Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Primer Semestre de 2011

ICS 1113, Optimización

Interrogación 1, Solución

Parte 1[24 pts.] :

1. [12 pts.] Considere el siguiente problema de optimización:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & x_1 - x_2 \\ s.a. & x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1 + x_3 \geq -2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) [3 pts.] Reescriba este problema en forma estándar de Programación Lineal

Solución: La forma estándar es:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & x_1 - x_2 \\ s.a. & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1 + x_3 + x_5 = -2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

b) [4 pts.] Considere el siguiente punto: $(x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$. ¿Es este un punto extremo de la región factible del problema? Justifique en forma precisa usando las nociones geométricas de programación lineal.

REspuesta: Con los valores dados tenemos que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 4/3, 1/3, 0, 7/3, 0)$. Las columnas de x_2, x_3 y x_5 son (en forma de matriz):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es claramente invertible y su inversa es:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ -2/3 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Esto mustra que las columnas de B son linealmente independientes y, por lo tanto, forman una base. Además, la correspondiente solución es factible. Como sabemos, una solución básica factible corresponde a un punto extremo del poliedro definido por las restricciones.

c) [5 pts.] ¿Es el punto anterior solución óptima del problema o no? Justifique igualmente en forma precisa usando el análisis algebraico-matricial.

Solución: Para esto tenemos que calcular los costos reducidos, los cuales están dados por:

$$\bar{c}_R^T = c_R^T - \pi^T R, \;\; \pi^T = c_B^T B^{-1}.$$

Para este problema tenemos:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; c_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; c_R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica que:

$$\pi^T = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -2/3 & 0 & 1/3 \\ -2/3 & -1 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Evaluando esto se obtiene:

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Luego, los costos reducidos son todos ≥ 0 y, por lo tanto, estamos en el óptimo.

2. [12 pts.] Considere el siguiente problema de Programación Lineal en dos variables:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & 2x_1 + 3x_2 \\ s.a. & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Resuelva este problema utilizando el algoritmo SIMPLEX usando el Tableau.

Respuesta: Primero, el problema en forma estándar es:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & 2x_1 + 3x_2 \\ s.a. & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Esto lleva al siguiente tableau inicial (la última fila serán los costos reducidos):

x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
3	2	1	0	6
1	3	0	1	6
2	3	0	0	0

Elejimos la variable 2 para entrar a la base (su costo reducido es > 0). Los cuocientes de las dos filas son $6/2 = 3$ y $6/3 = 2$. Luego, pivotamos sobre el elemento de la segunda restricción:

x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
3	2	1	0	6
1	$\boxed{3}$	0	1	6
2	3	0	0	0

Pivoteando se obtiene el siguiente tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
7/3	0	1	-2/3	2
1/3	1	0	1/3	2
1	0	0	-1	-6

Ahora tomamos la variables 1 para entrar a la base. Los cuocientes son: $2/(7/3)00,857$ y $2/(1/3) = 6$. Luego, el pivote se hace en la primera restricción:

x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
$\boxed{7/3}$	0	1	-2/3	2
1/3	1	0	1/3	2
1	0	0	-1	-6

Pivoteando obtenemos:

x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
1	0	3/7	-2/7	6/7
0	1	-1/7	3/7	12/7
0	0	-3/7	-5/7	-48/7

En este tableau todos los costos reducidos son ≤ 0, por lo tanto estamos en el óptimo (recordar que estamos maximizando).

Parte 2[20 pts.] : Las siguientes preguntas de esta parte todas requieren de respuestas breves. Sea preciso.

1. [3 pts.] Sea A una matriz de $m \times n$, b un vector de m componentes y c un vector de n componentes. Considere el siguiente problema de Programación Lineal.

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & c^T x \\ s.a. & Ax \leq b \end{array}$$

Suponga que ha determinado que el sistema $Ax \leq b$ es factible, es decir, existe un vector $\bar{x}$ tal que $A\bar{x} \leq b$. Además ha encontrado un vector $h \neq 0$ tal que $Ah \leq 0$. ¿Qué condición debe cumplirse adicionalmente para que el problema P) sea no acotado? Justifique con precisión por qué.

Respuesta: Esto está en la materia de clases. Dado que el problema es de maximización, basta requerir que $h^T c > 0$. Esto es así ya que, tomando $\lambda > 0$, tenemos que $A(\bar{x} + \lambda h) \leq b$, para todo $\lambda > 0$, y además $c^T(\bar{x} + \lambda h) = c^T \bar{x} + \lambda c^T h \to \infty$ cuando $\lambda \to \infty$.

2. [3 pts.] "En un problema de minimización al seleccionar la variable que entra a la base hay que tomar siempre la que tenga el menor costo reducido."¿Es verdad esta afirmación? Justifique con precisión.

Respuesta: Esta es pregunta estándar y reiterado en clases. EL costo reducido más negativo sólo garantiza el mayor mejoramiento *marginal*, pero no necesariamente lo mejor en términos globales ya que eso depende de cuánto nos movemos en la iteración, lo que depende del cuociente en el test de mínima razón. Podría ser mejor con otro costo reducido negativo.

3. [3 pts.] "En un problema de minimización en que la variable x_k está entrando a la base, al seleccionar la variable que deja la base hay que tomar cualquiera tal que el cuociente b_i/a_{ik} de la correspondiente fila sea positivo."¿Es verdad esta afirmación? Justifique con precisión.

Respuesta: Conocimiento básico del algoritmo SIMPLEX. La afirmación es falsa, se debe elegir el que entrega el menor cuociente entre los a_{ik} positivos.

4. [3 pts.] Sea f una función estrictamente convexa. Entonces el problema mín $f(x)$ tiene solución única. ¿Verdad o no? Justifique.

Respuesta: Conocimientos básicos de problemas convexos. La afirmación es falsa ya que la función, aun siendo estrictamente convexa, podría no alcanzar ningún mínimo. Por ejemplo, $f(t) = e^{-t}$.

5. [3 pts.] Considere el problema mín máx$\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$, ¿qué condiciones deben satisfacer las funciones $f_i, i = 1, \ldots, r$ para que el problema sea convexo? Justifique con precisión.

Respuesta: El problema se puede poner, en forma equivalente, como:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & t \\ s.s. & f_i(x) \leq t, i = 1, \ldots, r \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & t \\ s.s. & f_i(x) - t \leq 0, i = 1, \ldots, r \end{array}$$

Dado que la función objetivo es convexa (lineal), una condición suficiente es que las funciones f_i+ sean convexas. Con eso, $f_i(x) - t$ es función convexa en (x, t) y el dominio es convexo.

6. [5 pts.] Considere el siguiente problema de optimización:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{j=1}^{n} |x_j| \\ s.a. & Ax \leq b \end{array}$$

donde A es una matriz de m filas y n columnas y b es un vector de m componentes. En clases dijimos que este problema podía transformarse forma equivalente al siguiente:

$$P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{j=1}^{n} (u_j + v_j) \\ s.a. & A(u - v) \leq b \\ & x_j = u_j - v_j, j = 1, \ldots, n \\ & u_j \geq 0, v_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \\ & u_j \times v_j = 0, j = 1, \ldots, n \end{array}$$

La última restricción se colocaba de modo tal que sólo una de las variables (a lo más), u_j ó v_j, fuera positiva, permitiendo definir correctamente el valor absoluto. Muestre, usando lo que ahora sabe sobre soluciones óptimas de problemas de Programación Lineal, que el problema es equivalente a:

$$P1) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{j=1}^{n} (u_j + v_j) \\ s.a. & A(u - v) \leq b \\ & x_j = u_j - v_j, j = 1, \ldots, n \\ & u_j \geq 0, v_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \end{array}$$

(en otras palabras, no es necesario imponer explícitamente la condición $u_j \times v_j = 0$, está dada "gratis" por las propiedades de Programación Lineal).

Respuesta: Esto se sigue de las propiedades de las soluciones de programación lineal. Supongamos que $\bar{x}$ es solución óptima y que una de las componentes es igual a $\bar{x}_j = \bar{u}_j - \bar{v}_j$, pero con $\bar{u}_j > 0$ y $\bar{v}_j > 0$. Entonces, tanto $baru_j$ como $\bar{v}_j$ deben ser variables básicas. Notemos ahora que las primeras restricciones del problema se pueden también escribir como $Au - Av \leq b$. Podemos observar que si $\bar{u}_j > 0$ y $\bar{v}_j > 0$ son ambas variables básicas, entonces las correspondientes columnas asociadas a esas variables en el problema P1) deben estar en la base. Estas columnas son:

$$\begin{pmatrix} A_j \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -A_j \\ -1 \end{pmatrix}$$

Podemos ver, sin embargo, que estas dos columnas son linealmente dependientes (una es el negativo de la otra). Por lo tanto, no es posible tener $\bar{u}_j > 0$ y $\bar{v}_j > 0$ simultáneamente. Esto demuestra la afirmación.

Parte 3[25 pts.] :

1. [15 pts.] Un banco dispone de un fondo de US$12.000.000 para préstamos a distintos tipos de clientes. El banco cobra distintas tasas de interés a distintos clientes, pero además hay una cierta probabilidad de que un cliente no pague el crédito. La siguiente tabla muestra, para cada categoría de clientes, las respectivas tasas de interés y probabilidades de no pago:

Tipo de cliente	Tasa de interés	probabilidad de no pago
Personal	0,140	0,10
Automotriz	0,130	0,07
Vivienda	0,120	0,03
Agrícola	0,125	0,05
Comercial	0,100	0,02

Factores de competencia hacen que el banco deba destinar al menos un 40 % del fondo a préstamos agrícolas y comerciales. Además, los créditos habitacionales deben ser al menos un 50 % de la cantidad total prestada en créditos personales, automotrices y habitacionales. Por otro lado, la política de cobertura del banco establece que la cantidad total no recuperada no debe ser mayor a un 4 % de la cantidad total prestada.

Escriba un modelo de Programación Lineal que permita al banco decidir cuánto prestar a cada grupo de clientes de modo que se maximice la utilidad total. (Nota: la utildiad total es igual a lo ganado por el banco como interés menos lo no recuperado. Lo ganado por interés es igual a la cantidad prestada a cada tipo de cliente multiplicada por la correspondiente tasa de interés,y lo no recuperado se puede estimar como lo prestado a una categoría de clientes multiplicado por la probabilidad de no pago).

Respuesta: Definamos las suguientes variables:

x_1**:** cantidad a prestamos personales.

x_2**:** cantidad a prestamos automotrices.

x_3**:** cantidad a prestamos de vivienda.

x_4**:** cantidad a prestamos agrícolas.

x_5**:** cantidad a prestamos comerciales.

La función objetivo del problema se calcula a partir de los datos relativos a intereses y probabilidad de no pago. Por ejemplo, para los préstamos personales, la contribución al objetivo es: $(0,14) \times (0,9)x_1 - (0,9)x_1 = 0,026x_1$. Nótese qie tomamos el 90 % de x_1 para ganar intereses ya el 10 % restante generará pérdida (es un valor esperado).

El modelo total es:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & 0,026x_1 + 0,0509x_2 + 0,0864x_3 + 0,06875x_4 + 0,078x_5 \\ s.a. & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12 \\ & x_4 + x_5 \geq 4,8 \\ & x_3 \geq 0,5 \times (x_1 + x_2 + x_3) \\ & \frac{0,1x_1+0,07x_2+0,03x_3+0,05x_4+0,02x_5}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5} \leq 0,04 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5 \end{array}$$

La restricción fraccionaria es en realidad lineal, el modelo final es:

$$\begin{aligned}
\text{máx} \quad & 0,026x_1 + 0,0509x_2 + 0,0864x_3 + 0,06875x_4 + 0,078x_5 \\
s.a. \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12 \\
& x_4 + x_5 \geq 4,8 \\
& x_3 \geq 0,5 \times (x_1 + x_2 + x_3) \\
& 0,1x_1 + 0,07x_2 + 0,03x_3 + 0,05x_4 + 0,02x_5 \leq 0,04 \times (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \\
& x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5
\end{aligned}$$

2. [10 pts.] Una empresa del sector forestal posee un total de n plantaciones de árboles (pino radiata). La plantación j tienen disponible un total de b_j m^3 de madera, $j = 1, \ldots, m$. Estas plantaciones pueden ser cortadas total o parcialmente para obtener madera que debe satisfacer cierta demanda. La demanda por madera es d m^3 totales. Cortar en la plantación j tiene un costo de c_j $\$/m^3$. Queremos cortar madera de cada plantación de modo de satisfacer la demanda pero al mínimo costo. Sea x_j la cantidad de madera a cortar de la plantación j. Es fácil ver que el modelo que cumple lo expuesto es:

$$(1) \qquad \begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \geq d \\
& x_j \leq b_j, j = 1, \ldots, n \\
& x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

a) [5 pts.] Suponga que se le informa ahora que cada vez que se corta madera de una plantación, se debe incurrir además en un costo fijo debido a la instalación de las faenas y otras actividades. Sea K_j el costo fijo en que se incurre si se corta madera en la plantación j. Escriba las extensiones necesarias al modelo (1) para considerar ahora adicionalmente este costo fijo.

Respuesta: Esto se modela mediante la construcción de "carga fija" o "M grande". Definimos, para cada plantanción j, una variable binaria z_j que vale 1 si corto madera de la plantación j, y vale 0 en caso contrario. Con esto el modelo queda:

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} K_j z_j \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \geq d \\
& x_j \leq b_j, j = 1, \ldots, n \\
& x_j \leq M z_j, j = 1, \ldots, n \\
& x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \\
& z_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

El M puede ser reemplazado por b_j y también podríamos tener:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} K_j z_j \\ s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \geq d \\ & x_j \leq b_j z_j, j = 1, \ldots, n \\ & x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \\ & z_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

De hecho, esta última es una mejor formulación, pero ambas son válidas.

b) [5 pts.] Siguiendo con la misma situación de b), suponga que debido a restricciones de preservación de fauna salvaje, no se pueden cortar dos plantaciones que sean adyacentes. Definamos un parámetro (dato) P_{ij} el cual toma el valor 1 si la plantación i es adyacente a la plantación j. Escriba las extensiones necesarias al modelo de a) para representar ahora esta misma situación.

Respuesta: Aquí basta agregar restricciones de exclusión de la forma:

$z_i + z_j \leq 1$ si i es adyacente a j, es decir, si $P_{ij} = 1$.

El modelo es, entonces:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} K_j z_j \\ s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j \geq d \\ & x_j \leq b_j z_j, j = 1, \ldots, n \\ & z_i + z_j \leq 1, i, j = 1, \ldots, n : P_{ij} = 1 \\ & x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \\ & z_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Parte 4[20 pts.] :

1. [10 pts.] Considere el siguiente sistema de desigualdades en dos variables:

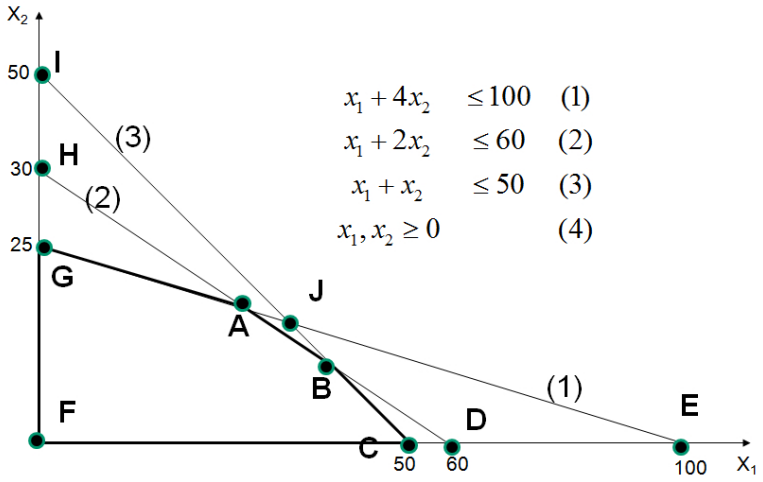
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 & \leq 100 \\ x_1 + 2x_2 & \leq 60 \\ x_1 + x_2 & \leq 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

a) [3 pts.] haga un gráfico de la región definida por ese sistema.

b) [7 pts.] Encuentre todas las soluciones básicas asociadas a este sistema e identifíquelas en el gráfico de la parte a), indicando cuáles son factibles. Justifique con claridad por qué son

básicas.

Respuesta:
El gráfico siguiente muestra la región factible y todas las soluciones básicas.



Para entender por qué son esas, tenemos que poner el sistema en forma estándar ya que el concepto fue definido en ese formato:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 100 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 60 \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 & \end{aligned}$$

Las soluciones básicas corresponden a conjuntos de a tres columnas linealmente independientes. Es fácil vewr que en este caso ese se traduce a seleccionar las combinaciones de variables originales y de holgura de modo que tomen valores positivos sólo tres de ellas. De este modo, cada solución básica corresponderá a lo que se obtiene de poner en igualdad dos de las desigualdades en el problema original (incluyendo las desigualdades de no negatividad). Esto lleva a las soluciones básicas del sistema indicadas en la figura. Los puntos son:

$$\begin{array}{ll} A & (20, 20) \\ B & (40, 10) \\ C & (50, 0) \\ D & (60, 0) \\ E & (100, 0) \\ F & (0, 0) \\ G & (0, 25) \\ H & (0, 30) \\ I & 20, 50) \\ J & (33{,}3, 16{,}7) \end{array}$$

De estos, sólo A, B, C, F y G son factibles. Las demás, pese a ser básicas, entregan soluciones no factibles.

2. [10 pts.] Considere el siguiente problema de Optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \frac{e^{2x}}{e^{3y+z^2}} \\ s.a. & x-2y+3z^2 \leq 5 \\ & \log_{10}(x+y+z^2)=1 \\ & \ln(2x+y) \geq 0 \\ & x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2} \end{array}$$

a) [6 pts.] Escriba el problema en forma equivalente como un problema de Programación Lineal. Justifique claramente cada paso.

Respuesta: En primer lugar, transformamos la función objetivo restando los exponentes y aplicando la función creciente *log*:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 2x-3y+z^2 \\ s.a. & x-2y+3z^2 \leq 5 \\ & \log_{10}(x+y+z^2)=1 \\ & \ln(2x+y) \geq 0 \\ & x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2} \end{array}$$

Ahora, observemos que $\log_{10}(x+y+z^2)=1$ es equivalente a $x+y+z^2=10$ y $\ln(2x+y) \geq 0$ es equivalente a $2x+y \geq 1$. Luego, el problema es equivalente a:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 2x-3y+z^2 \\ s.a. & x-2y+3z^2 \leq 5 \\ & x+y+z^2=10 \\ & 2x+y \geq 1 \\ & x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2} \end{array}$$

Por último, podemos definir una nueva variable y hacer la sustitución $u=z^2$ para obtener:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 2x-3y+u \\ s.a. & x-2y+3u \leq 5 \\ & x+y+u=10 \\ & 2x+y \geq 1 \\ & x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2}, u \geq 0 \end{array}$$

que es un problema de Programación Lineal.

b) [4 pts.] ¿Tiene soluciones óptimas el problema equivalente? Justifique con precisión.

Respuesta: Notemos que la segunda restricción define un plano en el espacio (x,y,u), el cual intersectado con las restricciones $x \geq \frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2}, u \geq 0$ definen un conjunto cerrado y acotado (es un triángulo apoyado en parte del ortante positivo en tres dimensiones). Eso basta para asegurar que la región factible del problema es cerrada ya cotada. Como la función objetivo es continua, eso basta para estar seguros que el problerma tiene solución óptima.