w_n: variable binaria que vale 1 este fanático si no asistirá a ambos partidos de una fecha doble que parte en el partido n, y vale 0 en otro caso.

Función objetivo Maximizar la felicidad de este hincha:

$$\text{máx} \sum_{n=1}^{N} B_n x_n$$

Restricciones

R1) Debe respetarse el presupuesto.

$$\sum_{n=1}^{N} C_n x_n + \sum_{n=1:\text{n es impar}}^{N-1} (G_n + H_n + K_{n+1}) y_n A_n A_{n+1} + \sum_{n=1}^{N-1} (H_n + K_n) y_n A_n (1 - A_{n+1})$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} (H_{n+1} + K_{n+1}) y_n (1 - A_n) A_{n+1} + \sum_{n=1}^{N} (H_n + K_n) z_n A_n$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} (H_{n+1} + K_{n+1}) u_n A_{n+1} \leq R$$

R2) Fijar en 0 todas las variables que no son comienzo de fecha doble (para n par):

$$y_n + z_n + u_n + w_n = 0 \qquad \text{para } n = 2, 4, 6, \ldots, N.$$

R3) En cada fecha doble debe escoger un tipo de asistencia al par de partidos:

$$y_n + z_n + u_n + w_n = 1 \qquad \text{para } n = 1, 2, 5, \ldots, N-1.$$

R4) Construir variable y_n, cota inferior.

$$y_n \geq x_n + x_{n+1} - 1 \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots, N-1.$$

R5) Construir variable y_n, cota superior.

$$2y_n \leq x_n + x_{n+1} \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots, N-1.$$

R6) Construir variable z_n, cota inferior.

$$z_n \geq x_n - x_{n+1} \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots, N-1.$$

R7) Construir variable z_n, cota superior.

$$z_n \leq x_n \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots, N-1.$$

R8) Construir variable u_n, cota inferior.

$$u_n \geq x_{n+1} - x_n \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots, N-1.$$

R9) Construir variable u_n, cota superior.

$$u_n \leq x_{n+1} \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots, N-1.$$

R10) Naturaleza de las variables

$x_n \in \{0, 1\}$, para $n = 1, \ldots, N$.
$y_n \in \{0, 1\}$, para $n = 1, \ldots, N$.
$z_n \in \{0, 1\}$, para $n = 1, \ldots, N$.
$u_n \in \{0, 1\}$, para $n = 1, \ldots, N$.
$w_n \in \{0, 1\}$, para $n = 1, \ldots, N$.