PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2014
Profesores: P.Álvarez - P.Carrillo - A.Cataldo
H.Larraín - A.Lüer - J.Vera

Pauta Interrogación 1

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. Al finalizar su prueba, debe dejar los cuadernillos en su puesto, estos serán retirados por los ayudantes. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (10 puntos)

a) (**3 puntos**) Encuentre el equivalente lineal diferenciable de minimización del siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{\ln(2x+3y+4z)} \\ \text{s.a.} \quad & e^{|3x+5y+7z|} \leq 5 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 1 \end{aligned}$$

Es decir, escriba un problema equivalente que sólo tenga restricciones y función objetivo lineales.

Respuesta: Comencemos por el objetivo:

$$\min \frac{1}{\ln(2x+3y+4z)} \equiv \max\ \ln(2x+3y+4z)$$

Componiendo con la función creciente $\exp(\cdot)$, queda,

$$\max\ \ln(2x+3y+4z) \equiv \max\ 2x+3y+4z$$

La restricción queda como sigue,

$$e^{|3x+5y+7z|} \leq 5 \equiv |3x+5y+7z| \leq \ln(5)$$

Es decir,

$$|3x+5y+7z| \leq \ln(5) \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} 3x+5y+7z & \leq & \ln(5) \\ 3x+5y+7z & \geq & -\ln(5) \end{array} \right.$$

b) (**3 puntos**) Considere el problema

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) \\ s.a. & x \in D \end{array}$$

donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado pero no necesariamente acotado. Entregue un ejemplo de P) con estas dos características, con una función f continua en D tal que existe un B que

hace que $f(x) \geq B$, para todo $x \in D$, y donde P) no tenga solución óptima.

RESPUESTA: Un ejemplo de esto es e^{-x} en el intervalo $[0, \infty)$. El intervalo es un conjunto cerrado y no acotado, la función es continua en ese intervalo y acotada inferiormente por 0. Sin embargo, no alcanza el ínfimo.

c) (**2 puntos**) Considere la siguiente función:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^4 + \alpha x_2^3$$

¿Para qué valores de α el problema mín $f(x_1, x_2)$ no tiene solución?

RESPUESTA: El primer sumando siempre crece cuando x_1 crece mientras que el segundo puede decrecer sin límite si $\alpha \neq 0$ y x_2 toma valores ya sea positivos o negativos según sea el caso.

d) (**2 puntos**) "Si un problema convexo tiene solución óptima, entonces ésta es única". ¿Es verdad o no esta afirmación? Justifique.

RESPUESTA: Esto es simplemente los conceptos de la clase: no necesariamente será único a menos que la función objetivo sea estrictamente convexa.

Pregunta 2 (12 puntos)

a) (**4 puntos**) Una empresa debe planificar la producción para los próximos T periodos de un conjunto J de sus productos. Para ello ha construido un modelo de optimización en donde la variable x_{jt} corresponde a la cantidad producida del producto $j \in J$ en el periodo $t \in 1, \ldots, T$. También se usa en el modelo la variable binaria z_{jt}, que vale 1 si se produce el producto $j \in J$ en el periodo $t \in 1, \ldots, T$, y 0 si no se produce. Dadas estas definiciones, responda:

i) ¿Qué significa la siguiente restricción y cómo interpretaría los conjuntos C_t?

$$z_{j_1,t} + z_{j_2,t} \leq 1, \ \forall\, (j_1, j_2) \in C_t, \ t \in 1, \ldots, T$$

donde C_t es un conjunto de pares de índices de productos.

ii) ¿Qué significa la siguiente restricción y cómo puede interpretarse el parámetro M_{jt}?

$$x_{jt} \geq M_{jt} z_{jt}, \ \forall j \in J, \ t \in 1, \ldots, T$$

RESPUESTA:

i) La restricción evita que algunos pares (j_1, j_2) de productos sean producidos en un mismo periodo $t \in 1, \ldots, T$. Es decir, los conjuntos C_t pueden interpretarse como los pares de productos "incompatibles" de ser fabricados en un mismo período $t \in 1, \ldots, T$.

ii) La restricción obliga a producir al menos M_{jt} unidades de un cierto producto $j \in J$, en el período $t \in 1, \ldots, T$, si se decide hacerlo. Así, M_{jt} puede interpretarse como el lote más pequeño que puede producirse en el período $t \in 1, \ldots, T$ del producto $j \in J$.

b) (**4 puntos**) Considere la siguiente función definida en $\mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x_j)^{p_j}$$

donde los exponentes p_j son números enteros positivos, $j = 1, \ldots, n$, y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son escalares.

i) ¿Para qué valores de los coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se puede garantizar que el problema mín $f(x)$ tiene solución? Justifique con claridad su respuesta sobre la base de los conocimientos del curso.

ii) Considere ahora el problema

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) \\ s.a. & \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq 1 \end{array}$$

¿Para qué valores de los coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se puede garantizar que el problema $P)$ tiene solución? Justifique con claridad su respuesta sobre la base de los conocimientos del curso. Comente sobre cualquier diferencia con su respuesta en i).

RESPUESTA: La parte i) es una generalización y sofisticación del análisis de la pregunta 2. En este caso, cuando p_j es par, α_j debe ser ≥ 0. Si p_j es impar, se podrá argumentar no acotamiento de la función, así que α_j debe ser cero para que garantizadamente exista solución.

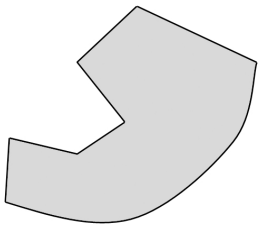
En la parte ii), los valores pueden ser cualesquiera ya que el dominio es cerrado y acotado y eso prima sobre el análisis de la parte i).

c) (**4 puntos**) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Se define el conjunto $conv(S)$, llamado envoltura convexa de S, de la siguiente manera:

$$conv(S) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : k \in \mathbb{N}, x_i \in S, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, \ldots, k; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

i) Muestre que $conv(S)$ es un conjunto convexo.

ii) Considere el conjunto de la figura:



Dibuje la envoltura convexa de este conjunto (la solución a esta pregunta debe estar graficada en su hoja de respuesta).

RESPUESTA:

i) Sean x, $y \in conv(S)$, entonces:

$$x = \sum_{i=1}^{k} v_i x_i$$

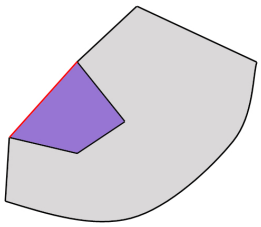
$$y = \sum_{i=1}^{m} u_i y_i$$

donde $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m \in S$ y $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m$ son ponderadores de las combinaciones convexas.
Sea $\lambda \in [0,1]$ y $\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda \sum_{i=1}^{k} v_i x_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} u_i y_i$.
Si se llama $z_i = x_i, \alpha_i = \lambda v_i, \forall i = 1, \ldots, k$ y $z_{k+i} = y_i, \alpha_{k+i} = (1-\lambda)u_i \forall i = 1, \ldots, m$, se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y = \sum_{i=1}^{k+m} \alpha_i z_i$ con:

$$z_i \in S, \alpha_i \in [0,1], \forall i = 1, \ldots, k+m \text{ y } \sum_{i=1}^{k+m} \alpha_i = 1.$$

Luego, por definición se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)y \in conv(S)$, por lo tanto, $conv(S)$ es convexo.

ii) La siguiente figura entrega la envoltura convexa solicitada:



Pregunta 3 (10 puntos)

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{array}{llrcrcrcl} P) \text{ Min} & z & = & x_1 & - & x_2 & & & \\ \text{s.a:} & & & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 & (1) \\ & & & x_1 & & & \geq & -2 & (2) \\ & & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 & (3) \\ & & & & & x_2 & \geq & 0 & (4) \\ & & & x_1 & , & x_2 & \in \mathbb{R} & & \end{array}$$

i) (**1 punto**) Grafique el poliedro formado por el dominio del problema.

ii) (**2 puntos**) Demuestre, a partir de los contenidos del curso, que el problema P) admite solución óptima.

iii) (**2 puntos**) Identifique los puntos extremos (también definidos en clases como vértices) del poliedro definido para el problema P), escriba claramente cuáles son y muestre cuál de ellos corresponde al óptimo. Describa y justifique claramente sus respuestas.

iv) (**2 puntos**) Considere ahora que se quita la cuarta restricción del problema P). ¿Se puede garantizar la optimalidad con este nuevo dominio? Muestre gráficamente qué ocurre con el dominio y la nueva solución en caso que exista.

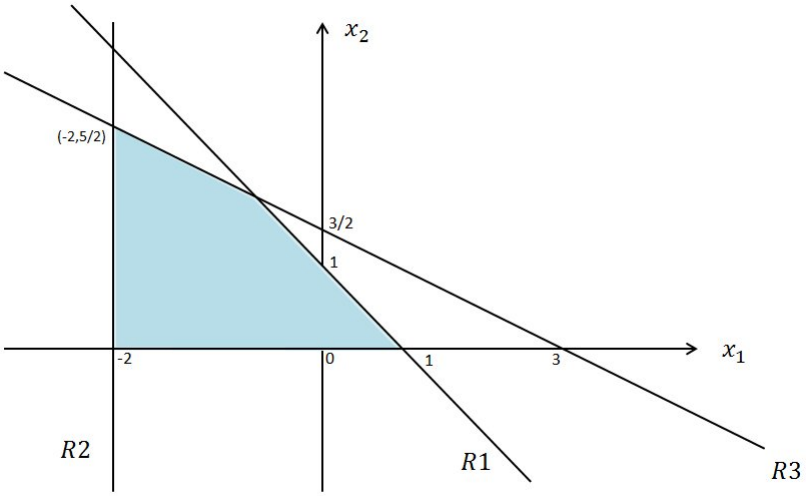
v) Suponga que la función objetivo z del problema P) es cambiada por la siguiente: $z = x_1 - 2x_2$. Se denomina P') a este nuevo problema.

   a) (**1 punto**) ¿Qué ocurre con el poliedro del nuevo problema P')?

   b) (**2 puntos**) ¿Qué ocurre con la solución encontrada originalmente para el problema P). ¿Se mantiene o cambia? Si cambia, ¿cuál es la nueva solución para el problema P')?

Solución:

i) (**1 punto**) En el siguiente gráfico corresponde se muestra el espacio de soluciones factibles de P).



ii) (**2 puntos**) La función objetivo es continua pues es una recta (polinomio de grado 1). El espacio es cerrado pues está construido por desigualdades no estrictas. El espacio es acotado pues de las restricciones se obtiene que $x_1 \in [-2, 1]$ y $x_2 \in [0, 3]$. El dominio es no vacío pues el punto $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ pertenece al dominio. Luego, por el teorema de Bolzano-Weierstrass se tiene que P) admite solución óptima.

iii) (**2 puntos**) Los puntos extremos de P) son: $(-2, 0) \mapsto z = -2$, $(1, 0) \mapsto z = 1$, $(-1, 2) \mapsto z = -3$ y $(-2, 5/2) \mapsto z = -9/2$. Para determinar cuál de ellos es el óptima, basta con evaluarlos en la función objetivo. Ahora, como se puede apreciar, la función objetivo privilegia los puntos más a la izquierda y más arriba en el espacio de soluciones factibles (poliedro). Dado esto, la solución es el punto extremo (-2,5/2), cuyo valor en la función objetivo es -9/2.

iv) (**2 puntos**) Si se elimina la cuarta restricción el dominio para la variable x_2 es $(-\infty, 3]$, claramente no acotado. Luego, el teorema de Bolzano-Weierstrass no asegura la existencia de solución óptima. Notar que a pesar de esto, se puede interpretar desde la figura que la solución óptima no cambiará.

v) Se tiene entonces que:

   a) (**1 punto**) No se ha modificado ninguna restricción, luego el dominio sigue siendo el mismo que en i).

   b) (**2 puntos**) Como el dominio se mantuvo constante, basta con evaluar los mismos puntos extremos de ii) en la nueva función objetivo. Se tiene entonces que: $(-2, 0) \mapsto z = -2$, $(1, 0) \mapsto z = 1$, $(-1, 2) \mapsto z = -5$ y $(-2, 5/2) \mapsto z = -7$. Luego, se ve que la solución sigue siendo el punto extremo (-2,5/2).

Pregunta 4 (14 puntos)

Cuatro amigos que viven juntos deben ir a la Universidad todos los días. Cada uno de ellos está suscrito a un diario diferente y a las 7:00 de la mañana de cada día llegan las suscripciones. Entre ellos

comparten estas suscripciones y tienen la costumbre de mirarlas antes de irse a la Universidad. La siguiente tabla muestra cuánto se demora, en minutos, cada amigo en revisar cada diario.

Estudiante	El Mercurio	La Tercera	Diario Financiero	El Gráfico
Diego	20	5	0	15
Santiago	10	10	10	10
Antonio	0	15	15	10
Hernán	5	10	20	5

Formule un modelo de programación lineal entera mixta, que determine en qué orden deben leer los diarios estos amigos para terminar lo antes posible y poder salir todos juntos rumbo a la Universidad, considerando que cada estudiante debe leer cada diario, que puede leer un diario a la vez, y que cada diario puede ser revisado por sólo un estudiante en cada momento (es decir, no leen "de a dos").

Solución:

Transformando la información de la tabla en el parámetro α_{ij}, que representa cuánto tiempo demora el estudiante i, , con $i = 1, \ldots, 4$, en leer el diario j, , con $j = 1, \ldots, 4$.

◇ Variables:

- t_{ij}: tiempo en el que el estudiante i, con $i = 1, \ldots, 4$, comienza a leer el diario j, con $j = 1, \ldots, 4$.
- y_{ik}^{j}: variable binaria que toma valor 1 si el estudiante i, con $i = 1, \ldots, 4$, lee el diario j, con $j = 1, \ldots, 4$, antes que el estudiante k, , con $k = 1, \ldots, 4 : k \neq i$.
- z_{jr}^{i}: variable binaria que toma valor 1 si el estudiante i, con $i = 1, \ldots, 4$, lee el diario j, con $j = 1, \ldots, 4$, antes de leer el diario r, , con $r = 1, \ldots, 4 : r \neq j$.
- μ: variable que determina el tiempo que les tomará a los estudiantes partir rumbo a la universidad

◇ Función objetivo:

$$\text{mín } \mu$$

◇ Restricciones

- Condición 1 para secuenciamiento de lecturas entre estudiantes.

$$t_{ij} \geq t_{kj} + \alpha_{kj} - M_1(1 - y_{ki}^{j}),\ \forall i = 1, \ldots, 4, \forall k = 1, \ldots, 4 : k \neq i,\ \forall j = 1, \ldots, 4.$$

- Condición 2 para secuenciamiento de lecturas entre estudiantes.

$$\sum_{k=1:k\neq i}^{4} y_{ik}^{j} \leq 1,\ \forall i = 1, \ldots, 4,\ \forall j = 1, \ldots, 4.$$

- Condición 3 para secuenciamiento de lecturas entre estudiantes.

$$\sum_{i=1:i\neq k}^{4} y_{ik}^{j} \leq 1,\ \forall k = 1, \ldots, 4,\ \forall j = 1, \ldots, 4.$$

- Condición 4 para secuenciamiento de lecturas entre estudiantes.

$$\sum_{k=1}^{4} \sum_{i=1:i\neq k}^{4} y_{ik}^{j} = 3, \ \forall j = 1, \ldots, 4.$$

- Condición 1 para secuenciamiento de lecturas de diarios por un estudiante.

$$t_{ir} \geq t_{ij} + \alpha_{ij} - M_2(1 - z_{jr}^{i}), \ \forall i = 1, \ldots, 4, , \ \forall j = 1, \ldots, 4, \ \forall r = 1, \ldots, 4 : r \neq j.$$

- Condición 2 para secuenciamiento de lecturas de diarios por un estudiante.

$$\sum_{j=1:j\neq r}^{4} z_{jr}^{i} \leq 1, \ \forall i = 1, \ldots, 4, \ \forall r = 1, \ldots, 4.$$

- Condición 3 para secuenciamiento de lecturas de diarios por un estudiante.

$$\sum_{r=1:r\neq j}^{4} z_{jr}^{i} \leq 1, \ \forall i = 1, \ldots, 4, \ \forall j = 1, \ldots, 4.$$

- Condición 4 para secuenciamiento de lecturas de diarios por un estudiante.

$$\sum_{j=1}^{4} \sum_{r=1:r\neq j}^{4} z_{jr}^{i} = 3, \ \forall i = 1, \ldots, 4.$$

- Construcción de variable μ:

$$\mu \geq t_{ij} + \alpha_{ij}, \ \forall i = 1, \ldots, 4, \ \forall j = 1, \ldots, 4.$$

- Naturaleza de las variables.

$$y_{ik}^{j} \geq \{0, 1\}, \ \forall i = 1, \ldots, 4, \forall k = 1, \ldots, 4 : k \neq i, \ \forall j = 1, \ldots, 4.$$
$$z_{jr}^{i} \geq \{0, 1\}, \ \forall i = 1, \ldots, 4, \forall j = 1, \ldots, 4, \ \forall r = 1, \ldots, 4 : r \neq j.$$
$$t_{ij} \geq 0, \ \forall i = 1, \ldots, 4, \ \forall j = 1, \ldots, 4.$$
$$\mu \geq 0$$

Pregunta 5 (18 puntos)

Para la gran final de un programa de televisión, dos equipos se enfrentan en una competencia en la que el equipo que logra recorrer una mayor distancia en T horas es el ganador.

Usted es el capitán de uno de los equipos, formado por n integrantes. Se conoce la velocidad máxima a la que puede desplazarse el integrante i en la hora t, y está dada por el parámetro v_{it} kilómetros por hora, donde t representa cada una de las T horas de competencia, $t = 1, \ldots, T$, e $i = 1, \ldots, n$ representa a los integrantes del equipo. Al comienzo de cada hora cada integrante puede consumir una lata de bebida energética, lo que amplifica su velocidad máxima en $\alpha > 1$ para la hora donde es consumida (es decir, v_{it} pasa a ser αv_{it} durante esa hora). La velocidad a la que un individuo i se desplaza en la hora t se asume constante durante toda esa hora pero puede variar entre una hora y otra, pero no se puede superar la velocidad máxima (suponga, para simplificar, que el cambio de velocidad es instantáneo de una hora a la otra).

Por motivos de salud, cada integrante i no puede consumir más de A_i latas de bebida durante toda la competencia, a lo más una lata en cada hora y, una vez que haya consumido una lata, no puede

consumir otra al inicio de la siguiente hora (es decir, deben pasar al menos dos horas entre una lata y la siguiente). Su equipo cuenta con un total de B latas de bebida al comienzo de la competencia, las que puede distribuir como quiera entre los integrantes de su equipo. Pero además de estas B latas, también puede acceder a un máximo de C latas adicionales. Sin embargo, si usa de estas latas adicionales, la organización hace incurrir a su equipo en una penalización de β kilómetros por cada lata extra consumida.

Adicionalmente, como regla de la competencia, se exige que en ningún momento el participante que va a la cabeza del equipo se aleje del que va al final en más de D kilómetros (notar que para que esta condición se cumpla en cualquier momento, basta con que se cumpla al comienzo de cada hora ya que la velocidad se mantiene constante dentro de la hora).

La distancia total recorrida por el equipo queda determinada por la posición del integrante del equipo que se encuentra más atrás al completarse las T horas. A esta distancia total se le descuenta la penalización en la que haya incurrido el equipo por latas adicionales, obteniéndose lo que llamaremos el **desempeño neto del equipo**.

Construya un modelo lineal que permita determinar la estrategia que maximiza el desempeño neto del equipo.

Solución:

◇ Variables:

- δ_{it}: variable binaria que indica si el individuo i, con $i = 1, \ldots, n$, consume una lata en el comienzo de la hora t, con $t = 1, \ldots, T$.
- x_{it}: variable continua que representa la distancia recorrida por el individuo i, $i = 1, \ldots, n$, al comienzo de la hora t, con $t = 1, \ldots, T$.
- y_{it}: variable continua que representa la velocidad del individuo i, $i = 1, \ldots, n$, en la hora t, con $t = 1, \ldots, T$.
- z: variable entera que representa el número de latas adicionales que serán consumidas.
- μ: variable continua que representa la distancia recorrida por el integrante del equipo que se encuentra más atrás al finalizar el período.

◇ Función objetivo:

$$\text{máx } \mu - \beta z$$

◇ Restricciones

- Distancia recorrida al comienzo del horizonte.

$$x_{i1} = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

- Construir la variable μ.

$$x_{iT} + y_{iT} \geq \mu, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

- Determinar la distancia recorrida hasta el comienzo de la hora t.

$$x_{it} = \sum_{r=1}^{t-1} y_{ir}, \ \forall i = 2, \ldots, n, \ \forall t = 1, \ldots, T.$$

- Determinación de la cota superior de velocidad en cada hora.

$$y_{it} \leq v_{it} + \delta_{it} (\alpha - 1) v_{it}, \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall t = 1, \ldots, T.$$

- Cota superior de latas que puede consumir el participante i.

$$\sum_{t=1}^{T} \delta_{it} \leq A_i, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

- Restringir la posibilidad de que un participante tome bebida en dos períodos consecutivos.

$$\delta_{it} + \delta_{it+1} \leq 1, \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall t = 1, \ldots, T-1.$$

- Primera construcción de la variable z.

$$z \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} \delta it \right) - B$$

- Segunda construcción de la variable z.

$$z \geq B - \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} \delta it \right)$$

- Acotar la variable z.

$$z \leq C$$

- Asegurar que la distancia entre el participante que va a la cabeza del equipo y el que va al final sea a lo más de D kilómetros.

$$x_{it} - x_{jt} \leq D, \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall j = 1, \ldots, n : j \neq i, \ \forall t = 1, \ldots, T.$$

- Naturaleza de las variables.

$$\delta_{it} \in \{0, 1\}, \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall t = 1, \ldots, T.$$
$$x_{it}, y_{it} \geq 0, \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall t = 1, \ldots, T.$$
$$z \in \mathbb{Z}_0^+, \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall t = 1, \ldots, T.$$
$$\mu \geq 0$$