PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2018
Profesores: M. Klapp - R. Cuadrado
A. Cataldo - J. González

Solución Tarea 4

Fecha de Entrega: 30 de noviembre

La tarea tiene un total de 60 puntos.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día viernes 30 de noviembre a las 11:00 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 9:00 y las 11:00 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (18 puntos)

a) (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función convexa. Demuestre que si $f'(x_0) = 0$, para algún $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x) \leq 0, \forall x \leq x_0$ y $f'(x) \geq 0, \forall x > x_0$. Demuestre además, que no se cumple la implicancia en sentido contrario.

b) (2 puntos) Explique en palabras, ¿Por qúe puede resultar útil trabajar con dualidad para resolver un problema entero con Branch & Bound?

c) (4 puntos) Comente sobre la veracidad de las siguientes afirmaciónes

i) (2 puntos) El problema de Fase I del algoritmo simplex finaliza cuando todas las variables artificiales salen de la base.

ii) (2 puntos) Sea P) un problema de programación lineal de la forma:

$$\begin{array}{lll} P) & \min & c^T x \\ s.a. & & \\ & Ax & \leq b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

Suponga que la solución óptima de P) corresponde a x^* y que es degenerada. Si el lado derecho de una de las restricciones activas en x^* cambia marginalmente, nunca se logra una solución óptima con menor valor óptimo que x^*.

d) (3 puntos) Considere el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{lll} P) & \max & x_1 + 2x_2 \\ s.a. & & \\ & x_1 + x_2 & \leq 6 \\ & x_2 & \leq 2 \\ & x_2 & \leq x_1 \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

Tomando el origen como base inicial factible, realice una iteración del algoritmo simplex e indique cuánto cambia el valor de la función objetivo con la nueva base.

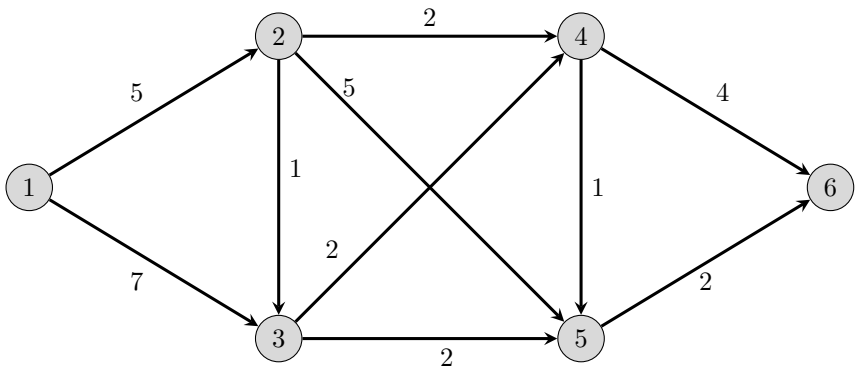
e) (3 puntos) Suponga que se está resolviendo un problema de programación lineal entera de maximización, PE), mediante el algoritmo Branch & Bound. En una iteración intermedia, uno de los subproblemas se ramifica dos subproblemas P_1) y P_2), con soluciones óptimas z_1 y z_2, respectivamente. Sea $\bar{z}$ la mejor cota inferior obtenida hasta el momento (incumbente). Para las siguientes situaciones justifique cuál de los subproblemas no es necesario ramificar.

i) (1 punto) $z_1 > \bar{z} > z_2$

ii) (1 punto) $z_1 > z_2 > \bar{z}$ y la solución óptima de P_1 es entera.

iii) (1 punto) P_2 es infactible, la solución óptima de P_1) es entera y $z_1 \leq \bar{z}$

f) (4 puntos) Considere el siguiente grafo de 6 nodos, en que los números sobre los arcos corresponden al costo de transporte de dicho arco. Encuentre el árbol de rutas mínimas de este grafo desde el nodo 1 al resto de la red.



Solución Problema 1.

a) Si $f'(x) > 0$, para algún $y_0 \leq x_0$, x_0 sería mínimo local, no global, luego existiría otro mínimo, y_0, tal que $f(x_0) > f(y_0)$. Como f es convexa:

$$f(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0) \leq \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(y_0) \;\; \forall \lambda \in [0,1]$$

Utilizando el hecho de que $f(x_0) > f(y_0)$, se tiene:

$$f(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0) < f(x_0) \;\; \forall \lambda \in [0,1]$$

Esta relación, implica que para $\lambda > 0$, pero suficientemente pequeño, se tendrá un punto lo suficientemente cercano a x_0 tal que su valor en f es menor que $f(x_0)$, lo que contradice el hecho de que x_0 es mínimo local de f, dado por $f'(x_0) = 0$. En conclusión, no puede existir otro mínimo local con mejor valor que x_0, luego, $f'(x) \leq 0, \forall x \leq x_0$ y $f'(x) \geq x_0, \forall x > 0$.

El hecho de que no se cumple la implicancia contraria se puede demostrar con un contra ejemplo. La función graficada en la siguiente figura, corresponde a una función en la que se obtiene para un punto x_0, las pendientes para $x < x_0$ son $f'(x) \leq 0$ y las pendientes para $x > x_0$ son $f'(x) \geq 0$. Además, $f'(x_0) = 0$. Sin embargo, la función no es convexa. Luego, no se cumplen las implicancias en el sentido contrario.

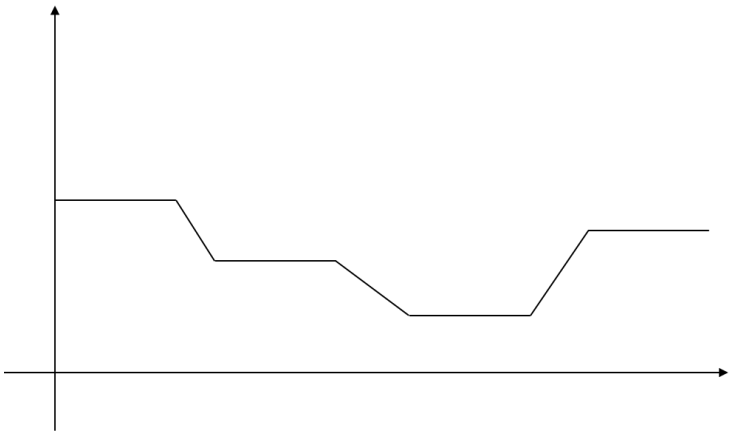


Figura 1: Función Resbalín

b) En el algoritmo de Ramificación y Acotamiento, al resolver las relajaciones lineales en los nodos, se van agregando cotas, es decir, restricciones a los problemas. De esta forma, al dual de estos problemas se le agregan variables. Resolver un problema con aumento en el número de variables es menos trabajoso

(menor utilización de recursos) que resolver problemas con mayor número de restricciones. Así, es útil para resolver el problema relajado en cada nodo, encontrar la solución a el problema dual respectivo.

c) *i)* Falso. El problema de Fase I finaliza una vez que se encuentra el óptimo w^* del problema de Fase I. Sin embargo, la base óptima puede contener variables artificiales. Por ejemplo, si $w^* > 0$ el problema original es infactible y necesariamente al menos una de las variables artificiales es básica.

ii) Falso. En la siguiente figura, se puede ver el dominio acotado por las restricciones en negro. El óptimo corresponde al punto degenerado dado por la intersección entre las tres restricciones. Dado un cambio marginal en el lado derecho de una restricción activa, por ejemplo, la restricción en negro que cambia a la restricción en azul, se obtiene un dominio más grande por lo que podría disminuir el valor de la función objetivo y así obtener una solución con menor valor óptimo que x^*

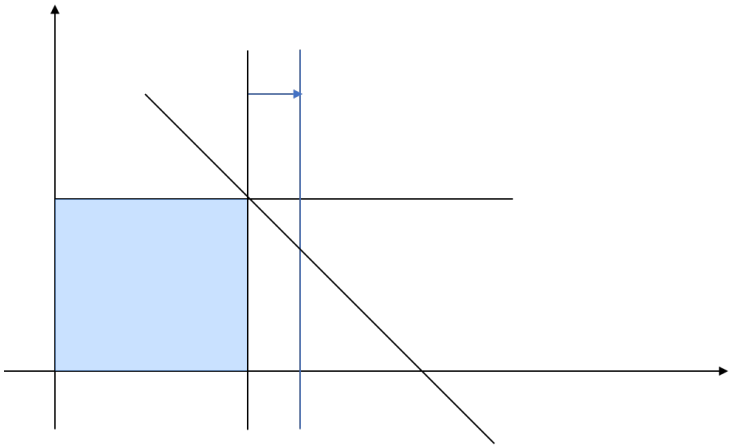


Figura 2: Problema 1c)ii)

d) El problema P) en forma estándar corresponde a:

$$
\begin{aligned}
P) \qquad & \text{mín} \quad -x_1 - 2x_2 \\
s.a. \quad & \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
& x_2 + x_4 = 2 \\
& x_2 - x_1 = 0 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

La base factible inicial corresponde a:

$$x_B = \{x_3, x_4, x_5\}$$
$$x_R = \{x_1, x_2\}$$

$$B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se calcula el criterio de factibilidad de Simplex:

$$\bar{b} = B^{-}1b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, se calculan los costos reducidos:

$$\bar{c_R}^T = c_R^T - c_B^T \bar{R}$$
$$\bar{c_R}^T = (-1, -2) - (0, 0) < 0$$

Entra x_2

Para encontrar la variable que sale de la base:

$$\text{mín}\{\frac{6}{1}, \frac{2}{1}, \frac{0}{1}\}$$

Sale x_4

La nueva base estará dada por:

$$x_B = \{x_3, x_2, x_5\}$$
$$x_R = \{x_1, x_4\}$$

Para encontrar el valor de la función objetivo, necesitamos el valor de las variables básicas, específicamente de x_2. Así:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, calculamos el valor de las variables de la base

$$\bar{b} = B^-1b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Como $b_3 \leq 0$ la base es infactible, por lo que no se puede determinar el valor de la F.O. con la nueva base.

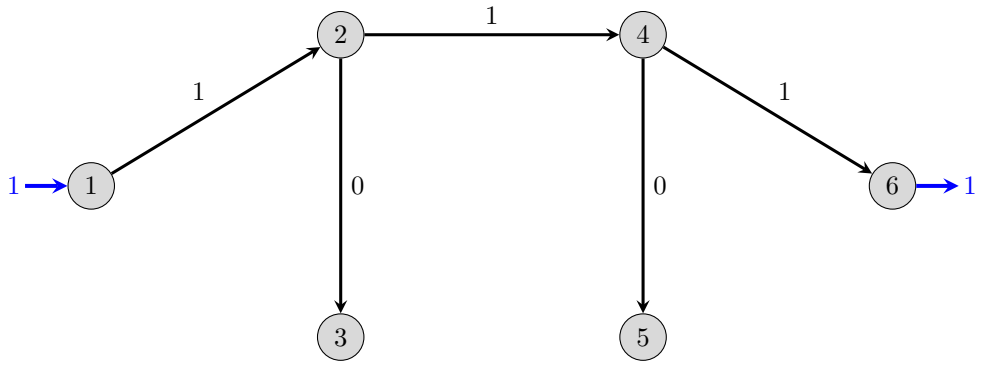
e) *i)* No es necesario ramificar P_2 porque los problemas en esta rama tienen un valor óptimo menor o igual a z_2, luego, no hay soluciones con valor mejor que $\bar{z}$

ii) No es necesario ramificar P_1) porque su solución óptima es factible para PE) (solución entera). La cota inferior puede ser actualizada ($z_1 \to \bar{z}$). Como z_2 es menor que el incumbente, no es necesario ramificar P_2)

iii) No es necesario ramificar P_2) porque es infactible. No se ramifica P_1) porque su valor óptimo no es mejor que $\bar{z}$ y porque su solución es factible para PE) (solución entera).

f) Tomemos como base factible inicial: $f_{12}, f_{24}, f_{46}, f_{23}, f_{45}$

Además, para poder resolver este problema como un problema de flujo a costo mínimo, agregamos una oferta de 1 unidad en el nodo 1 y una demanda de 1 unidad en el nodo 6. Así, se obtiene el árbol básico:



Se calculan los valores de las variables duales mediante el sistema:

$$c_{12} = \pi_1 - \pi_2 = 5$$
$$c_{23} = \pi_2 - \pi_3 = 1$$
$$c_{24} = \pi_2 - \pi_4 = 2$$
$$c_{45} = \pi_4 - \pi_5 = 1$$
$$c_{46} = \pi_4 - \pi_6 = 4$$

Escogemos arbitrariamente $\pi_6 = 0$, luego se obtiene:

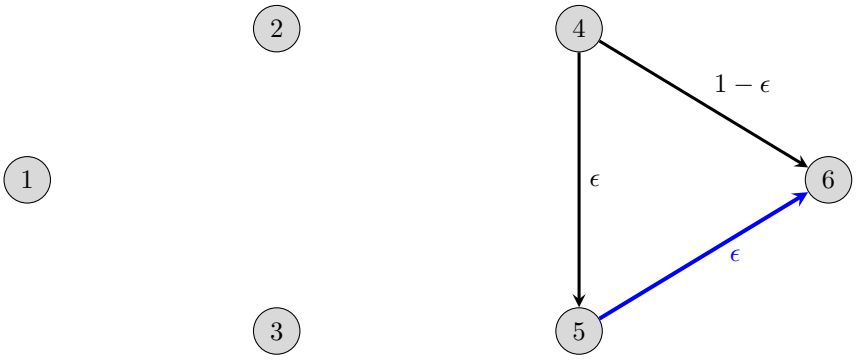
$$\pi_1 = 11, \pi_2 = 6, \pi_3 = 5, \pi_4 = 4, \pi_5 = 3, \pi_6 = 0$$

Comprobamos si estamos en el óptimo calculando los costos reducidos asociados a las variables no básicas:

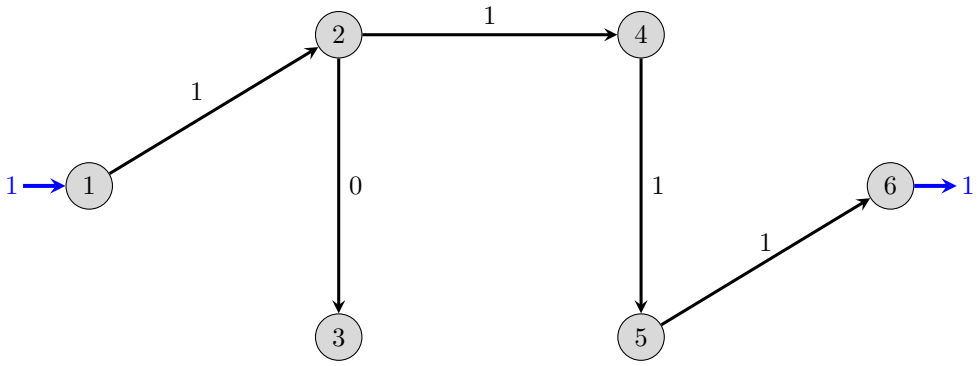
$$\bar{c}_{13} = c_{13} - \pi_1 + \pi_3 = 7 - 11 + 5 = 1 \geq 0$$
$$\bar{c}_{34} = c_{34} - \pi_3 + \pi_4 = 2 - 5 + 4 = 1 \geq 0$$
$$\bar{c}_{25} = c_{25} - \pi_2 + \pi_5 = 5 - 6 + 3 = 2 \geq 0$$
$$\bar{c}_{35} = c_{35} - \pi_3 + \pi_5 = 2 - 5 + 3 = 0 \geq 0$$
$$\bar{c}_{56} = c_{56} - \pi_5 + \pi_6 = 2 - 3 + 0 = -1 < 0$$

Luego, no estamos en el óptimo y debe entrar la variable $f_5 6$

Para encontrar la variable que sale de la base, se forma el siguiente ciclo:



De acuerdo al ciclo anterior, $\epsilon = 1$, luego, sale de la base la variable f_{46}. Así, el árbol básico queda de la forma:



Se calculan los valores de las variables duales mediante el sistema:

$$c_{12} = \pi_1 - \pi_2 = 5$$
$$c_{23} = \pi_2 - \pi_3 = 1$$
$$c_{24} = \pi_2 - \pi_4 = 2$$
$$c_{45} = \pi_4 - \pi_5 = 1$$
$$c_{56} = \pi_5 - \pi_6 = 2$$

Escogemos arbitrariamente $\pi_6 = 0$, luego se obtiene:

$$\pi_1 = 10, \pi_2 = 5, \pi_3 = 4, \pi_4 = 3, \pi_5 = 2, \pi_6 = 0$$

Comprobamos si estamos en el óptimo calculando los costos reducidos asociados a las variables no básicas:

$$\bar{c}_{13} = c_{13} - \pi_1 + \pi_3 = 7 - 10 + 4 = 1 \geq 0$$
$$\bar{c}_{34} = c_{34} - \pi_3 + \pi_4 = 2 - 4 + 3 = 1 \geq 0$$
$$\bar{c}_{25} = c_{25} - \pi_2 + \pi_5 = 5 - 5 + 2 = 2 \geq 0$$
$$\bar{c}_{35} = c_{35} - \pi_3 + \pi_5 = 2 - 4 + 2 = 0 \geq 0$$
$$\bar{c}_{46} = c_{46} - \pi_4 + \pi_6 = 4 - 3 + 0 = 1 \geq 0$$

Como todos los costos reducidos son mayores o igual a cero, nos encontramos en el óptimo y la ruta mínima está dada por el árbol básico asociado a esta iteración.

Problema 2. (15 puntos)

a) (4 puntos) Encuentre un contraejemplo en cada caso, que invalide las siguientes afirmaciones falsas:

i) (2 puntos) Si $x^* \in \mathbf{R^n}$ es mínimo local de $f(x)$, entonces $\nabla f(x^*) = 0$ y $H_f(x^*)$ es definida positiva.

ii) (2 puntos) Si $\nabla f(x^*) = 0$ y x^* no es mínimo local, entonces x^* es máximo local.

Con $f \in C^2$ y H_f la matriz Hessiana de f.

b) (11 puntos) El problema de regresión lineal para estimar la recta $y(x_1, \ldots, x_n)$ consiste en estimar los parámetros que minimicen la suma de los errores cuadráticos a una serie de puntos m puntos $p_i = (x_1^i, \ldots, x_n^i, y^i) \in \mathbf{R^{n+1}}, \forall i = 1, \ldots, m$ y se puede representar por el siguiente problema de optimización:

$$RL) \qquad \min_{a, b_1, \ldots, b_n} \qquad \sum_{i=1}^{m} (a + b_1 x_1^i + \cdots + b_n x_n^i - y^i)^2$$

Le recta obtenida será $y = a + b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n$

i) (2 punto) Demuestre que $RL)$ es convexo y tiene solución óptima.

Considere los siguientes puntos:

p_i	x_1	x_2	y
p_1	2	4	3
p_2	1	2	4
p_3	-2	-3	-1
p_4	3	-2	-2
p_5	5	0	0

Para las siguientes preguntas, considere como criterio de convergencia $\|x_{k+1} - x_k\| \leq 20\,\%$ y como vértice inicial el origen.

ii) (3 puntos) Resuelva *RL*) con los puntos p_i entregados utilizando el método del gradiente.

iii) (2 puntos) Resuelva *RL*) con los puntos p_i entregados utilizando el método de Newton con minimización unidimensional.

iv) (4 puntos) Resuelva el problema planteado en *RL*) utilizando *Python - Gurobi*. No se pedirá ningún archivo digital, pero sí se tienen que entregar los códigos escritos y pantallazos con un resumen de los resultados.

Solución Problema 2.

a) *i*) Para demostrar que la afirmación es falsa, basta considerar:

$$f(x) = x^4 \to x^* = 0 \wedge H_f(x) = [12x^2] \wedge |H_f(x^*)| = 0 \not\geq 0$$

Como la matriz Hessiana no es definida positiva en el óptimo, se demuestra que la afirmación es falsa.

ii) Para demostrar que la afirmación es falsa, basta considerar: $f(x) = x^3$. Tomando, $x^* = 0$, pues $\nabla f(x^*) = (0)$, se puede observar que x^* no es máximo ni mínimo local, con lo que se demuestra lo pedido.

b) *i*) La función objetivo de *RL*) es una suma de funciones polinómicas, por lo que la convexidad es directa. Se puede demostrar la existencia de soluciones óptima a través del teorema de la hipótesis H:

- ◇ Continuidad: $f(x)$ es polinomio $\to f(x)$ es continua
- ◇ Cerrado: El dominio es $\mathbb{R}^n$, que es cerrado por definición
- ◇ No vacío: El origen pertenece al dominio
- ◇ Hipótesis H: $f(x) \to \infty$ cuando $\|x\| \to \infty, x \in D$. Es fácil ver que si las variables, $a, b_1, \ldots, b_n \to \infty \vee -\infty$, entonces $\sum_{i=1}^{m}(a + b_1x_1^i + \cdots + b_nx_n^i - y^i)^2 \to \infty$ (si $x \neq 0$).

Finalmente, se demuestra que *RL*) sí tiene solución óptima.

ii) Primero calculamos el gradiente de la función objetivo para todo el dominio:
$\nabla f(a, b_1, b_2) = (2(a + 2b_1 + 4b_2 - 3) + 2(a + b_1 + 2b_2 - 4) + 2(a - 2b_1 - 3b_2 + 1) + 2(a + 3b_1 - 2b_2 + 2) + 2(a + 5b_1), 4(a + 2b_1 + 4b_2 - 3) + 2(a + b_1 + 2b_2 - 4) - 4(a - 2b_1 - 3b_2 + 1) + 6(a + 3b_1 - 2b_2 + 2) + 10(a + 5b_1), 8(a + 2b_1 + 4b_2 - 3) + 4(a + b_1 + 2b_2 - 4) - 6(a - 2b_1 - 3b_2 + 1) - 4(a + 3b_1 - 2b_2 + 2))$

Evaluando en $(a_0, b_{1,0}, b_{2,0}) = (0, 0, 0)$ el gradiente es $\nabla f(a_0, b_{1,0}, b_{2,0}) = (-8, -12, -54)$.
Con lo que $(a_1, b_{1,1}, b_{2,1}) = (0, 0, 0) - \lambda_1(-8, -12, -54) = (8\lambda_1, 12\lambda_1, 54\lambda_1)$
Resolviendo el problema:

$$\min_{\lambda} \quad f(8\lambda_1, 12\lambda_1, 54\lambda_1)$$

Se encuentra $\lambda_1 = 0.013$. Finalmente, $(a_1, b_{1,1}, b_{2,1}) = (0.105, 0.158, 0.713)$. La convergencia es: $\|X_1 - X_0\| = 0.73 > 0.2$, por lo que se debe seguir iterando.
Evaluando en $(a_1, b_{1,1}, b_{2,1}) = (0.105, 0.158, 0.713)$ el gradiente es $\nabla f(a_1, b_{1,1}, b_{2,1}) = (-2.66, 17.78, 0.71)$.
Con lo que $(a_2, b_{1,2}, b_{2,2}) = (0.105, 0.158, 0.713) - \lambda_2(-2.66, 17.78, 0.71)$
Resolviendo el problema:

$$\min_{\lambda} \quad f(0.105 + 2.66\lambda_2, 0.158 - 17.78\lambda_2, 0.713 - 0.71\lambda_2)$$

Se encuentra $\lambda_2 = 0.014$. Finalmente, $(a_2, b_{1,2}, b_{2,2}) = (0.143, -0.0915, 0.763)$. La convergencia es: $\|X_2 - X_1\| = 0.25 > 0.2$, por lo que se debe seguir iterando.

Evaluando en $(a_2, b_{1,2}, b_{2,2}) = (0.143, -0.0915, 0.763)$ el gradiente es $\nabla f(a_2, b_{1,2}, b_{2,2}) = (-6.69, -2.039, -5.183)$.
Con lo que $(a_3, b_{1,3}, b_{2,3}) = (0.143, -0.0915, 0.763) - \lambda_3(-6.69, -2.039, -5.183)$
Resolviendo el problema:

$$\min_{\lambda} \quad f(0.143 + 6.69\lambda_3, -0.0915 + 2.039\lambda_3, 0.763 + 5.183\lambda_3)$$

Se encuentra $\lambda_3 = 0.02$. Finalmente, $(a_3, b_{1,3}, b_{2,3}) = (0.282, -0.049, 0.871)$. La convergencia es: $\|X_3 - X_2\| = 0.18 > 0.2$, por lo que el algoritmo ha convergido y la solución obtenida es: $(a, b_1, b_2) = (0.282, -0.049, 0.871)$

iii) Ahora, para resolver con el método de Newton, se debe encontrar la matriz Hessiana de *RL*):

$$H_{f(x)} = \begin{bmatrix} 10 & 18 & 2 \\ 18 & 86 & 44 \\ 2 & 44 & 66 \end{bmatrix}$$

Luego, se deben plantear las siguientes ecuaciones:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [H_{f(x)}]^{-1} \nabla f(x^{(k)})$$

En este caso,la primera iteración quedará (partiendo del origen):

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_{1,1} \\ b_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 10 & 18 & 2 \\ 18 & 84 & 20 \\ 2 & 20 & 66 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -54 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 404 \\ 3552 \\ 4108 \end{pmatrix}$$

Se encuentra $\lambda = 1$, con lo que $(a_1, b_{1,1}, b_{2,1}) = (1.18, -0.31, 0.877)$. Evaluando en el gradiente $\nabla f(a_1, b_{1,1}, b_{2,1}) = (0, 0, 0)$, por lo tanto, se detiene el algoritmo porque se ha llegado al óptimo. Este resultado era predecible, pues el algoritmo de Newton (tanto el con minimización unidimensional y el sin) converge en una iteración en problemas cuadráticos.

iv) Un posible código en *Python - Gurobi* de *RL*) es:

```
from gurobipy import *

m = Model("Ejercicio_2b")

b = m.addVars(range(1,3),vtype=GRB.CONTINUOUS,lb=-GRB.INFINITY,
                                    name='b')

a = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS,lb=-GRB.INFINITY, name='a')

m.update()

p =[(2,4,3),(1,2,4),(-2,-3,-1),(3,-2,-2),(5,0,0)]


m.setObjective(quicksum((a+b[1]*n[0]+b[2]*n[1]-n[2])*(a+b[1]*n[0]+b[2]*n[1]-n[2]) for n in p), GRB.MINIMIZE)

m.update()
m.optimize()

sol = {v.varName: v.x for v in m.getVars()}

print('\nLa solucion optima es: {}'.format(sol))
print('El valor optimo de la F.O. es: {}'.format(m.objVal))
```

Figura 3: Código 2.b)

Y la impresión de la solución óptima es:

```
Barrier solved model in 2 iterations and 0.00 seconds
Optimal objective 3.44518354e+00


La solucion optima es: {'a': 1.188223700417601, 'b[1]': -0.3131313131309723, 'b[2]': 0.877063316086791}
El valor optimo de la F.O. es: 3.44518354274

Process finished with exit code 0
```

Figura 4: Resultado 2.b)

Problema 3. (13 puntos)

a) (2 puntos) Explique en palabras; ¿Por qué los multiplicadores de Lagrange en restricciones de igualdad son irrestrictos y en restricciones de desigualdad son no negativos?

c) (2 puntos) A partir del siguiente problema de Lagrange, reconsutruya el problema original:

$$L(x,\lambda) = -x_1^2 + e^{x_2} + x_3^2 + \lambda_1 \left(ln(x_1 + x_2) - 10\right) + \lambda_2 \left(x_1^2 + x_2^2 - 2\right) + \lambda_3 \left(3 - (x_1 + x_2)\right)$$

Con esto, las condiciones de KKT quedan:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \geq 0 \tag{1}$$
$$x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \tag{2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \tag{3}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \tag{4}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \leq 0 \tag{5}$$
$$\lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \tag{6}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \leq 0 \tag{7}$$
$$\lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \tag{8}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \leq 0 \tag{9}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 0 \tag{10}$$
$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \tag{11}$$
$$\tag{12}$$

c) (9 puntos) En microeconomía, se debe estudiar el problema clásico del consumidor, que consiste en maximizar las utilidades del individuo pruducida por el consumo de ciertos bienes, sujeto a que el gasto de recursos incurrido por este consumo, no sobrepase la capacidad de dichos recursos (típicamente presupuesto o tiempo).

Considere el problema de Luis Felipe, cuya función de utilidad está dada por $U(x_1, x_2, x_3) = \gamma ln(x_1) + x_2 + (x_3)^2$, siendo x_1 comer, x_2 jugar y x_3 estudiar. El presupuesto total de Luis Felipe corresponde a m unidades monetarias y el tiempo total del que dispone corresponde a T horas. Además, por consumir una unidad del bien x_i debe incurrir en un gasto de p_1 unidades monetarias y t_i horas.

i) (2 punto) Modele el problema de Luis Felipe, asumiendo que no consume bienes fuera de los 3 mencionados.

ii) (3 puntos) Resuelva el problema planteado en *i*) en función de los parámetros del problema, indicando claramente cuál es el consumo de cada bien.

iii) (2 puntos) Si $\gamma = 0.5$, $(p_1, p_2, p_3, m) = (1, 1, 6, 10)$ y $(t_1, t_2, t_3, T) = (2, 3, 1, 48)$ encuentre la canasta de consumo de equilibrio de Luis Felipe y su respectivo nivel de utilidad, suponiendo que en esta canasta Luis Felipe no estudia.

iv) (2 puntos) Suponga que a Luis Felipe le proponen la posibilidad de aumentar una cantidad marginal δ_T su disponibilidad de tiempo T, o, una cantidad marginal δ_m su presupuesto total ¿Qué opción escogería Luis Felipe? ¿Cuánto aumentaría su nivel de utilidad si escogiera esta opción?

Solución Problema 3.

a) Si los multiplicadores de Lagrange de las restricciones de desigualdad son negativas, signfica que el gradiente de la función objetivo no se encuentra en el cono formado por los gradientes de las restricciones activas, es decir, existe una dirección de descenso factible hacia el interior del dominio (en que la restricción de multiplicador negativo no esté activa). Por otro lado, en un dominio de restricciones de igualdad las restricciones están siempre activas, por lo tanto, que los multplicadores de Lagrange sean negativos no significa que exista una dirección factible de descenso hacia el interior del dominio dado que la restricción de multiplicador negativo no puede estar inactiva. Entonces, los multiplicadores de Lagrange en dominios de igualdad representan los ponderadores con los cuales se puede formar el gradiente de la función objetivo, a partir de los gradientes de la restricciones respectivas.

b) El problema original es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
P) \qquad & \text{mín} \quad -x_1^2 + e^{x_2} + x_3^2 \\
s.a. \quad & \\
& \begin{array}{rcl} ln(x_1 + x_2) & \leq & 10 \\ x_1^2 + x_2^2 & \leq & 2 \\ x_1 + x_2 & = & 3 \\ x_1 & \geq & 0 \end{array}
\end{aligned}
$$

fi

c) *i*)

$$
\begin{aligned}
P) \qquad & \text{máx} \quad \gamma ln(x_1) + x_2 + x_3^2 \\
s.a. \quad & \\
& \begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{3} p_i x_i & \leq & m \\ \sum_{i=1}^{3} t_i x_i & \leq & T \\ x & \geq & 0 \end{array}
\end{aligned}
$$

ii) El Lagrangeano del problema es el siguiente:

$$L(x, \lambda) = \gamma ln(x_1) + x_2 + x_3^2 - \lambda_p \left(\sum_{i=1}^{3} p_i x_i - m \right) - \lambda_t \left(\sum_{i=1}^{3} t_i x_i - T \right)$$

Y las condiciones de KKT quedarán:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \leq 0 \rightarrow \frac{\gamma}{x_1} - \lambda_p p_1 - \lambda_t t_1 \leq 0 \tag{13}$$

$$x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow x_1 \left(\frac{\gamma}{x_1} - \lambda_p p_1 - \lambda_t t_1 \right) = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} \leq 0 \rightarrow 1 - \lambda_p p_2 - \lambda_t t_2 \leq 0 \tag{15}$$

$$x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow x_2(1 - \lambda_p p_2 - \lambda_t t_2) = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} \leq 0 \rightarrow 2x_3 - \lambda_p p_3 - \lambda_t t_3 \leq 0 \tag{17}$$

$$x_3 \frac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \rightarrow x_3(2x_3 - \lambda_p p_3 - \lambda_t t_3) = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_p} \leq 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{3} p_i x_i - m \leq 0 \tag{19}$$

$$\lambda_p \frac{\partial L}{\partial \lambda_p} = 0 \rightarrow \lambda_p \left(\sum_{i=1}^{3} p_i x_i - m \right) = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} \leq 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{3} t_i x_i - T \leq 0 \tag{21}$$

$$\lambda_t \frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = 0 \rightarrow \lambda_t \left(\sum_{i=1}^{3} t_i x_i - T \right) = 0 \tag{22}$$

$$\lambda_p, \lambda_t, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \tag{23}$$

Si $x_1 = 0$, la función objetivo tiende a $-\infty$, por lo tanto, $x_1 > 0$ y $\frac{\gamma}{x_1} = \lambda_p p_1 + \lambda_t t_1$.

Luego, si $x_2 = 0$ entonces $1 \leq \lambda_p p_2 - \lambda_t t_2$. Además, si $x_3 = 0$ y $\lambda_t = 0$ entonces $x_1 = \frac{T}{t_1}$ y $\lambda_p = \frac{\gamma}{x_1 p_1}$ que sólo es válido si $\frac{T}{t_1} \leq \frac{\gamma p_2}{p_1}$. Si $x_3 = 0$ y $\lambda_p = 0$ entonces $x_1 = \frac{m}{p_1}$ y $\lambda_t = \frac{\gamma}{x_1 t_1}$ que sólo es válido si $\frac{m}{p_1} \leq \frac{\gamma t_2}{t_1}$. Por otro lado, si $x_2 > 0$ existen dos opciones: $x_3 = 0$ y $x_3 > 0$. Si $x_3 > 0$, entonces si $\lambda_p = 0$ implica que $t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 = m$ y si $\lambda_t = 0$ implica que $p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = T$. Si $x_3 = 0$, alguna restricción debe estar inactiva, por lo tanto, si $\lambda_t = 0$ implica que $p_1 x_1 + p_2 x_2 = T$ y si $\lambda_p = 0$ implica que $t_1 x_1 + t_2 x_2 = m$. Estas restricciones más (16) y (18) permiten despejar todas las variables.

iii) Si $\gamma = 0.5$, $(p_1, p_2, p_3, m) = (1, 1, 6, 10)$ y $(t_1, t_2, t_3, T) = (2, 3, 1, 48)$, el nuevo modelo queda:

$$\begin{array}{lll} P) & \text{máx} & 0.5ln(x_1) + x_2 + x_3^2 \\ s.a. & & \\ & x_1 + x_2 + 6x_3 & \leq \quad 10 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq \quad 48 \\ & x & \geq \quad 0 \end{array}$$

de *ii)* y del enunciado se pueden obtener los siguientes candidatos:

- $x_1, x_2, \lambda_t > 0$: $(x_1, x_2, x_3, \lambda_p, \lambda_t) = (\frac{3}{4}, \frac{31}{2}, 0, 0, \frac{1}{3})$, $v^* = 15.35$
- $x_1, x_2, \lambda_p > 0$: $(x_1, x_2, x_3, \lambda_p, \lambda_t) = (\frac{1}{2}, 9.5, 0, 1, 0)$, $v^* = 8.65$

El primer candidato no es factible por (19), por lo tanto, la solución óptima es el segundo candidato.

iv) De *iii)* se ve que en la solución óptima la restricción de tiempo no está activa, por lo tanto, Luis Felipe optará por aumentar marginalmente su restricción de presupuesto. Su nivel de utilidad aumentará en $\Delta U = \lambda_p \delta_p = \delta_p$

Problema 4. (14 puntos)

Sea *Mooving* una empresa que ofrece servicios de *Bike-Sharing* en la ciudad de Santiago. Este servicio consiste en un sistema de bicicletas ubicadas en estaciones definidas para *Mooving* que son ofrecidas a usuarios para transportarse entre estaciones. El conjunto de estaciones de *Mooving* corresponde E. Un gran problema que se le presenta a las empresas que ofrecen este servicio es el fenómeno de la asimetría de la demanda. Esto quiere decir que hay estaciones que tienen mayor demanda de salida de viajes que de entrada y otras viceversa, lo que genera un desbalanceo en el nivel de inventario de estas estaciones (las estaciones con mayor demanda de salida de viajes tenderán a encontrarse vacías y las estaciones con mayor demanda de llegada de viajes tenderán a encontrarse llenas). Para afrontar este problema, *Mooving* realiza relocalizaciones de bicicletas entre estaciones, a través de un conjunto K de camiones, en que cada camión $k \in K$ tiene una capacidad de transportar C_k bicicletas. Según la planificación del departamento de logística, se deben retirar/entregar necesariamente q_e bicicletas en la estación $e \in E$, siendo $q_e > 0$ si es un retiro y $q_e < 0$ si es una entrega (obviamente $\sum_{e \in E: q_e > 0} q_e + \sum_{e \in E: q_e < 0} q_e = 0$ para que la planificación sea factible).

Suponga que la red entre las estaciones es fuertemente conexa, que la flota K de camiones deben iniciar y terminar en un depot $d \in E$ y que la empresa tiene la posibilidad de no utilizar sus $|K|$ camiones disponibles. Por último, considerando que el costo de transporte de i a j tiene un costo fijo de c_{ij} más un costo variable de r_{ij}^k por unidad transportada por el camión $k \in K$ en dicho tramo, modele un problema de optimización lineal mixto que minimice los costos totales de transporte.

Solución Problema 4.

Supuesto: Todas las estaciones tienen demanda no nula, de otra forma, la estación no sería visitada

Conjuntos:

$$A = \{(i,j) : i,j \in E : i \neq j\}\text{: Conjunto de todos los arcos de la red}$$

Variables de decisión:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{Si el arco } (i,j) \in A \text{ es utilizado por el camión } k \in K \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{Si se utiliza el camión } k \in K \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$f_{ij}^k = \text{Carga transportada en el arco } (i,j) \in A \text{ por el camión } k \in K.$$

$$q_i^k = \text{Carga recogida/entregada por el camión } k \in K \text{ en la estación } i \in E.$$

Función Objetivo:

$$\text{máx} \quad \sum_{a \in A} \sum_{k \in K} c_a x_a^k + f_{ij} r_a^k$$

s.a.

(1) Todas las estaciones deben ser visitadas:

$$\sum_{j \in E} \sum_{k \in K} x_{ij}^k \geq 1 \qquad \forall i \in E, \forall k \in K$$

(2) Ecuación de continuidad:

$$\sum_{j \in E} x_{ij}^k = \sum_{j \in E} x_{ji}^k \qquad \forall i \in E, \forall k \in K$$

(3) El camión k, si se utiliza, sólo puede salir una vez del depot d:

$$\sum_{i \in E \setminus d} x_{di}^k \leq y_k \qquad \forall i \in E, \forall k \in K$$

(4) Definición de la carga transportada:

$$\sum_{i \in E} f_{ji}^k = q_j^k + \sum_{i \in E} f_{ij} \qquad \forall i \in E, \forall k \in K$$

(5) Capacidad de los camiones:

$$f_a^k \leq C_k x_a^k \qquad \forall a \in A, \forall k \in K$$

(6) Se debe servir la demanda de las estaciones:

$$\sum_{k \in K} q_e^k = q_e \qquad \forall e \in E$$

(7) Elimiación de Subtours:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij}^k \leq |S| - 1 \qquad \forall k \in K, \forall S \subseteq E \setminus d$$

(8) Naturaleza de las variables:

$$
\begin{aligned}
x_{ij}^{k} &\in \{0,1\} && \forall i,j \in E, \forall k \in K \\
y_{k} &\in \{0,1\} && \forall k \in K \\
f_{a}^{k} &\geq 0 && \forall a \in A, \forall k \in K \\
q_{e}^{k} &\geq 0 && \forall e \in E, \forall k \in K
\end{aligned}
$$