PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2016
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado
F. Palomino - A. Cataldo - J. Vera

Solución Tarea 2

Fecha de Entrega: 16 de mayo.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día lunes 16 de Mayo a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (16 puntos)

a) (3 puntos) Considere el siguiente problema de mochila:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & 15x_1 + 8x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 12x_5 + 8x_6 = \displaystyle\sum_{i=1}^{6} u_i x_i & \\ \text{s.a.} & p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 + p_5x_5 + p_6x_6 & \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \in \{0,1\} \end{array}$$

Se sabe que el peso del cuarto elemento (p_4) es 10. Además, al resolver el problema relajado asociado a este problema se obtiene una sola variable fraccionaria, que es x_4. Determine condiciones sobre los valores p_1, p_2, p_3, p_5 y p_6 para que un corte generado con la técnica de covers sea

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \leq 3$$

y el elemento con más utilidad por unidad de peso (u_i/p_i) sea el asociado al índice 2.

b) (2 puntos) Los cortes de Gomory permiten acotar espacio fraccionario para un problema relajado, de tal manera que la solución óptima se acerque más a un óptimo entero. Generalmente suele realizarse el trabajo a partir de una forma canónica para llegar a uno o más cortes de Gomory. Haremos el trabajo inverso. Considere el siguiente problema de minimización en su forma canónica, y considere que $x_1, \ldots, x_4$ son las variables originales del problema, y que x_5, x_6 y x_7 son las de holgura de las 3 restricciones existentes:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \frac{13}{11}x_1 + \frac{35}{11}x_2 + \frac{16}{11}x_5 + \frac{4}{11}x_7 - \frac{340}{11} & \\ \text{s.a.} & \bar{A}x & \leq \begin{pmatrix} 15/22 \\ 350/11 \\ 85/22 \end{pmatrix} \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

Sean x_4, x_3 y x_6 las variables básicas que, como puede observar, son fraccionarias. Al realizar los cortes, se generan las tres siguientes expresiones:

$$\frac{3}{22}x_1 + \frac{7}{11}x_2 + \frac{1}{11}x_5 + \frac{17}{22}x_7 \geq \frac{15}{22}$$
$$\frac{4}{11}x_1 + \frac{4}{11}x_2 + \frac{10}{11}x_5 + \frac{8}{11}x_7 \geq \frac{9}{11}$$
$$\frac{17}{22}x_1 + \frac{3}{11}x_2 + \frac{2}{11}x_5 + \frac{1}{22}x_7 \geq \frac{19}{22}$$

Determine los valores de las componentes de alguna posible matriz $\bar{A}$ que generaría esos cortes.

c) (3 puntos) Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro no vacío, donde A es una matriz de $m \times n$ con al menos 2 componentes distintos de cero en cada fila, y con las columnas l.i. con respecto al vector b. Demuestre que

$$x_j = 0 \quad \forall x \in P \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists y \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } y^T A \geq 0, y^T b = 0 \text{ con } (y^T A)_j > 0$$

d) (3 puntos) Considere el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & 1000x_1 + 2034x_2 & \\ \text{s.a.} & 10x_1 + 2x_2 & \geq 10 \\ & 3x_1 & \leq 18 \\ & x_1 - x_2 & \leq 5 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

i) (2 puntos) Utilizando **solamente** conceptos de Simplex en Fase I, muestre que para el siguiente problema lineal tiene al punto (0,0) infactible, pero al punto (1,0) factible.

ii) (1 punto) Muestre que el dual de este problema es infactible.

e) (5 puntos) Considere el siguiente par de problemas primal-dual. Se sabe que el problema primal está bien escrito.

$$
\begin{array}{llllll}
(P) & \text{máx} & z = 2x_1 + x_2 & & (D) & \text{máx} \quad w = 2y_1 + -4y_2 \\
& \text{s.a.} & -x_1 + x_2 & \leq -4 & & \text{s.a.} \quad -y_1 + y_2 \leq 2 \\
& & x_1 - x_2 & \leq 2 & & y_1 - y_2 \leq 1 \\
& & x_1 & \geq 0 & & y_1 \geq 0 \\
& & x_2 & \geq 0 & & y_2 \leq 0
\end{array}
$$

i) (1 punto) Indique todos los errores, si existen, en la construcción del dual.

ii) (2 puntos) Muestre que ambos problemas, escritos correctamente, son infactibles.

iii) (2 puntos) ¿Por qué esto no contradice los teoremas de dualidad?

Solución Problema 1.

a) Asumiendo que todos los p_i son positivos, al ser un problema de mochila, para que x_4 sea fraccionario y ese sea el corte, se debe cumplir que

$$p_1 + p_2 + p_6 < 20$$

$$p_1 + p_2 + 10 + p_6 > 20$$

Además, para que esas sean las variables del corte, para que sea seleccionadas por la técnica de cover y para que u_2/p_2 sea el mayor, se debe cumplir que:

$$\frac{15}{8}p_2 < p_1 < 15 \qquad p_2 < 8 \qquad 20 < p_3$$

$$12 < p_5 \qquad p_2 < p_6 < 8$$

b) Una matriz $\bar{A}$ general, para cualquier valor a_{ij} entero, podría ser:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{3+22a_{11}}{22} & \frac{7+11a_{12}}{11} & 0 & 1 & \frac{1+11a_{15}}{11} & 0 & \frac{17+22a_{17}}{22} \\
\frac{4+11a_{21}}{11} & \frac{4+11a_{22}}{11} & 0 & 0 & \frac{10+11a_{25}}{11} & 1 & \frac{7+11a_{27}}{11} \\
\frac{17+22a_{31}}{22} & \frac{3+11a_{32}}{11} & 1 & 0 & \frac{2+11a_{35}}{11} & 0 & \frac{1+22a_{37}}{22}
\end{bmatrix}
$$

Nota de corrección: El problema debería haber tenido un cuerpo $\bar{A}x = \bar{b}$ para lograr la notación de forma canónica.

c) Consideremos los siguientes problemas primal y dual:

$$
\begin{array}{llll}
(P) & \text{máx} & 0^T x & \\
& \text{s.a.} & Ax & = b \\
& & x & \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
(D) & \text{mín} & y^T b & \\
& \text{s.a.} & y^T A & \geq 0
\end{array}
$$

- **Demostración $\Rightarrow$:** Como (P) es no vacío, tiene solución óptima finita. Esto implica que (D) tiene solución óptima finita.

  Sea $\bar{y}$ el óptimo de (D). Como $\bar{y}$ es factible, cumple $\bar{y}^T A \geq 0$. Luego, por dualidad fuerte, se cumple que $\bar{y}^T b = 0$.

  Si $x_j = 0, \forall x \in P$, entonces la restricción dual asociada a este x_j no es activa para ningún y, por lo que se cumple que $(\bar{y}^T A)_j > 0$.

- **Demostración $\Leftarrow$:** Si $(y^T A)_j > 0$, entonces por el Teorema de Holguras Complementarias, se debe cumplir que $x_j = 0$.

NOTA DE CORRECCIÓN: El enunciado de este documento cambió con respecto al enunciado anterior, agregándose que A debe tener al menos 2 componentes distintas de 0 en cada fila y que las columnas de A deben ser l.i. con respecto al vector b. Esto se hizo ya que algunos alumnos hicieron notar que sin considerar esas características no era posible demostrar la doble implicancia. Si, en su respuesta, demuestran que sin considerar la información recién agregada no es posible lograr la demostración, tienen el puntaje completo.

d) i) Primero, el problema en su forma estándar es:

$$\begin{array}{lll} FE) & \text{mín} & -1000x_1 - 2034x_2 \\ & \text{s.a.} & 10x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \\ & & 3x_1 + x_4 = 18 \\ & & x_1 - x_2 + x_5 = 5 \\ & & x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Luego, construyamos la Fase I del problema, reconociendo que las últimas dos columnas de la identidad ya están dadas por las columnas asociadas a las variables x_4 y x_5:

$$\begin{array}{lll} FI) & \text{mín} & h_1 \\ & \text{s.a.} & 10x_1 + 2x_2 - x_3 + h_1 = 10 \\ & & 3x_1 + x_4 = 18 \\ & & x_1 - x_2 + x_5 = 5 \\ & & x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \\ & & h_1 \geq 0 \end{array}$$

- ◇ **Punto (0,0):** Si $x_1 = x_2 = 0$, entonces $x_3 = 0, x_4 = 18, x_5 = 5, h_1 = 10$ y la base queda determinada por las variables h_1, x_4 y x_5. En este punto, el valor de la función objetivo es

$$z_{h_1,x_4,x_5} = 10 \neq 0$$

y, como es distinto de cero, podemos asegurar que esa base no corresponde a una base factible.

- ◇ **Punto (1,0):** Si $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$, entonces $x_3 = 0, x_4 = 15, x_5 = 4, h_1 = 0$ y la base queda determinada por las variables x_1, x_4 y x_5. En este punto, el valor de la función objetivo es

$$z_{x_1,x_4,x_5} = 0$$

y, como es cero, podemos asegurar que esa base sí corresponde a una base factible.

ii) El problema en cuestión es no acotado, por lo que el dual debe ser infactible, como corolario del **teorema débil de dualidad**.

e) i) Los problemas corregidos son:

$$\begin{array}{llll} (P) & \text{máx} & z = 2x_1 + x_2 & \\ & \text{s.a.} & -x_1 + x_2 & \leq -4 \\ & & x_1 - x_2 & \leq 2 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llll} (D) & \text{mín} & w = -4y_1 + 2y_2 & \\ & \text{s.a.} & -y_1 + y_2 & \geq 2 \\ & & y_1 - y_2 & \geq 1 \\ & & y_1, y_2 & \geq 0 \end{array}$$

ii)
- ◇ El problema primal es infactible ya que, multiplicando la primera restricción por -1, ambas restricciones ($x_1 - x_2 \geq 4$ y $x_1 - x_2 \leq 2$) no pueden ocurrir simultáneamente (conjuntos disjuntos).
- ◇ El problema dual también es infactible ya que, multiplicando la primera restricción por -1, ambas restricciones ($y_1 - y_2 \leq -2$ y $y_1 - y_2 \geq 1$) no pueden ocurrir simultáneamente (conjuntos disjuntos).

iii) Esto no invalida los teoremas de dualidad vistos en clases, dado que estos se basan en la hipótesis de que las soluciones son factibles para que sean cotas del problema dual respectivo.

Problema 2. (18 puntos)

La verdad es que Yiyo sigue estudiando desde temprano para las Interrogaciones. No queda duda: es una persona muy responsable. Sin embargo, sus hermanos Nico y Andy siempre lo llaman desde sus piezas para distraerlo. Así, ellos no se sienten tan culpables por no estudiar lo suficiente. Con tanto entrar y salir de su pieza, se le perdió nuevamente el desarrollo de los ejercicios que estaba haciendo. Lo único que le quedó fue el modelo matemático del **dual** de un problema. Ayudémosle a re-hacer el ejercicio, para que pueda seguir estudiando. Para ello:

$$
\begin{array}{llll}
D) & \text{máx} & 5y_1 + 2y_2 & \\
 & \text{s.a.} & 4y_1 + 3y_2 & \geq 8 \\
 & & -y_1 + 4y_2 & \leq 36 \\
 & & 2y_1 - y_2 & \leq 12 \\
 & & y_1 & \leq 8 \\
 & & y_2 & \geq 0
\end{array}
$$

a) (1 punto) Determine el problema primal, del cual este es dual.

b) (2 puntos) Resuelva el problema dual, y determine el óptimo del problema primal utilizando conceptos de dualidad. Indique claramente los valores óptimos y el valor objetivo óptimo.

c) (1 punto) ¿Cuánto cambia el valor objetivo óptimo **dual** si el coeficiente que acompaña a x_1 en el **primal** cambia a 15?

d) (1 punto) ¿Y cuánto cambia el valor objetivo óptimo **primal** si el coeficiente del lado derecho de la restricción 4 **dual** cambia de 8 a 10?

e) (2 puntos) ¿Cuánto cambia el valor objetivo **dual** si el coeficiente que acompaña a la variable y_1 **dual** cambia de 5 a 7? Use conceptos de precio sombra.

Cuando Yiyo vio sus respuestas, a él no se le hizo familiar el desarrollo realizado. Al revisar bien el modelo que usted le entregó, se dio cuenta que la cuarta restricción que él le dio en un principio estaba mal escrita. Conteste las siguientes preguntas considerando ahora que la cuarta restricción dual, en lugar de ser $y_1 \leq 8$ es $y_1 \leq 12$.

f) (1 punto) ¿Qué ocurre en el óptimo dual? ¿Y en el óptimo primal?

g) (2 puntos) Determine los valores óptimos de las variables duales y primales para los puntos asociados a la(s) base(s) óptima(s).

h) (1 punto) Use la información en (g) para responder: ¿Cuánto cambia el valor del óptimo **primal** si cambiamos el coeficiente que acompaña a la x_3 en el **primal** a 14?

i) (1,5 puntos) Use la información en (g) para responder: ¿Y si cambia a 10?

j) (1,5 puntos) Use la información en (g) para responder: ¿Cuánto cambia el valor del óptimo **dual** si la restricción cambia de $y_1 \leq 12$ a $y_1 \leq 11$?

Yiyo anda algo distraído. Acaba de encontrar una de sus hojas de desarrollo y descubrió que, en realidad, la restricción **sí** era $y_1 \leq 8$. Sin embargo, el problema **primal** que había determinado tiene una nueva columna, y el problema **dual** (D) presentado al inicio de la pregunta tiene una nueva restricción.

k) (2 puntos) El **primal** contaba con una columna nueva asociada a una variable s no-negativa, tal que $A_s = (0 \;\; 1)^T$ y $c_s = 15$. ¿Qué cambios ocurren en el **dual**? ¿Cambia la solución encontrada en (b) tanto para el primal como para el dual? No considere aún la pregunta (l) para responder esto.

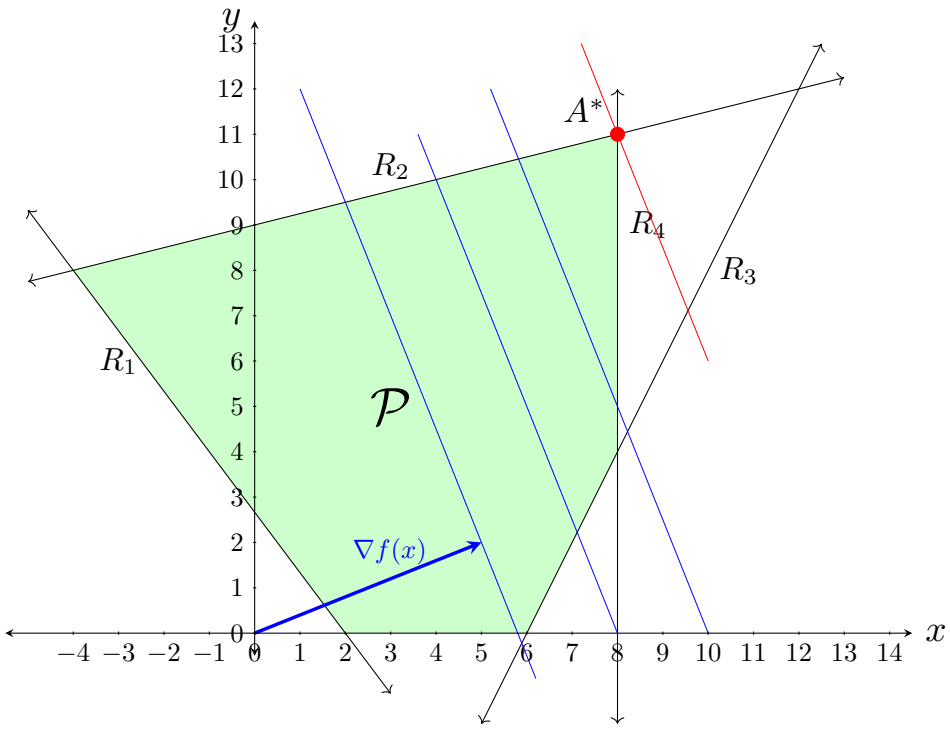
l) (2 puntos) La restricción ausente en el **dual** es $\frac{5}{2}y_1 + 2y_2 \leq 25$. ¿Qué cambios ocurren en el **primal**? ¿Cambia la solución encontrada en (b) tanto para el primal como para el dual?

Solución Problema 2.

a) El problema primal del dual que tiene Yiyo es

$$\begin{array}{llll} (P) & \text{mín} & z = 8x_1 + 36x_2 + 12x_3 + 8x_4 & \\ & \text{s.a.} & 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = 5 \\ & & 3x_1 + 4x_2 - x_3 & \geq 2 \\ & & x_1 & \leq 0 \\ & & x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

b) Dado que el problema dual tiene 2 variables, lo más sencillo sería resolver gráficamente el problema dual y usar el Teorema de Holguras Complementarias para determinar el valor óptimo primal.



Del gráfico se puede determinar que A^* es el óptimo dual, asociado al punto (8,11). Dado que en ese punto las restricciones 2 y 4 son activas y las restricciones 1 y 3 son inactivas ($x_1 = x_3 = 0$), al usar el Teorema Holguras Complementarias, y teniendo en cuenta que $y_1 = 8, y_2 = 11$, las ecuaciones que nos permitirán determinar el óptimo primal son las asociadas a la primera y segunda restricción dual

$$\begin{array}{rcl} y_1(4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 5) = 0 & \rightarrow & -x_2 + x_4 = 5 \\ y_2(3x_1 + 4x_2 - x_3 - 2) = 0 & \rightarrow & 4x_2 = 2 \end{array}$$

De esta manera,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 11/2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, los valores óptimos son

$$w^* = 5 \cdot 8 + 2 \cdot 11 = 62 = 8 \cdot 0 + 36 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{11}{2} = z^*$$

que cumple con el Teorema Fuerte de Dualidad.

c) Un cambio en el coeficiente que acompaña a x_1 en el primal, implica un cambio en el coeficiente de recurso dual asociado a la primera restricción. Es decir, el recurso de la primera restricción que es 8 cambia a 15. **Luego de verificar que la base no cambia** (se puede usar criterio de factibilidad de Simplex o de manera gráfica viendo que la base óptima siga siendo factible), podemos usar los valores de las variables primales como precios sombra:

$$\begin{aligned}(b_1' - b_1) \cdot x_1^* &= \Delta w \\ (15 - 8) \cdot 0 &= \Delta w \\ \Delta w &= 0\end{aligned}$$

Luego, la función objetivo dual no se ve afectada. Cabe analizar que esto tiene sentido, dado que la primera restricción está inactiva.

d) Al cambiar nuevamente un recurso dual, el valor objetivo puede cambiar. **Luego de verificar que la base no cambia** (se puede usar criterio de factibilidad de Simplex o de manera gráfica viendo que la base óptima siga siendo factible), podemos usar los valores de las variables primales como precios sombra para ver cuánto afecta al valor objetivo:

$$\begin{aligned}(b_4' - b_4) \cdot x_4^* &= \Delta w \\ (10 - 8) \cdot \frac{11}{2} &= \Delta w \\ \Delta w &= 11\end{aligned}$$

Luego, la función objetivo dual cambia en 11 unidades. Dado que la base óptima dual no cambió, podemos decir que la primal tampoco. Luego, $\Delta w = \Delta x$ y entonces el valor de la función objetivo primal óptima también cambia en 11 unidades.

e) El coeficiente que acompaña a la variable y_1 en el dual es el coeficiente del lado derecho de la primera restricción primal. Luego, es un análisis de sensibilidad sobre el primal. Podemos usar las variables duales como precio sombra. **Luego de verificar que la base no cambia** (se puede usar criterio de factibilidad de Simplex o de manera gráfica viendo que la base óptima siga siendo factible), podemos ver cuánto afecta al valor objetivo:

$$\begin{aligned}(c_1' - c_1) \cdot y_1^* &= \Delta z \\ (7 - 5) \cdot 8 &= \Delta z \\ \Delta z &= 16\end{aligned}$$

Así, dado que la base no cambia, y siguiendo el mismo análisis que la pregunta anterior

$$\Delta w = 16$$

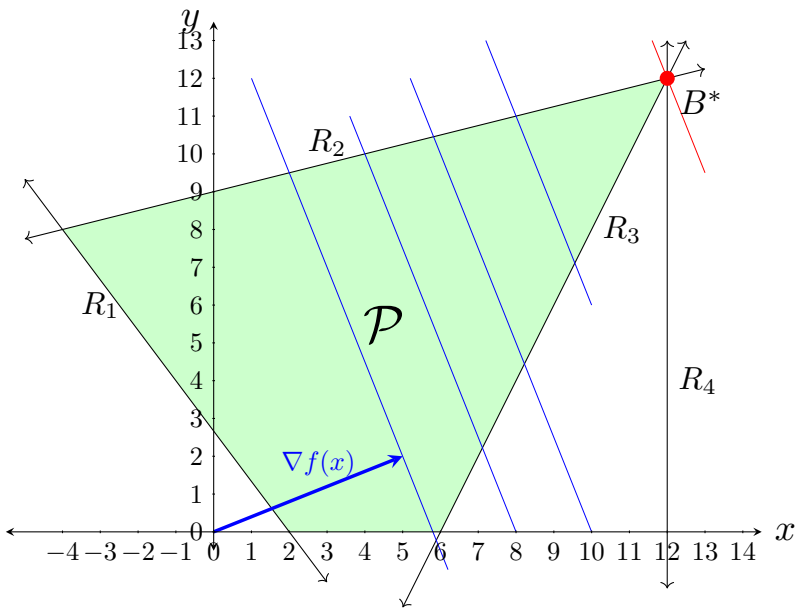
f) El nuevo par dual-primal queda

$$\begin{array}{llll} (D) & \text{máx} & 5y_1 + 2y_2 & = w \\ & \text{s.a.} & 4y_1 + 3y_2 & \geq 8 \\ & & -y_1 + 4y_2 & \leq 36 \\ & & 2y_1 - y_2 & \leq 12 \\ & & y_1 & \leq 12 \\ & & y_2 & \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llll} (P) & \text{mín} & 8x_1 + 36x_2 + 12x_3 + 12x_4 & = z \\ & \text{s.a.} & 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = 5 \\ & & 3x_1 + 4x_2 - x_3 & \geq 2 \\ & & x_1 & \leq 0 \\ & & x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Luego, sobre el gráfico del dual, podemos notar que una restricción, la cuarta, se mueve. El punto $B^* = (12, 12)$ es el óptimo.

La particularidad que ocurre en el óptimo dual es una solución degenerada, es decir, hay más de una base óptima asociada al mismo punto.

Ahora, en el primal, también tiene que haber multiples soluciones (por Teorema de Holguras Complementarias y Teorema Fuerte).



g) Para el óptimo dual, dado que la solución es degenerada, existe sólo un punto óptimo, el (12,12).

Para el óptimo primal, hay que usar Teorema de Holguras Complementarias para determinar los valores de las bases óptimas (ya sabemos que hay más de una). Dado que ahora hay sólo una (la primera) restricción inactiva, sólo sabemos que $x_1 = 0$, mientras que del resto no sabemos.

$$\begin{aligned} y_1(4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 5) = 0 \quad &\rightarrow \quad -x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ y_2(3x_1 + 4x_2 - x_3 - 2) = 0 \quad &\rightarrow \quad 4x_2 - x_3 = 2 \end{aligned}$$

De esta manera, para determinar los valores de las bases óptimas en el primal, debemos suponer inactividad de alguna restricciones (en caso de ser movida)

- ◇ Ante un movimiento en alguna restricción, la R_2 se vuelve inactiva. En ese caso, $x_2 = 0$. Así,

$$\begin{aligned} -x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \quad &\rightarrow \quad 2x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \quad &\rightarrow \quad -x_3 = 2 \end{aligned}$$

  Se determina que el valor de $x_3 = -2$, sin embargo, esto no es factible para la naturaleza de variables. Así, esta sería una base infactible. (Esto implica que exista una base de las 3 degeneradas del dual que no sería óptimo. ¿Es esto posible?).

- ◇ Ante un movimiento en alguna restricción, la R_3 se vuelve inactiva. En ese caso, volvemos al caso detallado en (b).

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 11/2 \end{pmatrix}$$

- ◇ Ante un movimiento en alguna restricción, la R_4 se vuelve inactiva. En ese caso, $x_4 = 0$. Así,

$$\begin{aligned} -x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \quad &\rightarrow \quad -x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_2 - x_3 = 2 \quad &\rightarrow \quad 4x_2 - x_3 = 2 \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9/7 \\ 22/7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, los valores óptimos son

$$w^* = 5 \cdot 12 + 2 \cdot 12 = \mathbf{84} = 8 \cdot 0 + 36 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot 0 + 12 \cdot \frac{11}{2} = 8 \cdot 0 + 36 \cdot \frac{9}{7} + 12 \cdot \frac{22}{7} + 12 \cdot 0 = z^*$$

h) Al usar la información en (g), es necesario usar los valores de las variables y, por ende, el camino a seguir es realizando análisis sobre los precios sombra.

Cambiar el coeficiente de función objetivo primal es cambiar un recurso de restricción dual. Así, se está cambiando el recurso de la tercera restricción de 12 a 14. En este caso, la tercera restricción es la que se vuelve inactiva, por lo que habría que considerar los valores de $\vec{x}_1$.

$$\begin{aligned} (b_3' - b_3) \cdot x_3^* &= \Delta w^* \\ (14 - 12) \cdot 0 &= \Delta w^* \\ \Delta w^* &= 0 \end{aligned}$$

Luego, la función objetivo dual no se ve afectada. Dado que la base óptima dual de la que calculamos los valores no cambió, podemos decir que la primal tampoco. Luego $\Delta w^* = \Delta z^*$ y entonces el valor de la función objetivo primal cambia en 0 unidades.

i) Se está cambiando el recurso de la tercera restricción de 12 a 10. En este caso, la cuarta restricción es la que se vuelve inactiva, por lo que habría que considerar los valores de $\vec{x}_2$.

$$\begin{aligned} (b_3' - b_3) \cdot x_3^* &= \Delta w^* \\ (10 - 12) \cdot \frac{22}{7} &= \Delta w^* \\ \Delta w^* &= \frac{-44}{7} \end{aligned}$$

Luego, la función objetivo dual cambia en $-44/7$. Siguiendo el mismo análisis que en la pregunta anterior,

$$\Delta z^* = \frac{-44}{7}$$

j) Este es el mismo caso propuesto en (d), al estar manipulando la cuarta restricción y quedar la tercera inactiva. Luego,

$$\begin{aligned} (b_4' - b_4) \cdot x_4^* &= \Delta w^* \\ (11 - 12) \cdot \frac{11}{2} &= \Delta w^* \\ \Delta w^* &= \frac{-11}{2} \end{aligned}$$

Luego, la función objetivo dual cambia en $-11/2$.

k) El problema primal que les dio Yiyo, como su resultado, es

$$
\begin{array}{lll}
(P) \quad \text{mín} & z = 8x_1 + 36x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 15s & \\
\text{s.a.} & 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = 5 \\
& 3x_1 + 4x_2 - x_3 + s & \geq 2 \\
& x_1 & \leq 0 \\
& x_2, x_3, x_4, s & \geq 0
\end{array}
$$

Una nueva columna en el primal, implica una nueva fila (restricción) en el dual.

Para ver si cambió la solución habría que estudiar factibilidad. De manera gráfica podemos determinar que una restricción $y_2 \leq 15$ es redundante, y por ende no altera el espacio de soluciones factibles. Mucho menos el óptimo determinado en (b). Por lo tanto, sigue siendo la misma solución óptima.

l) Una restricción nueva en el dual implica una nueva columna (variable) en el primal, quedando

$$
\begin{array}{lll}
(P) \quad \text{mín} & z = 8x_1 + 36x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 15s + 25x_6 & \\
\text{s.a.} & 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + \frac{5}{2}x_6 & = 5 \\
& 3x_1 + 4x_2 - x_3 + s + 2x_6 & \geq 2 \\
& x_1 & \leq 0 \\
& x_2, x_3, x_4, s, x_6 & \geq 0
\end{array}
$$

Esta restricción sí corta el espacio y la solución óptima A^*, luego la solución sí cambia.

Problema 3. (16 puntos)

a) (8 puntos) Don Zippy, un humilde y emprendedor microempresario, está planeando adquirir la franquicia de la prestigiosa cadena de comida rápida estadounidense "McChrono". Don Zippy tiene todo listo: la negociación está en una etapa avanzada, por lo que desea saber desde ya cuántas unidades de cada una de sus hamburguesas va a producir.

La franquicia le da derecho a producir 2 de las hamburguesas de McChrono: "McChrono Salvaje" y "Mc-Chrono Extra Queso". Cada unidad de McChrono Salvaje requiere de 3 hamburguesas para su preparación, mientras que una unidad de McChrono Extra Queso requiere solo una. Asimismo, una unidad de McChrono Salvaje necesita de 2 láminas de queso, mientras que una de McChrono Extra Queso requiere de 5 láminas. Don Zippy considera que los demás ingredientes son despreciables para su cálculo, y cuenta con un total de 200 hamburguesas y 300 láminas de queso.

Don Zippy planea vender cada unidad de McChrono Salvaje en \$1000, mientras que cada unidad de Mc-Chrono Extra Queso costará \$1500.

i) (2 puntos) Plantee el modelo de programación lineal entera que debe resolver Don Zippy para maximizar sus ingresos.

ii) (6 puntos) Entregue la solución del problema usando el algoritmo de Branch & Bound (ramificación y acotamiento), justificando por qué dejó de ramificar en cada nodo. En la resolución, resuelva primero los subproblemas con la restricción adicional de la forma $\leq$. Además, siempre resuelva antes los problemas con menor profundidad. En caso de tener la opción de ramificar en más de una variable, priorice la variable asociada a las hamburguesas "McChrono Salvaje".

b) (8 puntos) Considere una empresa que posee I plantas de producción $P_1, \ldots, P_I$ de un determinado bien. A su vez hay J mercados $M_1, \ldots, M_J$ a los cuales el bien producido debe ser transportado. Cada planta P_i posee una cantidad s_i del bien ($i = 1, \ldots, I$) y el mercado M_j demanda una cantidad r_j de este ($j = 1, \ldots, J$). Sea c_{ij} el costo de transportar una unidad del bien desde la planta P_i hasta el mercado M_j.

i) (1 punto) Formule un problema de optimización lineal que permita satisfacer los requerimientos del mercado a costo mínimo.

ii) (3 puntos) Encuentre el problema dual del problema anterior.

iii) (3 puntos) Muestre que si $\sum_{i=1}^{I} s_i \geq \sum_{j=1}^{J} r_j$, es decir, si la oferta es mayor o igual a la demanda, y si $\sum_{i=1}^{I} s_i > 0$, entonces el valor del primal es igual al valor del dual y ambos son finitos.

iv) (1 punto) Escriba las condiciones de optimalidad primal-dual.

Solución Problema 3.

a) i) Se definen dos variables. X asociada a la cantidad de hamburguesas McChrono Salvaje a producir, e Y asociada a la cantidad de hamburguesas McChrono Extra Queso a producir.
El modelo matemático queda:

$$\begin{array}{lllll} (P) & \text{máx} & z = 1000X + 1500Y & & \\ & \text{s.a.} & 3X + Y & \leq 200 & \\ & & 2X + 5Y & \leq 300 & \\ & & X, Y & \in \mathbb{Z}^+ & \end{array}$$

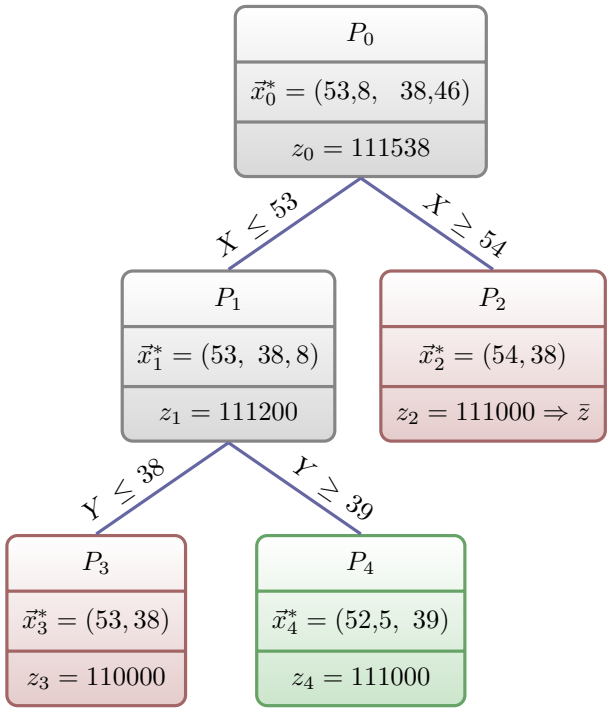
ii) El problema relajado de (P) es

$$\begin{array}{lllll} (PR) & \text{máx} & z = 1000X + 1500Y & & \\ & \text{s.a.} & 3X + Y & \leq 200 & \\ & & 2X + 5Y & \leq 300 & \\ & & X, Y & \geq 0 & \end{array}$$

Al resolver el (PR), por ejemplo de manera gráfica, se puede ver que el óptimo se alcanza en la intersección de las restricciones de Carne y Queso, dando como resultado

$$(X^*, Y^*, z^*) = (53{,}8,\ \ 38{,}46,\ \ 111538)$$

Luego, se procede con la ramificación, inicializando el incumbente en $\bar{z} = -\infty$.



Cabe notar que:

- ◇ En el nodo verde se dejó de ramificar pues en él, el valor de Z es igual al del incumbente, por lo que cualquier solución entera obtenida por alguna ramificación de este nodo será peor o igual al incumbente actual. Lego, no vale la pena seguir ramificando.
- ◇ En nodos rojos se dejó de ramificar al haber llegado a una solución entera.
- ◇ Si se comienza ramificando por la variable Y, se llegaría al mismo resultado.

b) i) Sea x_{ij} la cantidad del bien transportado desde P_i hacia $M - j$.

$$
\begin{array}{lllll}
(P) \quad \text{mín} & \displaystyle\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} c_{ij}x_{ij} & & & \\
\text{s.a.} & \sum_{j=1}^{J} x_{ij} & \leq s_i & \forall i = 1,\ldots,I & (1)\\
& \sum_{i=1}^{I} x_{ij} & \geq r_j & \forall j = 1,\ldots,J & (2)\\
& x_{ij} & \geq 0 & \forall i = 1,\ldots,I \quad \forall j = 1,\ldots,J & (3)
\end{array}
$$

en que la restricción (1) busca cumplir la capacidad, la restricción (2) la demanda, y la restricción (3) la naturaleza de las variables.

ii) En el primal hay $I \times J$ variables, e $I + J$ restricciones. Luego, la matriz de restricciones A primal (encerrada en cuadrado) es de $(I + J) \times I \cdot J$:

	(1,1)	(1,2)	...	(1,j)	...	(1,J)	(2,1)	(2,2)	...	(2,j)	...	(2,J)		(i,1)	(i,2)	...	(i,j)	...	(i,J)		(I,1)	(I,2)	...	(I,j)	...	(I,J)
1	1	1	⋯	1	⋯	1	0	0	⋯	0	⋯	0		0	0	⋯	0	⋯	0		0	0	⋯	0	⋯	0
2	0	0	⋯	0	⋯	0	1	1	⋯	1	⋯	1	⋯	0	0	⋯	0	⋯	0	⋯	0	0	⋯	0	⋯	0
				⋮									⋱							⋯				⋮		
i	0	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	⋯	0	⋯	1	1	⋯	1	⋯	1	⋯	0	0	⋯	0	⋯	0
				⋮									⋱							⋱				⋮		
I	0	0	⋯	0	⋯	0	0	0	⋯	0	⋯	0		0	0	⋯	0	⋯	0		1	1	⋯	1	⋯	1
I + 1	1	0	⋯	0	⋯	0	1	0	⋯	0	⋯	0		1	0	⋯	0	⋯	0		1	0	⋯	0	⋯	0
I + 2	0	1	⋯	0	⋯	0	0	1	⋯	0	⋯	0	⋯	0	1	⋯	0	⋯	0	⋯	0	1	⋯	0	⋯	0
			⋱						⋱				⋱			⋱				⋱			⋱			
I + j	0	0	⋯	1	⋯	0	0	0	⋯	1	⋯	0	⋯	0	0	⋯	1	⋯	0	⋯	0	0	⋯	1	⋯	0
					⋱						⋱		⋱					⋱		⋱					⋱	
I + J	0	0	⋯	0	⋯	1	0	0	⋯	0	⋯	1		0	0	⋯	0	⋯	1		0	0	⋯	0	⋯	1

Es decir, las primeras I filas son sólo J 1s para la restricción i, el resto 0s. Para las siguientes J filas, son matrices identidades de $J \times J$ en cada restricción i.

Al problema (P), a cada restricción (1) i se le asocia una variable u_i no-positiva, mientras que a cada restricción (2) j se le asocia una variable v_j no-negativa.

La variable dual es $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, con $u \in \mathbb{R}^I, v \in \mathbb{R}^J$. Definiendo A_{ij} como la columna de A asociada a (i, j) (es decir, un vector de $I + J$ componentes), la restricción de no-negatividad de x_{ij} implica que

$$(u^T \quad v^T)A_{ij} \leq c_{ij}$$

en que, por construcción de A

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{en la posición } i \\ 1 & \text{en la posición } I + j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así

$$(u^T \quad v^T)A_{ij} \leq c_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad u_i + v_j \leq c_{ij}$$

Finalmente, el dual queda

$$
\begin{array}{lllll}
(D) \quad \text{máx} & \displaystyle\sum_{i=1}^{I} u_i s_i + \sum_{j=1}^{J} v_j r_j & & & \\
\text{s.a.} & u_i + v_j & \leq c_{ij} & \forall i = 1,\ldots,I \quad \forall j = 1,\ldots,J & (1)\\
& u_i & \leq 0 & \forall i = 1,\ldots,I & \\
& v_j & \geq 0 & \forall j = 1,\ldots,J & (3)
\end{array}
$$

iii) Supongamos que $\sum_{i=1}^{I} s_i \geq \sum_{j=1}^{J} r_j$ y $\sum_{i=1}^{I} s_i > 0$. Encontremos una solución factible, como

$$x_{ij} = \frac{s_i r_j}{\sum_{i=1}^{I} s_i}$$

Esa solución hace que $x_{ij} \geq 0 \ \forall i, j$, y que se cumplan ambas restricciones, pues

- $\sum_{j=1}^{J} x_{ij} = \sum_{j=1}^{J} \frac{s_i r_j}{\sum_{i=1}^{I} s_i} = \frac{s_i}{\sum_{i=1}^{I} s_i} \sum_{j=1}^{J} r_j \leq s_i \quad \forall i = 1, \ldots, I$
- $\sum_{i=1}^{I} x_{ij} = \sum_{i=1}^{I} \frac{s_i r_j}{\sum_{i=1}^{I} s_i} = \frac{r_j}{\sum_{i=1}^{I} s_i} \sum_{i=1}^{I} s_i = r_j \quad \forall j = 1, \ldots, J$

Luego, (P) es factible. Entonces, por dualidad fuerte,

$$z^* = w^*$$

Como (P) es factible, tenemos dos opciones: $z^* \in \mathbb{R}$ o $z^* = -\infty$.

Si $z^* = -\infty$, (D) es infactible, pero esto no puede ser ya que $u = v = 0$ es una solución factible.

Por lo tanto, el óptimo de ambos problemas es finito.

iv) Las condiciones de optimalidad son:

Factibilidad primal	Factibilidad dual	Holguras Complementarias
$\sum_{j=1}^{J} x_{ij}^* \leq s_i \quad \forall i$	$v_j^* - u_i^* \leq c_{ij} \quad \forall i, j$	$u_i^* \left(\sum_{j=1}^{J} x_{ij}^* - s_i \right) = 0 \quad \forall i$
$\sum_{i=1}^{I} x_{ij}^* \geq r_j \quad \forall j$	$u_i^* \geq 0 \quad \forall i$	$v_j^* \left(\sum_{i=1}^{I} x_{ij}^* - r_j \right) = 0 \quad \forall j$
$x_{ij}^* \geq 0 \quad \forall i, j$	$v_j^* \geq 0 \quad \forall j$	$x_{ij}^* \left(c_{ij} + u_i^* - v_j^* \right) = 0 \quad \forall i, j$

Problema 4. (10 puntos)

El departamento de productos y servicios de la afamada aerolínea AMOY tiene, como unas de sus múltiples tareas, definir el material audiovisual que pondrá a disposición de sus clientes en cada una de sus rutas de vuelo $j \in J$. En un análisis anterior, se determinaron Z posibles categorías de material audiovisual (Música, Películas de Estreno, Clásicos del Cine, Noticias, Juegos, etc.) y en cada categoría $k \in Z$, una lista de T_k potenciales títulos. La licencia de cada título $s \in \{1, \ldots, T_k\}$ solo permite exhibirlo en a lo más v_{sk} rutas de vuelo. El costo de adquirir una licencia para la categoría $k \in Z$ es D_k, teniendo un presupuesto máximo de W para cubrir dicho gasto. Se debe decidir qué categorías utilizar y cuáles títulos incluir en cada ruta sin violar ambas restricciones. Además, cada avión destinado a la ruta $j \in J$ solo tiene espacio disponible de B_j megabytes, y se sabe que el tamaño del título s de la categoría k es a_{sk}.

A fin de alcanzar altos niveles de satisfacción de los pasajeros, se ha encargado a una consultora de Minería de Datos un exhaustivo estudio para caracterizar y clasificar los clientes según sus preferencias audiovisuales. Los resultados del estudio revelaron la existencia de N perfiles de pasajeros, y que el perfil $i \in N$ representa una fracción H_{ij} del total de pasajeros G_j de cada ruta de vuelo $j \in J$, con $\sum_{i \in N} H_{ij} = 1$ para todo $j \in J$. En términos de sus preferencias, los pasajeros del perfil $i \in N$ perciben una satisfacción p_{ik} por tener disponible la categoría $k \in Z$ en el monitor de su avión, y una satisfacción e_{isk} al disfrutar de un título específico s de dicha categoría.

Para satisfacer de manera integral a su clientela y no favorecer de manera exagerada a un perfil de pasajeros en particular, se debe cumplir que la satisfacción percibida por el perfil más perjudicado debe ser al menos un 30 % del nivel de satisfacción del perfil más favorecido.

Modele la situación anterior como un problema de programación lineal, de manera de maximizar la satisfacción total de los clientes de AMOY.

Solución Problema 4.

El modelo lineal del problema es el que se presenta a continuación.

Variables

$$x_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si se incluye la categoría } k \text{ en la ruta de vuelo } j. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$y_{skj} = \begin{cases} 1 & \text{si se incluye el título } s \text{ de la categoría } k \text{ en la ruta de vuelo } j. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$L_k = \begin{cases} 1 & \text{si se adquiere la licencia de la categoría } k. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Función objetivo : Se debe maximizar la satisfacción total de los clientes de AMOY.

$$\text{máx} \sum_{i \in N} \sum_{j \in J} \sum_{k \in Z} H_{ij} G_j \left(p_{ik} x_{kj} + \sum_{s=1}^{T_k} e_{isk} y_{skj} \right)$$

Restricciones

R1) Máximo número de títulos asignados a vuelos.

$$\sum_{j \in J} y_{skj} \leq v_{sk} \qquad \forall k \in Z \quad \forall s \in \{1, \ldots, T_k\}$$

R2) Asignar títulos sólo en las categorías incluidas (Relación entre variables y y x).

$$\sum_{s=1}^{T_k} \sum_{j \in N} y_{skj} \leq M x_{kj} \qquad \forall k \in Z \quad M \gg 0$$

o de otra forma

$$y_{skj} \leq x_{kj} \qquad \forall k \in Z \quad \forall s \in \{1, \ldots, T_k\} \quad \forall j \in J$$

R3) No se puede tener alguna categoría si no se ha pagado la licencia por ella. (Relación entre las variables x y L).

$$\sum_{j \in J} x_{kj} \leq L_k R \qquad \forall k \in Z \quad R \gg 0$$

o de otra forma

$$x_{kj} \leq L_k \qquad \forall k \in Z \quad \forall j \in J$$

R4) Balanceo del nivel de satisfacción entre perfiles de pasajeros, para cada ruta de vuelo.

$$\frac{3}{10} \sum_{k \in Z} \left(p_{ik} x_{kj} + \sum_{s=1}^{T_k} e_{isk} y_{skj} \right) \leq \sum_{k \in Z} \left(p_{\bar{i}k} x_{kj} + \sum_{s=1}^{T_k} e_{\bar{i}sk} y_{skj} \right) \quad \forall i, \bar{i} \in N \quad \forall j \in J$$

R5) Capacidad de almacenamiento de memoria.

$$\sum_{k \in Z} \sum_{s=1}^{T_k} y_{skj} a_{sk} \leq B_j \qquad \forall j \in J$$

R6) Cumplir con el presupuesto para licencias.

$$\sum_{k \in Z} L_k D_k \leq W$$

R7) Naturaleza de las variables

$$x_{kj} \in \{0,1\} \qquad \forall k \in N \quad \forall j \in J$$
$$y_{skj} \in \{0,1\} \qquad \forall s \in \{1,\ldots,T_k\} \quad \forall k \in N \quad \forall j \in J$$
$$L_k \in \{0,1\} \qquad \forall k \in Z$$