PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2015
Profesores: S.Encina - G.Angulo - D.Pozo
J.Vera - A.Cataldo - R.Cuadrado

Solución Tarea 3

Fecha de Entrega: 22 de Octubre.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos con los que se trabaja en el proyecto semestral.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así **cuatro** grupo de hojas el día de la entrega (se deben entregar todas las preguntas, incluso si no se desea desarrollar alguna[2])
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día jueves 22 de Octubre a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada con la **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso, además de las otras sanciones que establezca la Dirección de la Escuela, la cual será informada de la situación.

Problema 1. (15 puntos)

a) (2 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & x_1 + 4x_2 + 5x_3 & \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \leq \quad 6 \\ & x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 & \in \quad \{0,1\} \end{array}$$

Resuelva el problema utilizando solamente la técnica de covers. Para resolver la relajación lineal de cada problema, utilice siempre el mismo criterio $^{\text{utilidad}}/_{\text{peso}}$ (obtenido en la primera resolución). Una vez encontrado el óptimo con esta metodología, resuelva el problema original al ojo. ¿Qué problema encuentra? ¿Por qué ocurre?

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] En este caso, entregar una hoja en blanco con el número de la pregunta y el número del grupo indicados claramente.

b) (3 puntos) Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío. Muestre que una envoltura convexa de X coincide con el conjunto de todas las combinaciones convexas de sus elementos, es decir,

$$EnvConv(X) = \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \;\middle|\; \sum_{i \in I} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, x_i \in X, \forall i \in I \text{ finito} \right\}$$

c) (4 puntos) Sea un conjunto de variables binarias, en que $B = \{0, 1\}$

$$X = \left\{ x \in B^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \right\}$$

con $a_j \geq 0 \; \forall j = 1, \ldots, n$. ¿Bajo qué condiciones

i) (1 punto) el conjunto X es vacío?

ii) (1 punto) la restricción $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$ es redundante?

iii) (1 punto) la restricción $x_j = 0$ es válida?

iv) (1 punto) la restricción $x_i + x_j \leq 1$ es válida?

d) (3 puntos) Sean A una matriz de $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Pruebe que se tiene exactamente una de las siguientes alternativas:

(1) $\exists \; x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax \geq b$.

(2) $\exists \; y \geq 0$ tal que $A^t y = 0$ y $b^t y > 0$.

e) (3 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lllll} (P) & \text{mín} & c^T x & & \\ & \text{s.a.} & Ax & = & b \\ & & x & \geq & 0 \end{array}$$

Sea x^* la solución óptima de (P), asumiendo que existe, y sea y^* la solución del dual (D) de este problema.

i) (1 punto) Sea $\hat{x}$ la solución óptima del primal cuando c es reemplazada por algún $\hat{c}$. Demuestre que

$$(\hat{c} - c)^T (\hat{x} - x^*) \leq 0$$

ii) (2 puntos) Fijando el vector de costos en c, pero asumiendo ahora que se cambia el vector b por $\hat{b}$, y sea $\hat{x}$ su correspondiente solución en el nuevo primal. Demuestre que

$$(y^*)^T (\hat{b} - b) \leq c^T (\hat{x} - x^*)$$

Solución Problema 1.

a) Según el cuociente utilidad/peso, el orden de preferencia sería x_2, x_3, x_1. Así, el primer corte a realizar sería $x_2 + x_3 \leq 1$.

El problema quedaría:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & x_1 + 4x_2 + 5x_3 & \\ \text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \leq 6 \\ & x_2 + x_3 & \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 & \in \{0, 1\} \end{array}$$

Si se utiliza la misma técnica, con el mismo orden de preferencia, el problema terminaría con la solución $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$.

Sin embargo, al ojo, la solución óptima del problema original es $x_1 = x_3 = 1$, $x_2 = 0$.

Luego, el problema está que el criterio $^{\text{utilidad}}/_{\text{peso}}$ sólo asegura optimalidad sobre la relajación lineal de problemas de la mochila, sin mayores complicaciones. No así en el segundo problema, que consideraba una restricción adicional. Es decir, ese criterio es válido solamente para una única restricción.

b) Los elementos de X pertenecen $EnvConv(X)$, por lo que todas las combinaciones convexas pertenecen a $EnvConv(X)$ dado que $EnvConv(X)$ es un conjunto convexo.

Por otro lado, consideremos dos combinaciones convexas cualquiera de los elementos de X, $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$, e $y = \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_r y_r$, donde $x_i \in X$ y $y_j \in X$. El vector

$$(1-\alpha)x + \alpha y = (1-\alpha)(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m) + \alpha(\mu_1 y_1 + \cdots \mu_r y_r)$$

,

donde, $0 \leq \alpha \leq 1$, es otra combinación convexa de elementos de X.

Así, el conjunto de combinaciones convexas de elementos de X es un conjunto convexo en sí, que contiene a X, y está contenido en $EnvConv(X)$. Por ende, debe coincidir con $EnvConv(X)$, que, por definición, es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a X.

c) i) Si $b < 0$.
ii) Si $\sum_{j=1}^{n} a_j > b$.
iii) Si $a_j > b$.
iv) Si x_i y x_j conforman un cover, es decir, si $a_i + a_j > b$.

d) Hay que probar que

- ◇ Si (1) es cierta, entonces (2) es falsa.
- ◇ Si (1) es falsa, entonces (2) es cierta.

Primero, supongamos que (1) es cierta, es decir, que $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax \geq b$. Luego, para todo $y \geq 0$ tal que $A^T y = 0$ se tiene que

$$b^T y = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \leq \sum_{i=1}^{m} (Ax)_i y_i = (Ax)^T y = x^T A^T y = 0$$

$$\Rightarrow b^T y \leq 0$$

Por lo que (2) es falso.

Ahora, supongamos que (1) es falsa. Consideremos los problemas

$$\begin{array}{llll} (P) & \text{mín} & 0^t x & \\ & \text{s.a.} & Ax \geq b & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} (D) & \text{máx} & b^t y & \\ & \text{s.a.} & y^t A = 0 & \\ & & y \geq 0 & \end{array}$$

Los problemas (P) y (D) son duales entre sí, y por dualidad débil, se tiene que $z(x) \geq w(y)$.

Como (1) es falsa, (P) es infactible. Luego, $z(x) = +\infty$. Así, tenemos 2 opciones para $w(y)$: que no exista por ser un problema infactible, o que sea $+\infty$ por ser no acotado. Como $y = 0$ es factible para (D), necesariamente debe cumplir que $z(y) = +\infty$, de lo que concluimos que $\exists y \geq 0$, con $A^t y = 0$ y $b^t y > 0$.

Notemos que no podía ocurrir que $w(y) \in \mathbb{R}$, pues si así fuera, por el teorema de dualidad, se tendría que $z(x) \in \mathbb{R}$ y $z(x) = w(y)$.

e) i) Llamando (P_2) al problema originado al cambiar el vector de costos de c a $\bar{c}$, se tiene que (P) y (P_2) tienen la misma región factible, por lo que x^* y $\bar{x}$ son factibles en ambos problemas. Como x^* es óptimo en (P) se tiene que:

$$c^T x^* \leq c^T \hat{x}$$

Y, como $\hat{x}$ es óptimo en (P_2), se tiene que:

$$\hat{c}^T x^* \geq \hat{c}^T \hat{x}$$

Combinando ambas inecuaciones, se obtiene que

$$c^T x^* - \hat{c}^T x^* \leq c^T \hat{x} - \hat{c}^T \hat{x}$$

$$(\hat{c} - c)^T (\hat{x} - x^*) \leq 0$$

ii) Llamando (P_3) al problema originado al cambiar el vector b por $\hat{b}$, y (D_3) a su dual, se tiene que (D) y (D_3) tienen la misma región factible. Sea $\hat{y}$ a la solución óptima del problema (D_3). Por el mismo razonamiento, se tiene que:

$$\hat{b}^T y^* \leq \hat{b}^T y$$

Por dualidad fuerte, se tiene que $c^t \hat{x} = \hat{b}^T \hat{y}$:

$$\hat{b}^T y^* \leq c^T \hat{x}$$

Por dualidad fuerte, se sabe también que $c^T x^* = b^T y^*$. Restando a cada lado de la ecuación cada uno de los términos anteriores:

$$\hat{b}^T y^* - b^T y^* \leq c^T \hat{x} - c^T x^*$$

Factorizando se llega a lo pedido.

Problema 2. (25 puntos)

a) (6 puntos) Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{lll} (P) \quad \text{mín} & c_1 x_1 + c_2 x_2 & \\ \text{s.a.} & 2x_1 - 2x_2 & \leq \quad 9 \\ & 2x_1 + 2x_2 & \geq \quad 9 \\ & x_1 - 4x_2 & \geq \quad -6 \\ & x_1, x_2 & \in \quad \mathbb{Z}_0^+ \end{array}$$

i) (2 puntos) Resuelva la relajación lineal para todo valor de c_1 y c_2. Muestre que redondeando las fraccionarias al entero más cercano no se encuentra una solución factible.

ii) (2 puntos) Escriba explícitamente los cortes que agregaría de modo de asegurar que, para todo valor de c_1 y c_2 no nulos, la solución del problema lineal es entera.

iii) (2 puntos) Sea $c_1 = 5$ y $c_2 = -5$. Indique al menos un corte de Gomory para este problema.

b) (3 puntos) Para este sábado y domingo, un abnegado padre debe cuidar a su hijo. Él sabe que el día sábado dan en televisión 10 horas y el domingo 6 horas de los programas de televisión favoritos de su hijo. Además, ha comprado 8 horas de películas infantiles (las que le llegarán el viernes), y tiene la posibilidad de grabar los programas que su hijo no vea el sábado para verlos el domingo.

Para planificar el fin de semana, el padre ha decidido que no verán más de 6 horas de televisión (programas de televisión o películas infantiles) el sábado y 4 horas el domingo, y que al menos verán 6 horas durante todo el fin de semana.

Este padre, para decidir lo que verán sábado y domingo, ha puesto costo a cada tipo de programa que puede ser visto. Este costo es de 2 por hora para los programas que transmiten el sábado, de 5 para los programas que transmiten el día domingo y de 3 para las películas infantiles.

Con base en la información entregada, construya un grafo que permita formular el problema antes descrito como un problema de flujo a costo mínimo.

c) (10 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lll} (P) \quad \text{mín} & z = -3x_1 + x_2 & \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 & \geq \quad 0 \\ & x_1 - 2x_2 & \geq \quad -6 \\ & x_1 + x_2 & \leq \quad 5 \\ & 5x_1 - x_2 & \leq \quad 20 \\ & x_2 & \geq \quad 0 \end{array}$$

i) (2 puntos) Formule el problema de optimización que permite encontrar la mejor cota inferior para (P).

ii) (2 puntos) Grafique la región factible de (P) y encuentre el óptimo utilizando el método gráfico. Indique claramente x^* y z^*.

iii) (2 puntos) Encuentre el óptimo del problema dual usando el Teorema de Holguras Complementarias.

iv) (4 puntos) Reemplace la cuarta restricción por $5x_1 - x_2 \leq 25$ y desarrolle nuevamente i), ii) y iii). ¿Qué diferencias existen?

d) (6 puntos) Pedro, Juan y Diego son conocidos por su glotonería, y tienen antojo de alfajores. Como conocen el negocio local, saben que pueden regatear, pero sólo si están solos. Por lo mismo, para saciar sus antojo, cada uno cotizó el valor de 3 locales para comprar estos productos: «Galletas», «Manjar», y «Chocolate». Sin embargo, el poder de «regateo» de fue más efectivo en algunas personas que en otras, para cada tienda. Al juntarse de nuevo, para decidir cómo comprar, ordenaron la información de precios que lograron cada uno y construyeron la siguiente información, en que c_{ij} es el precio logrado el individio j en el local i por cada alfajor, O_i es la cantidad de alfajores que disponía el local i en inventario y D_j es la cantidad de alfajores que antoja cada integrante j.

$$c_{ij} = \begin{array}{r} \\ \text{Galletas} \\ \text{Manjar} \\ \text{Chocolate} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Pedro} & \text{Juan} & \text{Diego} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$O = \begin{pmatrix} O_{\text{Galletas}} \\ O_{\text{Manjar}} \\ O_{\text{Chocolate}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} D_{\text{Pedro}} \\ D_{\text{Juan}} \\ D_{\text{Diego}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Juan ha salido con la idea de que Diego compre todo en el local Chocolate, que Juan agote la oferta del local Chocolate y luego compre en el local Manjar, y que Pedro agote la oferta del local Manjar para luego comprar desde el local Galletas. Sin embargo, Diego no está de acuerdo, porque cree que existe una mejor manera de comprar los alfajores.

i) (2 puntos) Modele el problema anterior como un grafo para que sea resuelto como un problema de flujo a costo mínimo.

ii) (1 punto) Indique claramente la base asociada a la idea de Juan.

iii) (3 puntos) Resuelva el modelo realizado en i) utilizando Simplex especializado en redes. Tome como solución inicial la idea de Juan.

Solución Problema 2.

a) i) Al resolver la relajación lineal del problema, se obtiene que el área factible queda determinada por un triángulo de vértices $A = (2,4; 2,1), B = (4,5; 0)$ y $C = (8; 3,5)$. Esto se obtiene al realizar el sistema de ecuaciones para los distintos pares de ecuaciones.

Luego, para los diferentes valores de c_1 y c_2, la solución se encontrará en los vértices A, B o C, o bien en las restricciones que conforman la región factible, determinadas por las rectas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, o $\overline{AC}$.

Finalmente, es posible ver que, al redondear las diferentes variables fraccionarias al entero más cercano, no se encuentra solución factible:

- Punto $A = (2,4; 2,1) \to (2,2)$ este punto no es factible ya que no satisface la restricción 3.
- Punto $B = (4,5; 0) \to (4,0)$ o $(5,0)$. Ambos puntos no son factibles, ya que no satisfacen las restricciones 2 y 1 respectivamente.
- Punto $C = (8; 3,5) \to (8,3)$ o $(8,4)$. Ambos puntos no son factibles, ya que no satisfacen las restricciones 1 y 3 respectivamente.

ii) Dentro del área factible, están los puntos enteros (4,1), (5,1), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (6,3) y (7,3). Los cortes que se agregan deben ser la envoltura convexa de esos puntos. Con esto, se obtienen las siguientes restricciones.

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 - 3x_2 \geq -3 \\ x_2 \leq 3 \\ x_2 \geq 1 \end{array} \right\}$$

iii) Si $(c_1, c_2) = (5, -5)$, el óptimo se logra en $(x_1, x_2) = (12/5, 21/10)$. En ese punto, las variables básicas son x_1, x_2 y x_3. Así,

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1/10 & -1/5 \\ 1 & -3/5 & -4/5 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

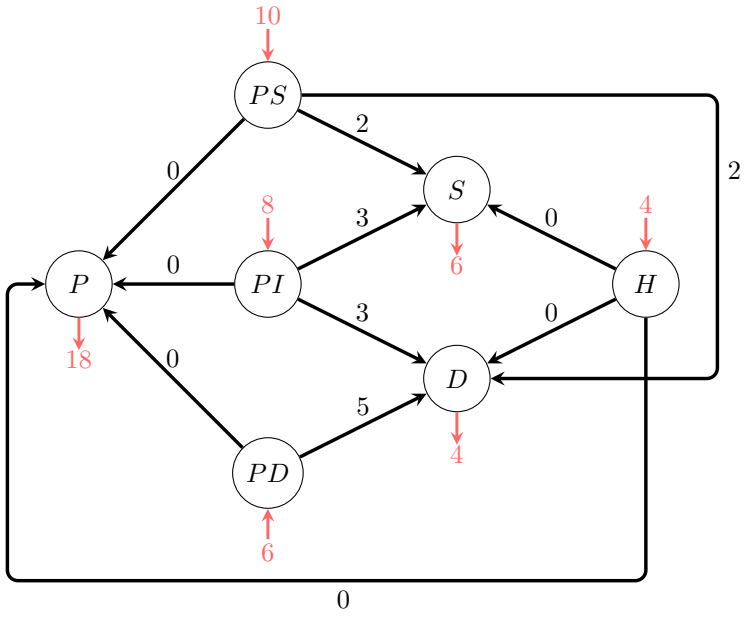
$$\bar{R} = B^{-1}R = \begin{bmatrix} -2/5 & -1/5 \\ -1/10 & 1/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \quad \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 12/5 \\ 21/10 \\ 42/5 \end{pmatrix}$$

Así, es posible hacer dos cortes:

$$\frac{3}{5}x_4 + \frac{4}{5}x_5 \geq \frac{2}{5}$$
$$\frac{9}{10}x_4 + \frac{1}{5}x_5 \geq \frac{1}{10}$$

Estos cortes son válidos dado que cortan el espacio (en particular, a los valores de las variables no básicas se le está impidiendo valer cero), excluyendo a la solución fraccionaria actual.

b) El grafo a continuación es la representación de flujo a costo mínimo solicitada.



Los nodos llamados PS y PD representan a la oferta de programas los días sábado y domingo respectivamente. El nodo PI representa la oferta por películas infantiles. Los nodos S y D representan la demanda por horas de televisión (ya sea por programas o por películas) para los días sábado y domingo respectivamente. Los nodos P y H se utilizan para balancear oferta y demanda.

La oferta de 4 horas del nodo H asegura que de las 10 horas por televisión que demandan los nodos S y D al menos 6 deberán ser satisfechas por programas o películas (dejando la posibilidad de que a los más 4 no sean satisfechas). La demanda de 18 horas del nodo P permite balancear la oferta y demanda. Sobre cada arco se ha colocado el costo supuesto por hora asociado en función del programa (sábado o domingo) o si es película. Las cotas inferiores y superiores son 0 e infinito para todos los arcos.

c) i) El problema que permite encontrar la mejor cota inferior para (P) es el problema dual, que queda:

$$\begin{array}{lll} (D) \quad \text{máx } w = -6y_2 + 5y_3 + 20y_4 & & \\ \text{s.a.} \quad y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4 & = & -3 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 & \leq & 1 \\ y_1, y_2 & \geq & 0 \\ y_3, y_4 & \leq & 0 \end{array}$$

La función objetivo maximiza el valor de la cota formada con el lado derecho de las restricciones.

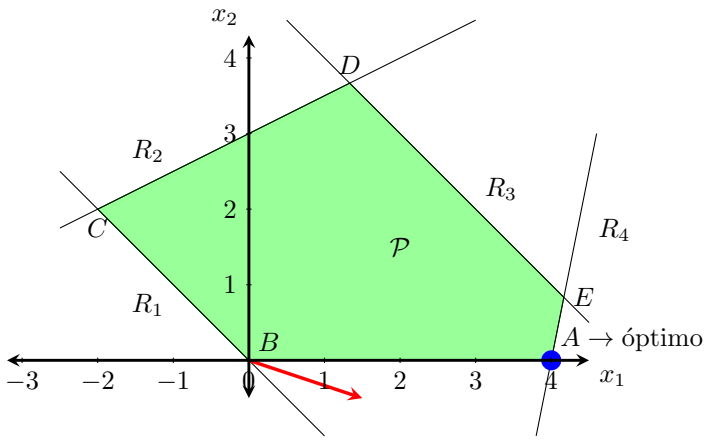
La primera restricción obliga a que el coeficiente de x_1 sea igual a -3, para asegurar que sea una cota inferior (no sabemos el signo de x_1).

La segunda restricción obliga a que el coeficiente de x_2 sea menor o igual a 1, para asegurar que sea una cota inferior (sabemos que $x_2 \geq 0$).

$y_1, y_2 \geq 0$ para conservar el sentido de la desigualdad (necesitamos que el lado derecho sea menor al lado izquierdo, para que sea cota inferior).

$y_3, y_4 \leq 0$ para cambiar el sentido de la desigualdad (necesitamos que el lado derecho sea menor al lado izquierdo, para que sea cota inferior).

ii) Gráficamente, el óptimo se alcanza en el punto $x^* = (4, 0)$, con un valor óptimo de $z^* = -12$.



$$A = (4, 0) \qquad B = (0, 0) \qquad C = (-2, 2) \qquad D = \left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right) \qquad E = \left(\frac{25}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

iii) El THC indica lo siguiente:

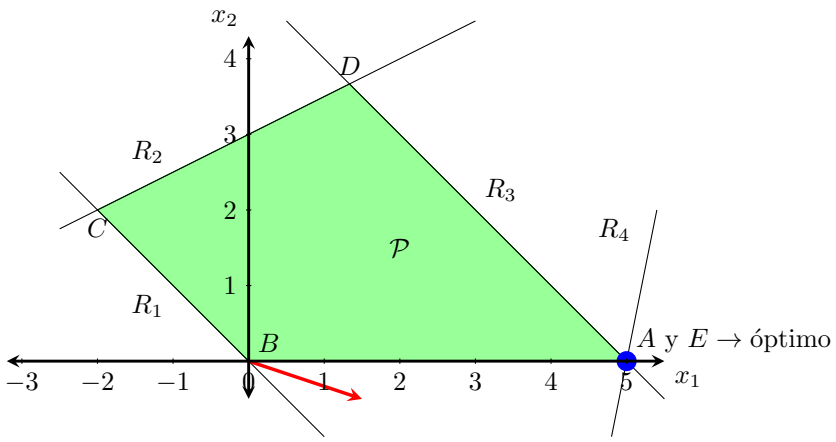
$$\begin{array}{rlll} y_1^* \cdot (x_1^* + x_2^* - 0) & = 0 & \rightarrow & y_1^* = 0 \\ y_2^* \cdot (x_1^* - 2x_2^* - (-6)) & = 0 & \rightarrow & y_2^* = 0 \\ y_3^* \cdot (x_1^* + x_2^* - 5) & = 0 & \rightarrow & y_3^* = 0 \\ y_4^* \cdot (5x_1^* - x_2^* - 20) & = 0 & \rightarrow & \text{No aporta información} \\ x_1^* \cdot (y_1^* + y_2^* + y_3^* + 5y_4^* - (-3)) & = 0 & \rightarrow & 5y_4^* + 3 = 0 \\ x_2^* \cdot (-y_1^* - 2y_2^* + y_3^* - y_4^* - 1) & = 0 & \rightarrow & \text{No aporta información} \end{array}$$

Así, el óptimo dual se encuentra en $(y_1, y_2, y_3, y_4)^* = (0, 0, 0, -3/5)$, con el valor óptimo dual de $w^* = -12$.

iv) Los problemas primal y dual son los que se muestran a continuación:

$$\begin{array}{lll} (P) \quad \text{mín} \quad z = -3x_1 + x_2 & & \\ \text{s.a.} \quad x_1 + x_2 & \geq & 0 \\ x_1 - 2x_2 & \geq & -6 \\ x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ 5x_1 - x_2 & \leq & 25 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} (D) \quad \text{máx} \quad w = -6y_2 + 5y_3 + 25y_4 & & \\ \text{s.a.} \quad y_1 + y_2 + y_3 + 5y_4 & = & -3 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 & \leq & 1 \\ y_1, y_2 & \geq & 0 \\ y_3, y_4 & \leq & 0 \end{array}$$

A continuación se muestra el nuevo gráfico del problema:

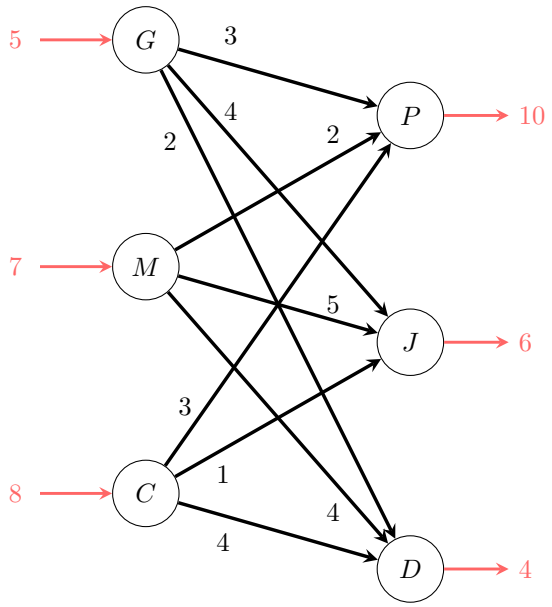


El Teorema de Holgura Complementaria se vuelve el siguiente:

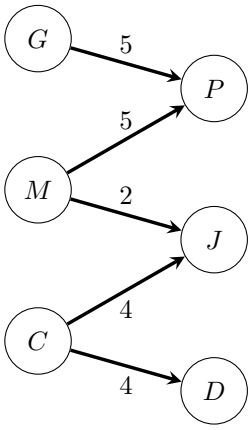
$$
\begin{array}{rcll}
y_1^* \cdot (x_1^* + x_2^* - 0) & = 0 & \rightarrow & y_1^* = 0 \\
y_2^* \cdot (x_1^* - 2x_2^* - (-6)) & = 0 & \rightarrow & y_2^* = 0 \\
y_3^* \cdot (x_1^* + x_2^* - 5) & = 0 & \rightarrow & \text{No aporta información} \\
y_4^* \cdot (5x_1^* - x_2^* - 25) & = 0 & \rightarrow & \text{No aporta información} \\
x_1^* \cdot (y_1^* + y_2^* + y_3^* + 5y_4^* - (-3)) & = 0 & \rightarrow & y_3^* + 5y_4^* + 3 = 0 \\
x_2^* \cdot (-y_1^* - 2y_2^* + y_3^* - y_4^* - 1) & = 0 & \rightarrow & \text{No aporta información}
\end{array}
$$

La diferencia está en que ahora, la solución óptima es una solución degenerada. Por lo mismo, el Teorema de Holgura Complementaria no entrega información suficiente para poder mapear de óptimo primal a óptimo dual, dado que hay más restricciones activas en el óptimo que las necesarias.

d) i) El problema anterior queda modelado como el grafo a continuación, en que los arcos muestran el costo unitario. Cada arco tiene cotas 0 e infinito.



ii) La base asociada a la idea de Juan está asociada al siguiente árbol:



iii) ◇ Iteración 1.

La base de la sección (ii) es la base que utilizamos para calcular el valor de las variables duales ($\pi's$), a través de los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$:

$$\bar{c}_{GP} = 3 - \pi_G + \pi_P = 0$$
$$\bar{c}_{MP} = 2 - \pi_M + \pi_P = 0$$
$$\bar{c}_{MJ} = 5 - \pi_M + \pi_J = 0$$
$$\bar{c}_{CJ} = 1 - \pi_C + \pi_J = 0$$
$$\bar{c}_{CD} = 4 - \pi_C + \pi_D = 0$$

Considerando, arbitrariamente, $\pi_P = 0$ se tiene que $\pi_G = 3, \pi_M = 2, \pi_C = -2, \pi_J = -3$, y $\pi_D = -6$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de las variables no básicas.

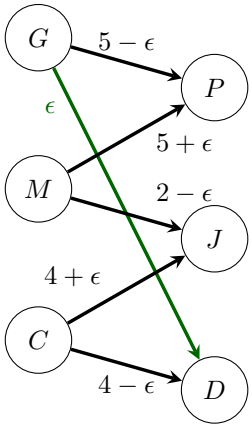
- Cálculo de costos reducidos de las variables no básicas.

$$\bar{c}_{GP} = 3 - (3) + 0 = 0 \geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{GD} = 2 - (3) + (-6) = -7 \not\geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{MD} = 4 - (2) + (-6) = -4 \not\geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{CP} = 3 - (-2) + (3) = 8 \geq 0 \ \ (l)$$

Como el costo reducido $\bar{c}_{GD}$ es aquél que más invalida la condición de optimalidad, entonces entra a la base f_{GD}.

- Salida de la Base.

Para determinar que variable debe abandonar la base, se construye el grafo presentado en la figura a continuación a partir del árbol generador mínimo agregando la variable entrante.

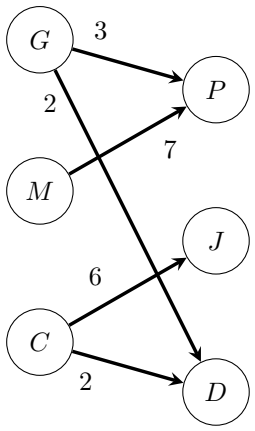


Se debe calcular el cuello de botella de la reasignación de flujo. Para ello:

$$\text{mín}\{\epsilon_{GP} = 5, \epsilon_{GD} = \infty, \epsilon_{MP} = \infty, \epsilon_{MJ} = 2, \epsilon_{CJ} = \infty, \epsilon_{CD} = 4\} = \epsilon = 2$$

Luego, saldrá de la base la variable f_{MJ}, y pasamos a la siguiente iteración.

◇ Iteración 2.
La solución básica factible inicial se muestra en la figura a continuación.



Esta es la base que utilizamos para calcular el valor de las variables duales ($\pi's$), a través de los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$:

$$\bar{c}_{GP} = 3 - \pi_G + \pi_P = 0$$
$$\bar{c}_{GD} = 2 - \pi_G + \pi_D = 0$$
$$\bar{c}_{MP} = 2 - \pi_M + \pi_P = 0$$
$$\bar{c}_{CJ} = 1 - \pi_C + \pi_J = 0$$
$$\bar{c}_{CD} = 4 - \pi_C + \pi_D = 0$$

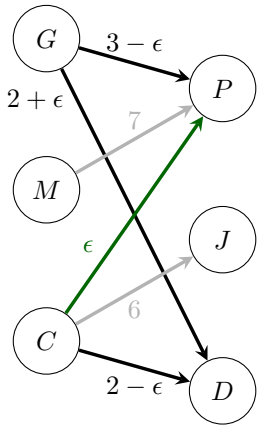
Considerando, arbitrariamente, $\pi_P = 0$ se tiene que $\pi_G = 3, \pi_M = 2, \pi_C = 5, \pi_J = 4$, y $\pi_D = 1$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de costos reducidos de las variables no básicas.

$$\bar{c}_{GJ} = 4 - (3) + (4) = 5 \geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{MJ} = 5 - (2) + (4) = 7 \geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{MD} = 4 - (2) + (1) = 3 \geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{CP} = 3 - (5) + (0) = -2 \ngeq 0 \ \ (l)$$

Como el costo reducido $\bar{c}_{CP}$ es aquél que más invalida la condición de optimalidad, entonces entra a la base f_{CP}.

- Salida de la Base.
Para determinar que variable debe abandonar la base, se construye el grafo presentado en la figura 3 a partir del árbol generador mínimo agregando la variable entrante.



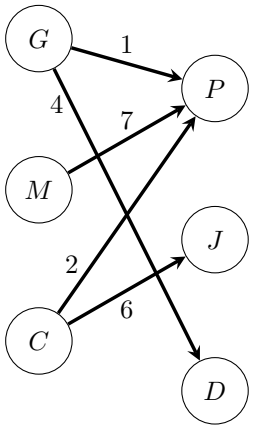
Se debe calcular el cuello de botella de la reasignación de flujo. Para ello:

$$\text{mín}\{\epsilon_{GP} = 3, \epsilon_{GD} = \infty, \epsilon_{CP} = \infty, \epsilon_{CD} = 2\} = \epsilon = 2$$

Luego, escogemos f_{MD} para que abandone la base, y pasamos a la siguiente iteración.

◇ Iteración 3

La solución básica factible inicial se muestra en la figura a continuación.



Esta es la base que utilizamos para calcular el valor de las variables duales ($\pi's$), a través de los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$:

$$\bar{c}_{GP} = 3 - \pi_G + \pi_P = 0$$
$$\bar{c}_{GD} = 2 - \pi_G + \pi_D = 0$$
$$\bar{c}_{MP} = 2 - \pi_M + \pi_P = 0$$
$$\bar{c}_{CP} = 3 - \pi_C + \pi_P = 0$$
$$\bar{c}_{CJ} = 1 - \pi_C + \pi_J = 0$$

Considerando, arbitrariamente, $\pi_P = 0$ se tiene que $\pi_G = 3, \pi_M = 2, \pi_C = 3, \pi_J = 2$, y $\pi_D = 1$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de las variables no básicas.

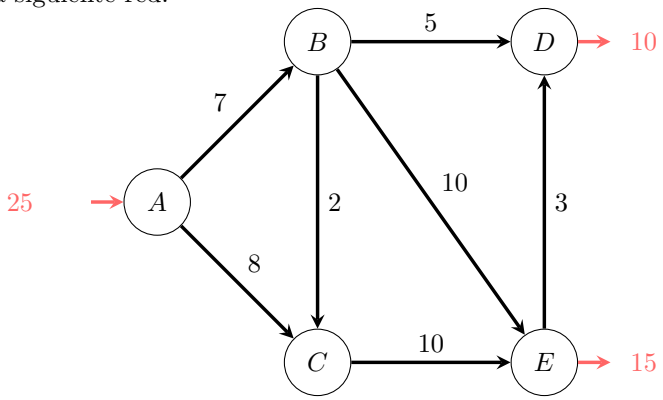
- Cálculo de costos reducidos de las variables no básicas.

$$\bar{c}_{GJ} = 4 - (3) + (2) = 3 \geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{MJ} = 5 - (2) + (2) = 5 \geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{MD} = 4 - (2) + (1) = 3 \geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{CD} = 4 - (3) + (1) = 2 \geq 0 \ \ (l)$$

Como todos los costos reducidos de las variables no básicas cumplen con su criterio de optimalidad (costos reducidos no negativos para variables en su cota inferior y no positivos para las variables en su cota superior), la solución es óptima.
Así, lo óptimo es que Diego compre todos sus alfajores en Galleta, Juan en Chocolate, y Pedro agote las ofertas de los tres locales. Así, el costo que gastarían entre todos sería de 37, óptimo.

Problema 3. (25 puntos)

a) (7 puntos) Considere la siguiente red:



i) (3 puntos) Actualmente, la manera de repartir los recursos es a través de la ruta $A-B-C-E$ para el nodo E, y a través de la ruta $A-B-C-E-D$ para el nodo D. Encuentre, utilizando el algoritmo de Simplex especializado en redes, la manera de distribuir los recursos a través de la red que incurra el menor costo.

ii) (2 puntos) ¿Cuál es el rango de valores que puede tomar el costo del arco (A, B) para que la solución óptima **no** cambie?

iii) (2 puntos) Se está considerando agregar una nueva ruta que va desde D a E. ¿Cuál es el costo que debe tener este arco para que la solución básica **sí** cambie?

b) (11 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{array}{llrcll}
(P) & \text{mín} & 60x_1 + 30x_2 + 120x_3 + 20x_4 & = & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 & \\
& \text{s.a.} & -4x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 2x_4 & = & 2 & = b_1 \\
& & 5x_1 + 10x_2 + 5x_3 & \geq & -5 & = b_2 \\
& & x_1, x_3, x_4 & \geq & 0 & \\
& & x_2 & \leq & 0 &
\end{array}
$$

i) (1 punto) Construya el problema dual (D) de (P).

ii) (1 punto) De manera gráfica, determine el óptimo del problema dual (D), e indique su valor w^*.

iii) (2 puntos) Usando el Teorema de Holguras Complementarias, encuentre el óptimo del problema primal (P) e indique su valor x^*.

iv) (1 punto) Indique, haciendo su análisis desde el problema dual (D), cuánto puede valer el coeficiente del lado derecho de la primera restricción primal (b_1) para que la base óptima no cambie.

v) (2 puntos) Indique en cuánto varía el valor del precio sombra de la primera restricción primal si es que el costo asociado a x_4 (c_4) aumenta en un δ marginal.

vi) (2 puntos) Ahora, en el problema dual (D), indique en cuánto varía el valor óptimo dual[3] (w^*) si el costo asociado a la variable x_4 (c_4) cambia de 20 a 10. Responda solamente usando conceptos de dualidad.

[3]No es necesario que explicite los cálculos de matrices inversas.

vii) (2 puntos) También en el problema dual (D), indique en cuánto varía, ahora, el valor óptimo dual (w^*) si el costo asociado a la variable x_4 (c_4) cambia de 20 a 5. Haga su cálculo solamente usando precios sombra.

c) (7 puntos) Considere el problema de programación lineal entero:

$$\begin{array}{lrcl} (P) & \text{máx} & z = x_1 + x_2 + x_3 & \\ & \text{s.a.} & 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 & \leq & 16 \\ & & 6x_1 + 5x_2 & \leq & 30 \\ & & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}_0^+ \\ & & x_3 & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

i) (1,5 puntos) Grafique el dominio del problema (P).

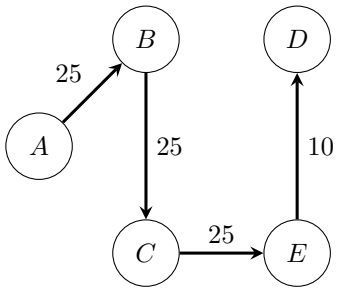
ii) (1 punto) Escriba el problema relajado (PR) de (P) e indique si (PR) admite al menos una solución óptima.

iii) (3 puntos) Si escribió bien el problema relajado, su óptimo debería ser $(x_1, x_2, x_3) = (5, 0, 3/4)$. Aplique el método *Branch & Bound* para encontrar el conjunto solución óptimo, utilizando como punto de partida el punto indicado. Indique claramente el gráfico del conjunto factible (de, al menos, los subproblemas a dos niveles de profundidad), el incumbente actual y el óptimo encontrado para cada subproblema a resolver. Indique claramente el orden en que resuelve los subproblemas y el criterio que utiliza para podar. Si debe escoger entre dos variables para ramificar, escoja la que tenga mayor valor.

iv) (1,5 puntos) Calcule el GAP del problema.

Solución Problema 3.

a) i) Para resolver el problema con el algoritmo de Simplex especializado en redes, se debe encontrar una base factible inicial (árbol generador mínimo) y comenzar a iterar. La figura a continuación representa la base factible inicial.



◇ Iteración 1.
La base recién indicada es la que utilizamos para calcular el valor de las variables duales $(\pi's)$, a través de los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$:

$$\bar{c}_{AB} = 7 - \pi_A + \pi_B = 0$$
$$\bar{c}_{BC} = 2 - \pi_B + \pi_C = 0$$
$$\bar{c}_{CE} = 10 - \pi_C + \pi_E = 0$$
$$\bar{c}_{ED} = 3 - \pi_E + \pi_E = 0$$

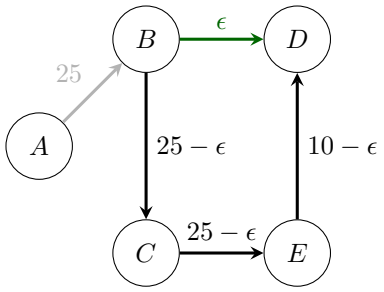
Considerando, arbitrariamente, $\pi_E = 0$ se tiene que $\pi_A = 19, \pi_B = 12, \pi_C = 10$, y $\pi_D = -3$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de costos reducidos de las variables no básicas.

$$\bar{c}_{AC} = 8 - (19) + (10) = -1 \not\geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{BD} = 5 - (12) + (-3) = -10 \not\geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{BE} = 10 - (12) + (0) = -2 \not\geq 0 \ \ (l)$$

Como el costo reducido $\bar{c}_{BD}$ es aquél que más invalida la condición de optimalidad, entonces entra a la base f_{BD}.

- Salida de la Base.
Para determinar que variable debe abandonar la base, se construye el grafo presentado en la figura a continuación a partir del árbol generador mínimo agregando la variable entrante.

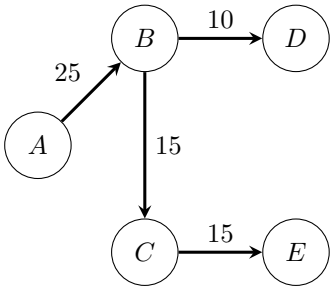


Se debe calcular el cuello de botella de la reasignación de flujo. Para ello:

$$\text{mín}\{\epsilon_{BD} = \infty, \epsilon_{BC} = 25, \epsilon_{CE} = 25, \epsilon_{ED} = 10\} = \epsilon = 10$$

Luego, escogemos f_{ED} para que abandone la base, y pasamos a la siguiente iteración.

◇ Iteración 2.
La solución básica factible inicial se muestra en la figura a continuación.



Esta es la base que utilizamos para calcular el valor de las variables duales ($\pi's$), a través de los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$:

$$\bar{c}_{AB} = 7 - \pi_A + \pi_B = 0$$
$$\bar{c}_{BC} = 2 - \pi_B + \pi_C = 0$$
$$\bar{c}_{BD} = 5 - \pi_C + \pi_D = 0$$
$$\bar{c}_{CE} = 10 - \pi_C + \pi_E = 0$$

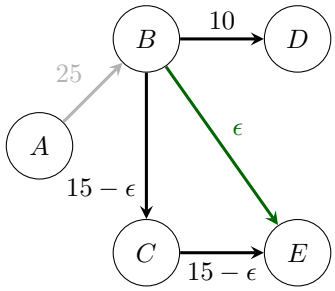
Considerando, arbitrariamente, $\pi_B = 0$ se tiene que $\pi_A = 7, \pi_C = -2, \pi_D = -5$, y $\pi_E = -12$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de costos reducidos de las variables no básicas.

$$\bar{c}_{AC} = 8 - (7) + (-2) = -1 \not\geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{BE} = 10 - (0) + (-12) = -2 \not\geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{ED} = 3 - (-12) + (-5) = 10 \geq 0 \ \ (l)$$

Como el costo reducido $\bar{c}_{BE}$ es aquél que más invalida la condición de optimalidad, entonces entra a la base f_{BE}.

- Salida de la Base.
  Para determinar que variable debe abandonar la base, se construye el grafo presentado en la figura 3 a partir del árbol generador mínimo agregando la variable entrante.



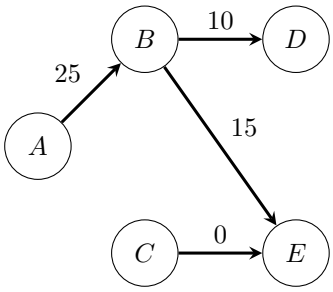
  Se debe calcular el cuello de botella de la reasignación de flujo. Para ello:

$$\text{mín}\{\epsilon_{BE} = \infty, \epsilon_{BC} = 15, \epsilon_{CE} = 15\} = \epsilon = 15$$

  Luego, puede salir de la base f_{BC} o f_{CE}. Cualquiera de las variables que se escoja, el resultado final será el mismo. Entonces, escogemos f_{BC} para que abandone la base, y pasamos a la siguiente iteración.

◇ Iteración 3

La solución básica factible inicial se muestra en la figura a continuación.



Esta es la base que utilizamos para calcular el valor de las variables duales ($\pi's$), a través de los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$:

$$\bar{c}_{AB} = 7 - \pi_A + \pi_B = 0$$
$$\bar{c}_{BD} = 5 - \pi_B + \pi_D = 0$$
$$\bar{c}_{BE} = 10 - \pi_B + \pi_E = 0$$
$$\bar{c}_{CE} = 10 - \pi_C + \pi_E = 0$$

  Considerando, arbitrariamente, $\pi_B = 0$ se tiene que $\pi_A = 7, \pi_C = 0, \pi_D = -5$, y $\pi_E = -10$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de costos reducidos de las variables no básicas.

$$\bar{c}_{AC} = 8 - (7) + (0) = 1 \geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{BC} = 2 - (0) + (0) = 2 \geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{ED} = 3 - (-10) + (-5) = 8 \geq 0 \ \ (l)$$

Como todos los costos reducidos de las variables no básicas cumplen con su criterio de optimalidad (costos reducidos no negativos para variables en su cota inferior y no positivos para las variables en su cota superior), la solución es óptima. La manera óptima de llevar los recursos del nodo D es usando la ruta $A - B - D$, y para llevar los del nodo E es usando la ruta $A - B - E$. El valor óptimo de esta asignación es 375.

ii) Está cambiando el costo de una variable no básica. Por lo tanto, comenzando desde la base óptima de (i), se calculan los costos reducidos de las variables básicas y no básicas. Sea c_{AB} el valor de costo de ese arco:

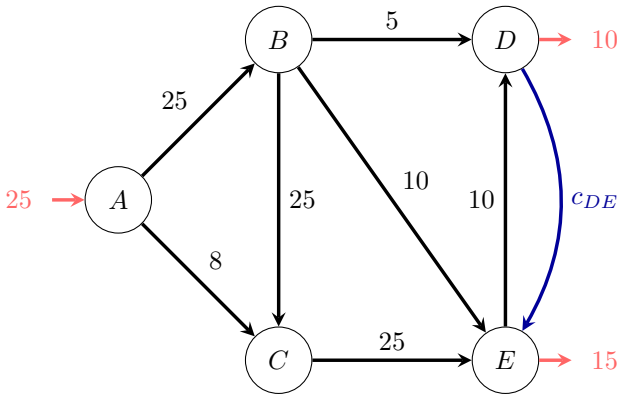
$$\bar{c}_{AB} = c_{AB} - \pi_A + \pi_B = 0$$
$$\bar{c}_{BD} = 5 - \pi_B + \pi_D = 0$$
$$\bar{c}_{BE} = 10 - \pi_B + \pi_E = 0$$
$$\bar{c}_{CE} = 10 - \pi_C + \pi_E = 0$$

Considerando, arbitrariamente, $\pi_B = 0$ se tiene que $\pi_A = c_{AB}, \pi_C = 0, \pi_D = -5$, y $\pi_E = -10$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de las variables no básicas. Calculamos los costos reducidos de las variables no básicas.

$$\bar{c}_{AC} = 8 - (c_{AB}) + (0) = 8 - c_{AB} \geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{BC} = 2 - (0) + (0) = 2 \geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{ED} = 3 - (-10) + (-5) = 8 \geq 0 \ \ (l)$$

Así, si $c_{AB} \leq 8$, el criterio de optimalidad se sigue cumpliendo y la base sigue siendo óptima (no cambia).

iii) La nueva situación queda representado en el siguiente grafo, en que el arco nuevo se muestra en color azul. Sea c_{DE} el costo de el nuevo arco:



Así, se está agregando una variable no básica. Luego, resta calcular el costo reducido de esa variable:

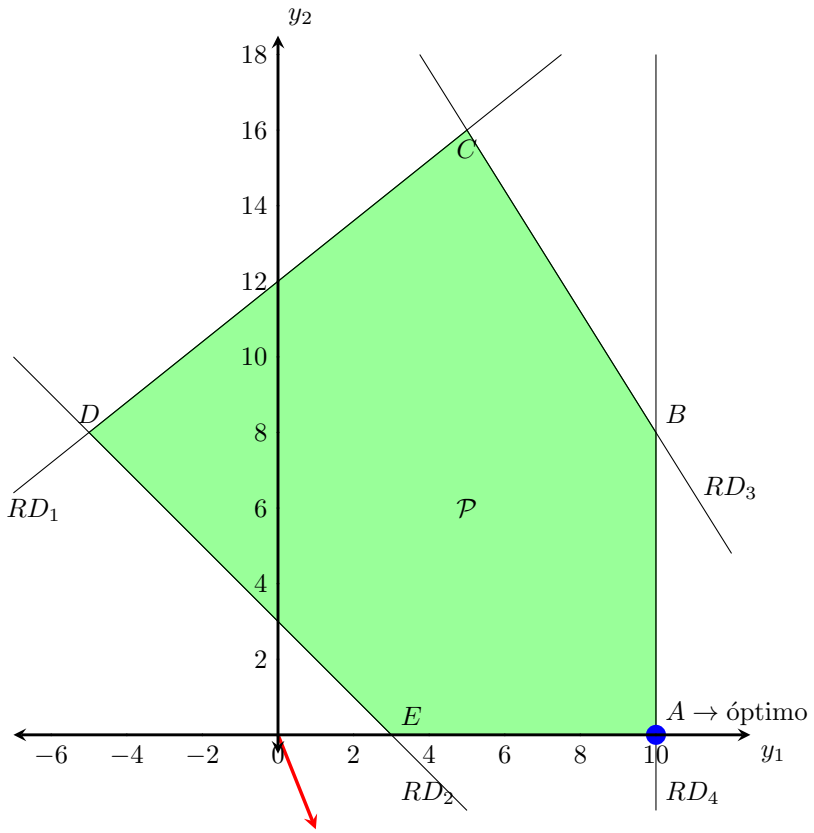
$$\bar{c}_{DE} = c_{DE} - (-5) + (-10) = c_{DE} - 5 < 0 \ \ (l)$$

Por lo tanto, este costo debe ser tal que $c_{DE} < 5$ para que esa base no sea óptima, y convenga ingresar a la base el arco (D, E).

b) i) El problema dual es el que se muestra a continuación.

$$\begin{array}{lllll} (D) & \text{máx} & 2y_1 - 5y_2 & & \\ & \text{s.a.} & -4y_1 + 5y_2 & \leq & 60 \\ & & 10y_1 + 10y_2 & \geq & 30 \\ & & 8y_1 + 5y_2 & \leq & 120 \\ & & 2y_1 & \leq & 20 \\ & & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

ii) La imagen a continuación representa el problema dual graficado, con el gradiente de la función objetivo apuntando en dirección en que maximiza la función objetivo $w(y)$.



$$A = (10, 0) \qquad B = (10, 8) \qquad C = (-5, 8) \qquad D = (5, 16) \qquad E = (3, 0)$$

Así, el óptimo del problema dual es el punto A, que otorga un valor objetivo de $w^* = 20$.

iii) El Teorema de Holguras Complementarias otorga las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{rcll} y_1^* \cdot (-4x_1^* + 10x_2^* + 8x_3^* + 2x_4^* - 2) & = 0 & \rightarrow & (-4x_1^* + 10x_2^* + 8x_3^* + 2x_4^* - 2) = 0 \\ y_2^* \cdot (5x_1^* + 10x_2^* + 5x_3^* - (-5)) & = 0 & \rightarrow & \text{No aporta información} \\ x_1^* \cdot (-4y_1^* + 5y_2^* - 60) & = 0 & \rightarrow & x_1^* = 0 \\ x_2^* \cdot (10y_1^* + 10y_2^* - 30) & = 0 & \rightarrow & x_2^* = 0 \\ x_3^* \cdot (8y_1^* + 5y_2^* - 120) & = 0 & \rightarrow & x_3^* = 0 \\ x_4^* \cdot (2y_1^* - 20) & = 0 & \rightarrow & \text{No aporta información} \end{array}$$

Así, se tiene que $2x_4^* = 2 \rightarrow x_4^* = 1$. Luego, $x^* = (0, 0, 0, 1)$, con valor óptimo primal de $z^* = 20$.

iv) En el problema dual, b_1 corresponde al costo de la primera variable dual y_1. Luego, esto es un análisis de sensibilidad sobre las curvas de nivel del problema dual. Esto se puede hacer de manera gráfica, y se concluye que $0 < b_1 < \infty$ son los valores permitidos para que la base óptima no cambie.

v) Se está haciendo un cambio marginal δ sobre el costo de una variable. Primero, veamos si es básica o no (dado que, si no lo es, ese cambio no afectaría el precio sombra). Construyamos la forma estándar del problema primal.

$$\begin{array}{rlrcl} (PE) & \text{mín} & 60x_1 - 30x_2 + 120x_3 + 20x_4 & & \\ & \text{s.a.} & -4x_1 - 10x_2 + 8x_3 + 2x_4 & = & 2 \\ & & -5x_1 + 10x_2 - 5x_3 + x_5 & = & 5 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Luego, si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ y $x_4 = 1$, entonces $x_5 = 5$. Notemos que x_4 es básica. Por lo tanto, hacemos el análisis de sensibilidad:

$$V.B. = \{x_4, x_5\} \quad V.R. = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi = c_B(B^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 20+\delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+\delta/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, el precio sombra de la primera restricción cambia a $10 + \frac{\delta}{2}$ frente a un cambio marginal δ.

vi) Lo importante es saber que cualquier valor de precio sombra va a ser válido mientras la base no cambie. Por lo mismo, primero veamos cuánto puede valer c_4 (cuarto recurso en el dual) para que la base no cambie. Para ello, construyamos la forma estándar del problema dual:

$$\begin{array}{lll} (DE) \quad \text{mín} & -2y_1 + 2\hat{y}_1 + 5y_2 & \\ \text{s.a.} & -4y_1 + \hat{y}_1 + 5y_2 + y_3 = 60 \\ & 10y_1 - 10\hat{y}_1 + 10y_2 - y_4 = 30 \\ & 8y_1 - 8\hat{y}_1 + 5y_2 + y_5 \leq 120 \\ & 2y_1 - 2\hat{y}_1 + y_6 \leq 20 \\ & y_1, \hat{y}_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0 \end{array}$$

Los valores de las variables son $(y_1, \hat{y}_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = (10, 0, 0, 100, 70, 40, 0)$, por lo que las variables básicas y no básicas son:

$$V.B. = \{y_1, y_3, y_4, y_5\} \quad V.R. = \{\hat{y}_1, y_2, y_6\}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Así, un cambio en c_4 podría afectar la factibilidad de la base dual óptima. Por lo mismo, calculamos el criterio de factibilidad para distintos valores de c_4:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 120 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_4/2 \\ 60 + 2c_4 \\ -30 + 5c_4 \\ 120 - c_4 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Así, se llega a las siguientes condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} c_4 \geq 0 \\ c_4 \geq -30 \\ c_4 \geq 6 \\ 120 \geq c_4 \end{array} \right\} \rightarrow 6 \leq c_4 \leq 120$$

Así, si $c_4 = 20$ cambia a 10, la base se mantiene, por lo que el cálculo es sencillo. Calculamos los precios sombra:

$$\pi = c_B(B^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, el cambio en la función objetivo dual:

$$\Delta w = \pi_4 \cdot \Delta b = 1 \cdot (10 - 20) = -10$$

Lo que hace que el cambio de w^* sea de 20 a 10.

vii) Como $5 \notin [6, 120]$, la base óptima dual sí cambiaría (dado que se vuelve infactible). Una opción sería mapear la base a Fase I, hacer Simplex Fase I hasta encontrar el óptimo en Fase I, y luego buscar la optimalidad usando Fase II.

Otra, más sencilla, sería analizarlo gráficamente.

Sin embargo, como se pide hacer el cálculo utilizando sólo los precios sombra, calcularemos:

$$\Delta w = \Delta w \text{ de una base} + \Delta w \text{ de las otras bases}$$

Lo primero sería cuánto cambia la función objetivo hasta que cambia la base, que ocurre cuando $c_4 = 6$.

$$\Delta w \text{ de una base} = \pi_4 \cdot \Delta b = 1 \cdot (6 - 20) = -14$$

Ahora, cuando cambia la base, la variable que entra a la base es y_2 (pues $y_2 \geq 0$ deja de estar activa) y sale de la base y_4 (pues la segunda restricción se vuelve activa).

Así,

$$V.B. = \{y_1, y_3, y_3, y_5\} \quad V.R. = \{\hat{y}_1, y_4, y_6\}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 1 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/10 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 & 9/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Esta base se mantendrá óptima si

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/10 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 & 9/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 120 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_4/2 \\ 6 - c_4/2 \\ 9c_4 + 90/2 \\ 210 - 3c_4/2 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} c_4 \geq 0 \\ 6 \geq c_4 \\ c_4 \geq -10 \\ 70 \geq c_4 \end{array} \right\} \rightarrow 0 \leq c_4 \leq 6$$

por lo que si $c_4 = 5$ la base no ha vuelto a cambiar. Calculamos los valores de precio sombra:

$$\pi = c_B (B^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/10 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 & 9/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 & 7/2 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\Delta w \text{ de las otras bases} = \pi_4' \cdot \Delta b' = \frac{7}{2} \cdot (5 - 6) = \frac{-7}{2}$$

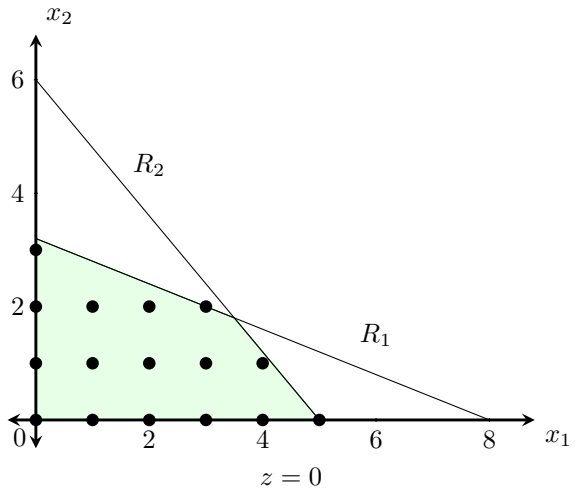
Así, el valor óptimo dual, en total, varía

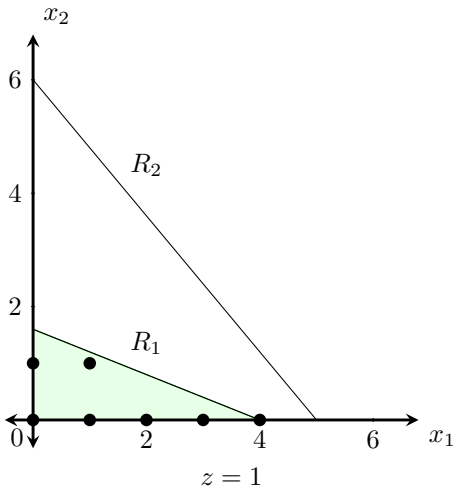
$$\Delta w = \Delta w \text{ de una base} + \Delta w \text{ de las otras bases} = -4 + \frac{-7}{2} = \frac{-35}{2}$$

Quedando con un valor final de

$$w^* = 20 + \frac{-35}{2} = \frac{5}{2}$$

c) i) Para graficar el dominio, lo más sencillo es asumir valores de z, dado que es binaria:





ii) El problema relajado es el que se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
(P) \quad \text{máx} \quad & z = x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 16 \\
& 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\
& x_3 \leq 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Este problema tiene función objetivo continua (polinomio lineal), su dominio no es vacío (el punto (0,0) pertenece a él), es cerrado (las restricciones incluyen su borde, al ser de la forma $\leq$ y $\geq$), y es acotado ($0 \leq x_1 \leq 5,\ 0 \leq x_2 \leq {}^{16}/_{5},\ 0 \leq x_3 \leq 1$). Por lo tanto, según el teorema de Bolzano-Weierstrass, el problema relajado admite al menos una solución.

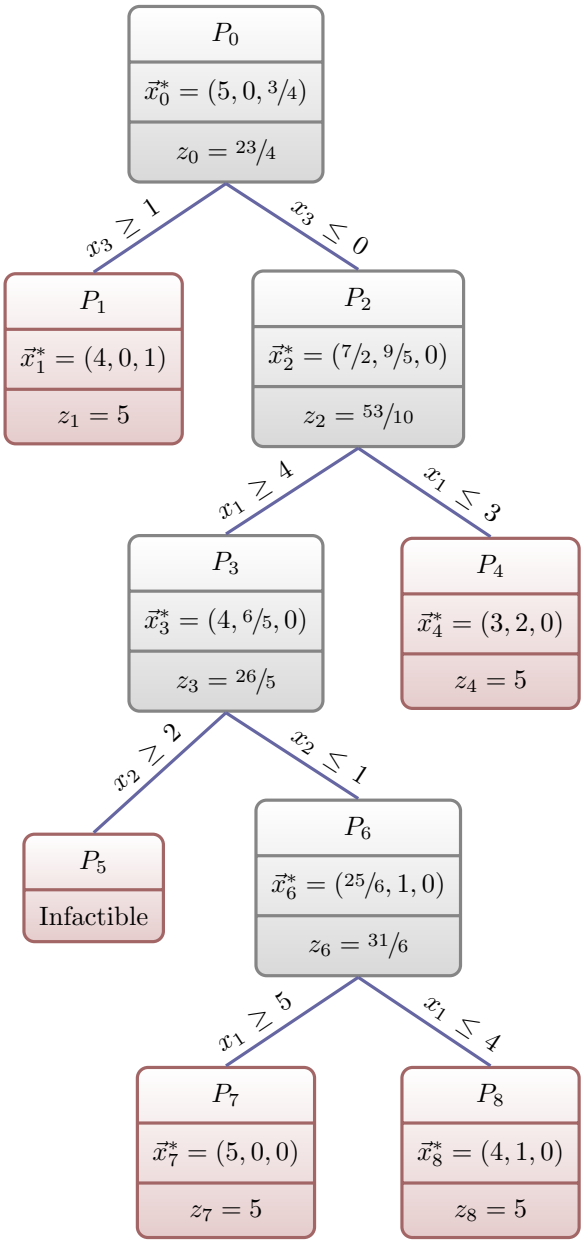
iii) El árbol de resolución queda como sigue, y los detalles pedidos se presentan en la figura de abajo.

El orden de resolución fue en el orden de los i de los distintos P_i, es decir, en amplitud. Los problemas P_1, P_4, P_7 y P_8 se podaron por solución entera, mientras que el problema P_5 se podó por infactibilidad.

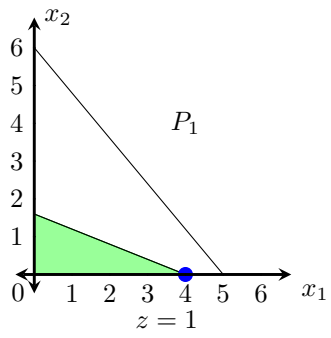
Cabe notar que el problema tiene múltiples soluciones.

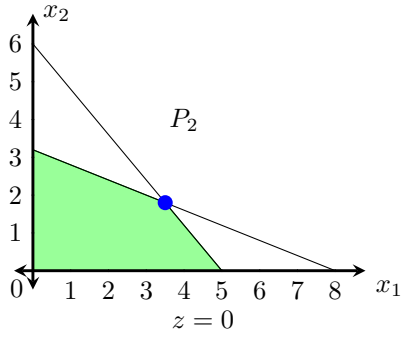
El incumbente $\bar{z}_i$, en la iteración i, es de

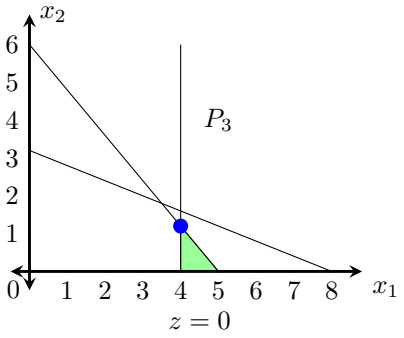
$\bar{z}_1$	$-\infty$
$\bar{z}_2$	5
$\bar{z}_3$	5
$\bar{z}_4$	5
$\bar{z}_5$	5
$\bar{z}_6$	5
$\bar{z}_7$	5
$\bar{z}_8$	5

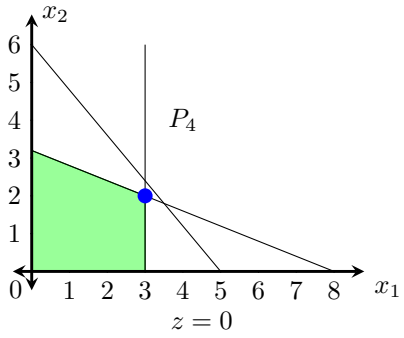


Los gráficos de los dos primeros niveles se muestran a continuación:









iv) El GAP es una medida de desempeño que me permite comparar el problema relajado con el problema entero. Se calcula como un error relativo:

$$GAP = \frac{z_{frac} - z_{ent}}{\text{máx}(1, z_{frac})} \cdot 100\,\%$$

en que z_{ent} es el óptimo real (óptimo del problema entero) y z_{frac} es el óptimo relajado (óptimo del problema lineal relajado).

Así,

$$GAP = \frac{3/4}{23/4} \cdot 100\,\% = 13{,}04\,\%$$

Problema 4. (15 puntos)

La crisis por la falta de estacionamientos en la Universidad es una fuente de molestia cada vez más importante entre los alumnos que necesitan movilizarse por medios privados al campus San Joaquín. De hecho, es sabido que si un auto entra a partir de las 10 de la mañana, la búsqueda de un espacio en el que dejar el auto es cada vez más extensa. Enrique es uno de estos individuos aproblemados y, con un grupo de amigos que viven cerca geográficamente y tienen la misma necesidad, se han puesto de acuerdo en un sistema de turnos para ir y volver del campus y, así, reducir la cantidad de autos que estacionar.

Los amigos de Enrique -los cuales ha enlistado en un conjunto P de personas, incluyéndose- le han puesto el desafío de crear un sistema de turnos óptimo para este semestre. Así, la lógica del sistema será tal que los retornos podrían ser distintos a las idas a la Universidad. Por la mañana, cada persona será asignada a un auto según su hora de entrada. Sin embargo, debido a los distintos horarios de los asignados, al cerrar la jornada, las personas que se vuelven en auto puede que vuelvan en otro vehículo, de manera que cada uno salga lo más cercano a su término del día posible. Enrique también se dió cuenta que dar la posibilidad de que una persona no sea asignada a ningún auto al fin del día podría ser mejor en algunos casos, por lo que esa persona debería buscar un método alternativo para volver a su hogar.

Cristóbal le sugirió que, idealmente, cada persona maneje una vez por semana, llegue a la hora que empiezan sus clases, y se pueda retirar a la hora exacta a la que terminan; aunque puede que eso no siempre ocurra. Considerando que se hará turno sólo los 5 días de la semana, y se organizarán llegadas y salidas por los 8 módulos universitarios, Enrique le preguntó a cada integrante $i \in P$ por el disgusto e_{ijm} de entrar el día j el módulo m, por el disgusto s_{ijm} de salir el día j el módulo m, por el disgusto n_{ijm} de tener que buscar vuelta ajena al sistema de turnos el día j en el módulo m, y por el disgusto p_i por cada vez extra que tenga que manejar. Cabe destacar que todos los individuos del turno accedieron sin problemas a manejar al menos una vez por semana (cosa que se cumplirá), por lo que esa primera vez no genera disgusto. Los tiempos de viaje y de recogida tampoco generan disgusto alguno y son despreciables.

Además, fue necesario que cada integrante indique los horarios en que tiene clases. Esta información está registrada en un valor binario c_{ij} que indica 1 si la persona $i \in P$ va a clases el día j y 0 si no, un valor h_{ij} que indica el primer módulo en que la persona i tiene clases el día j, y b_{ij} que indica el último módulo en que la persona i tiene clases el día j.

Asuma que en cada auto caben 5 personas, que $|P|$ es divisible por 5, que cada sujeto tiene auto propio y que todos los individuos se van en auto en la mañana. Enrique debe encontrar la asignación por auto de

cada persona para el semestre, considerando que el modelo debe ser capaz de dar a los $|P|$ estudiantes la oportunidad de llegar a cada una de sus clases. Sin embargo, como es usual, debido al poco tiempo que este personaje posee, le ha pedido a ustedes que modelen un problema de programación lineal entero que minimice el disgusto total del grupo.

Solución Problema 4.

NOTA DE CORRECCIÓN: Del puntaje total para los 15 grupos de restricciones, asignar el 100 % si tiene todas correctas, el 90 % si tiene al menos 12 correctamente, 75 % si tiene al menos 8 correctamente, y el resto proporcional a la cantidad lograda.

El modelo a continuación representa la situación de manera matemática:

Variables de Decisión:

x_{ijkl} : 1 si la persona i va en auto el día j entrando al módulo k y saliendo al módulo l, y 0 en otro caso
y_{iakj} : 1 si la persona i se va con la persona a entrando al módulo k el día j, y 0 en otro caso.
z_{ialj} : 1 si la persona i se vuelve con la persona a al módulo l del día j, y 0 en otro caso.

Los subíndices son tales que $i, a \in P, j = 1, \ldots, 5, k, l = 1, \ldots, 8$.

Restricciones:

(a) Cada persona debe manejar al menos una vez.

$$\sum_{j=1}^{5} \sum_{k,j=1}^{8} x_{ijkl} \geq 1 \qquad \forall i \in P$$

(b) Todos los días debe manejar por lo menos una persona.

$$\sum_{i \in P} \sum_{k=1}^{8} \sum_{l=1}^{8} x_{ijkl} \geq 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, 5$$

(c) Nadie puede faltar a clases si es que tiene clases.

$$\sum_{a \in P} \sum_{k \leq h_{ij}} y_{iakj} = c_{ij} \qquad \forall i \in P \qquad \forall j = 1, \ldots, 5$$

(d) Nadie puede devolverse antes de su última clase.

$$\sum_{a \in P} \sum_{l < b_{ij}} z_{ialj} = 0 \qquad \forall i \in P \qquad \forall j = 1, \ldots, 5$$

(e) Nadie puede manejar de vuelta antes de salir de clases.

$$\sum_{k=1}^{8} \sum_{l < b_{ij}} x_{ijkl} = 0 \qquad \forall i \in P \qquad \forall j = 1, \ldots, 5$$

(f) Nadie puede irse a la universidad después de su hora de entrada.

$$\sum_{k > h_{ij}} \sum_{l=1}^{8} x_{ijkl} = 0 \qquad \forall i \in P \qquad \forall j = 1, \ldots, 5$$

(g) Una persona no puede ir en un módulo y volverse en un módulo anterior.

$$\sum_{l<k} x_{ijkl} = 0, \qquad \forall i \in P \qquad \forall j = 1, \ldots, 5 \qquad \forall j = 1, \ldots, 8$$

(h) El número de personas que van en la mañana en auto debe ser mayor o igual a las que se vuelven en auto en la tarde.

$$\sum_{a\in P}\sum_{k=1}^{8} y_{iakj} \geq \sum_{a\in P}\sum_{l=1}^{8} z_{ialj} \qquad \forall i \in P \qquad \forall j = 1,\ldots,5$$

(i) Una persona solo puede ir y volver máximo una vez por día.

$$\sum_{a\in P}\sum_{l=1}^{8} z_{ialj} \leq 1 \qquad \forall j = 1,\ldots,5 \qquad \forall i \in P$$

$$\sum_{a\in P}\sum_{k=1}^{8} y_{iakj} \leq 1 \qquad \forall j = 1,\ldots,5 \qquad \forall i \in P$$

$$\sum_{k=1}^{8}\sum_{l=1}^{8} x_{ijkl} \leq 1 \qquad \forall j = 1,\ldots,5 \qquad \forall i \in P$$

(j) No pueden ir más de 5 personas por auto.

$$\sum_{i\in P}\sum_{l=1}^{8} y_{ialj} \leq 5\sum_{k=1}^{8}\sum_{l=1}^{8} x_{ajkl} \qquad \forall j = 1,\ldots,5 \qquad \forall a \in P$$

$$\sum_{i\in P}\sum_{l=1}^{8} y_{ialj} \leq 5\sum_{k=1}^{8}\sum_{l=1}^{8} x_{ajkl} \qquad \forall j = 1,\ldots,5 \qquad \forall a \in P$$

(k) Una persona no puede volver si no fue en la mañana.

$$\sum_{a\in P}\sum_{k=1}^{8} y_{iakj} \geq \sum_{a\in P}\sum_{l=1}^{8} z_{ialj} \qquad \forall i \in P \qquad \forall j = 1,\ldots,5$$

(l) Si una persona maneja, debe irse y volverse en su propio auto (con él mismo) a la hora que sale. Con esto, se deja abierto de que, quien maneje, pueda llegar antes de su hora de entrada a clases.

$$x_{ijkl} \leq y_{iikj} \qquad \forall i \in P \qquad \forall j = 1,\ldots,5 \qquad \forall l = 1,\ldots,8$$

$$x_{pjkl} \leq z_{ppij} \qquad \forall p \in P \qquad \forall j = 1,\ldots,5 \qquad \forall k = 1,\ldots,8$$

(m) A la vuelta, para asignar a una persona a un auto específico, en un módulo en particular, ese auto debe volverse de la universidad a ese módulo.

$$z_{ialj} \leq z_{aalj} \qquad \forall i \in P \qquad \forall a \in P \qquad \forall l = 1,\ldots,5 \qquad \forall j = 1,\ldots,8$$

(n) A la ida, para asignar a una persona a un auto específico, en un módulo en particular, ese auto debe volverse de la universidad a ese módulo.

$$y_{iakj} \leq y_{aakj} \qquad \forall i \in P \qquad \forall a \in P \qquad \forall k = 1,\ldots,5 \qquad \forall j = 1,\ldots,8$$

(ñ) Naturaleza de las variables.

$$x_{ijkl}, y_{ialj}, z_{ialj} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in P \qquad \forall a \in P \qquad \forall l = 1,\ldots,8 \qquad \forall k = 1,\ldots,8 \qquad \forall j = 1,\ldots 5$$

Función Objetivo:

El primer término de la sumatoria mide el disgusto generado por las esperas al llegar antes a clases o volver al menos un módulo después de salir. El segundo término mide el disgusto generado al no volver en el turno si es que esa persona fue a clases ese día. El último mide el disgusto de cada persona de manejar más de una vez por semana.

$$\text{mín } z = \sum_{i\in P}\sum_{a\in P}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{5}(y_{ialj}e_{ijk}+z_{ialj}s_{ijk})+\sum_{i\in P}\sum_{a\in P}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{5}(1-z_{ialj})n_{ij}c_{ij}+\sum_{i\in P}\left(\left(\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{8}\sum_{l=1}^{8} x_{ijkl}\right)-1\right)p_i$$