PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2012
Profesores: P. Álvarez, A. Cataldo
A. Lüer, G. Paredes

Pauta Interrogación 3

Duración: 2 horas 45 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes: ***Pregunta 1 Partes a), b) y c)****;* ***Pregunta 1 Partes d), e) y Bonus****;* ***Pregunta 2****; y* ***Pregunta 3****. En cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (20 puntos)

a) El sistema de puntos de la clasificatoria del mundial de fútbol Brasil 2014, establece que un equipo de fútbol obtiene 0 puntos si pierde, 1 punto si empata, 3 puntos si gana un partido. Se estima que un equipo clasifica al mundial con 25 puntos, de los cuales la selección chilena ha ganado a la fecha 12 puntos. Dado que la selección chilena se encuentra en una situación INCÓMODA en la Tabla de Posiciones ("con la calculadora en la mano"), se desea saber cuál es el número mínimo de partidos para que la selección pueda obtener exactamente 13 puntos (y no más) para asistir al mundial Brasil 2014.

Modele el problema como un problema de flujo en redes. Explique detalladamente que representan los nodos y arcos de la red, así como los costos de los arcos.

Respuesta: El problema corresponde al problema de la ruta más corta. Considere una red con nodos que van del 0 al 13, que corresponden a los puntajes obtenidos por la selección. Los arcos de la red tienen costo igual a 1 y corresponden a una jugada factible, por lo que desde cada nodo i salen dos arcos (excepto el nodo 11 y 12): un arco que avanza un nodo (1 punto) y uno que avanza tres nodos (3 puntos). La red considerada se expone a continuación:



Se observa que la solución de la ruta más corta corresponde a 5 partidos (4 ganados y 1 empate) que son el mínimo necesario para alcanzar los 13 puntos requeridos.

b) Sea x_i la solución óptima del siguiente problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
(PE) \quad & \text{mín} \quad Z = c^T x \\
s.a. \quad & \\
& Ax = b \\
& x \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

El problema anterior se puede aproximar al siguiente problema relajado:

$$\begin{array}{lll} (PR) & \text{mín} & Z = c^T x \\ s.a. & & \\ & & Ax = b \\ & & 0 \leq x \leq 1 \end{array}$$

donde x_r es la solución óptima del problema relajado. ¿Es posible asegurar que $x_r = x_i$? Fundamente su respuesta.

Respuesta: Lo que es posible afirmar es que el espacio de soluciones factibles de PE) es sub-conjunto del espacio de soluciones factibles de PR), por lo que si x_r es óptimo en PR) y es entero, entonces x_r es óptimo de PE). Sin embargo, no es posible asegurar que $x_r = x_i$ ya que PE) puede tener otros óptimos.

En otras palabras, si la matriz de A es totalmente unimodular, entonces sí es posible afirmar que $x_r = x_i$.

c) Sea el siguiente problema de optimización entero:

$$\begin{array}{lll} (PR) & \text{máx} & Z = 6x_1 + 2x_2 \\ s.a. & & \\ & & 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & & 5x_1 + 3x_2 \leq 17 \\ & & x_1, x_2 \geq 0, \text{ enteros} \end{array}$$

La solución del problema relajado es: $x_1^* = \frac{29}{11}$, $x_2^* = \frac{14}{11}$ y $Z^* = \frac{202}{11}$

i) Encuentre un corte de Gomory para este problema de manera de obtener una formulación más ajustada.

ii) Muestre que el corte obtenido de esta manera no incluirá la solución óptima del problema relajado que se le ha entregado.

Algunas inversas:

$$B^{-1}_{(x_1,x_2)} = \begin{bmatrix} 3/11 & 1/11 \\ -5/11 & 2/11 \end{bmatrix} \quad B^{-1}_{(x_1,x_3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/5 \\ 1 & -2/5 \end{bmatrix} \quad B^{-1}_{(x_1,x_4)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -5/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}_{(x_2,x_3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & 1/3 \end{bmatrix} \quad B^{-1}_{(x_2,x_4)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Respuesta:

i) Con la solución vemos que las variables básicas son x_1 y x_2, y las no básicas x_3 y x_4. Esto permite calcular $\bar{R}$:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 3/11 & 1/11 \\ -5/11 & 2/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/11 & 1/11 \\ -5/11 & 2/11 \end{bmatrix}$$

luego, se puede construir cualquiera de los siguientes dos cortes:

$$\left(\frac{3}{11} - \left\lfloor \frac{3}{11} \right\rfloor\right) x_3 + \left(\frac{1}{11} - \left\lfloor \frac{1}{11} \right\rfloor\right) x_4 \geq \left(\frac{29}{11} - \left\lfloor \frac{29}{11} \right\rfloor\right) \Leftrightarrow 3x_3 + x_4 \geq 7$$

$$\left(\frac{-5}{11} - \left\lfloor \frac{-5}{11} \right\rfloor\right) x_3 + \left(\frac{2}{11} - \left\lfloor \frac{2}{11} \right\rfloor\right) x_4 \geq \left(\frac{14}{11} - \left\lfloor \frac{14}{11} \right\rfloor\right) \Leftrightarrow 6x_3 + 2x_4 \geq 3$$

ii) Para verificar que la solución anterior no satisface ninguno de los dos cortes construidos anteriormente, basta con verificar que $x_3 = x_4 = 0$ no cumple.

$$3x_3 + x_4 \geq 7 \Leftrightarrow 0 \not\geq 7$$

$$6x_3 + 2x_4 \geq 3 \Leftrightarrow 0 \not\geq 3$$

d) Sea $G = (N, A)$ un grafo con capacidad $u_a \geq 0$ en cada arco $a = (i, j) \in A$. Se desea enviar el mayor flujo posible desde una única fuente $s \in N$ a un destino $t \in N$. Para ello, se considera un arco de retorno $r = (t, s)$ y se consideran los flujos factibles $(f_a)_{a \in A \cup \{r\}}$ que satisfacen $0 \leq f_a \leq u_a$ y permiten conservar flujo. Considere que el objetivo es maximizar el flujo f_r en este arco de retorno.

Se define que un **s-t corte** es un conjunto de nodos $W \subseteq N$ con $s \in W$ y $t \notin W$, definiendo su capacidad como la suma de las capacidades de los arcos que cruzan de W a W^c. Esta capacidad se denota como $\text{cap}(W)$.

Con la información anterior demuestre que todo flujo factible satisface $f_r \leq \text{cap}(W)$.

Respuesta: Definiendo el flujo neto a través de un conjunto de corte como:

$$f(W, W^c) = \sum_{\substack{a=(i,j) \in A \cup \{r\} \\ \text{tal que } i \in W, j \in W^c}} f_{ij} - \sum_{\substack{a=(i,j) \in A \cup \{r\} \\ \text{tal que } i \in W^c, j \in W}} f_{ij}$$

ahora, como el flujo neto debe ser factible debe satisfacer las condiciones de conservación de flujo. Entonces, sumando todas las ecuaciones correspondientes a nodos en W se tiene:

$$\sum_{\substack{a=(i,j) \in A \cup \{r\} \\ \text{tal que } i \in W, j \in W^c}} f_{ij} - \sum_{\substack{a=(i,j) \in A \cup \{r\} \\ \text{tal que } i \in W^c, j \in W}} f_{ij} - F = 0 \Leftrightarrow f(W, W^c) = F$$

finalmente, como $0 \leq f_{a=(i,j)} \leq u_a$ para todo $(i, j) \in A$ se tiene:

$$\sum_{\substack{a=(i,j) \in A \cup \{r\} \\ \text{tal que } i \in W, j \in W^c}} u_{ij} - \sum_{\substack{a=(i,j) \in A \cup \{r\} \\ \text{tal que } i \in W^c, j \in W}} l_{ij} \geq F$$

como en este caso $l_{ij} = 0$ para todo $(i, j) \in A$:

$$\sum_{\substack{a=(i,j) \in A \cup \{r\} \\ \text{tal que } i \in W, j \in W^c}} u_{ij} \geq F = f_r$$

e) Suponga que está resolviendo con el método de Branch and Bound el siguiente problema lineal entero:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & Z = x_{n+1} \\ s.a. \quad & \\ & 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) + x_{n+1} = n \\ & x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

i) ¿Qué se puede decir del número de nodos del árbol de Branch and Bound en este caso?

ii) ¿Qué ocurre si agrega las restricciones $x_i \geq x_{i+1}$, $\forall i = 1, \ldots, n-1$? ¿Cambia la solución óptima entera? ¿Cuántos nodos posee el árbol?

Respuesta:

i) Primero debemos notar que la variable $x_{n+1} \in R$, luego, y que se está minimizando el valor de esta variable. Como las variables $x_i \in \{0, 1\}$ para $i = 1, \ldots, n$, la restricción del problema se puede ver como:

$$x_{n+1} = n - 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

que dada la dirección de minimización se desea que x_{n+1} tome el valor más pequeño posible, entonces la condición anterior queda:

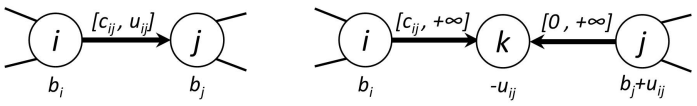
$$x_{n+1} = n - 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \right) = n - 2n = -n$$

Luego, se puede afirmar que la relajación lineal del problema entero entregará una solución que satisface las condiciones de integralidad del problema entero, por lo tanto, el árbol de Branch and Bound tendrá solamente el nodo inicial asociado a la relajación lineal del problema.

ii) Agregar ese grupo de restricciones no altera en nada la resolución del problema pues ninguna de ella corta la solución relajada de la región factible del problema.

Bonus (5 puntos)

Muestre que un problema de flujo en redes con cotas inferiores nulas (0) y cotas inferiores finitas puede convertirse en uno sin cotas superiores, mediante la siguiente transformación de los arcos de la red.



Donde, para un nodo i, b_i es su demanda generalizada; y para un arco (i, j), c_{ij} denota el costo unitario de flujo y u_{ij} es su cota superior de flujo.

Solución

La validez de esta conversión se ve por casos.

- ◇ Si en el arco original el arco es nulo, es evidente que la conversión es válida en este caso, ya que sólo habrá un flujo de u_{ij} unidades desde el nodo j al k, sin costo.
- ◇ Si el flujo f, que está entre las cotas (sin tocarlas), circula un flujo de f unidades entre los nodos i y k, con costo unitario c_{ij}, y un flujo $u_{ij} - f$ desde el nodo j al k, que no tiene costo, para satisfacer la demanda en este último.
- ◇ Si el flujo es de u_{ij} unidades, entonces sólo existe un flujo desde el nodo i al k, que es el único que se cobra.
- ◇ Un flujo de más de u_{ij} unidades no es factible en la conversión, porque implicaría un "reflujo" en el arco (j, k).

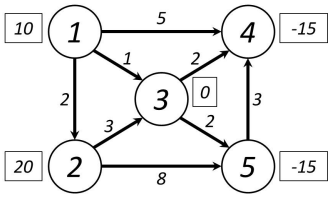
Una alternativa era plantear las ecuaciones de conservación y la restricción correspondiente a la cota superior, y ver ésta como una ecuación de conservación más, considerando la holgura como una nueva variable (de flujo).

Pregunta 2

(20 puntos)
Debe responder **solamente dos** de las siguientes **tres partes**.

Parte a) (10 puntos)

Para el siguiente grafo,



i) (8 puntos) Resolver mediante el algoritmo simplex para redes, partiendo del siguiente flujo factible: 10 unidades de flujo desde el nodo 1 al 4; 15 unidades de flujo desde el nodo 2 al 5; y 5 unidades de flujo del nodo 2 al 3, y de ahí al nodo 4.

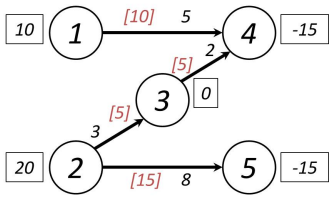
ii) (1 punto) ¿Qué costo debería tener un nuevo arco $(1, 5)$ para que la solución obtenida obtenida en (a) siga siendo óptima?

iii) (1 punto) ¿Para qué valor(es) del costo del arco $(5, 4)$ el problema tendría múltiples bases óptimas?

Solución

i) El desarrollo es como sigue,

Iteración 1 El árbol generador asociado a la solución básica anterior es,



Las variables básicas entregan el siguiente sistema de ecuaciones, para obtener los valores de los potenciales,

$$\pi_1 - \pi_4 = 5$$
$$\pi_3 - \pi_4 = 2$$
$$\pi_2 - \pi_3 = 3$$
$$\pi_2 - \pi_5 = 8$$

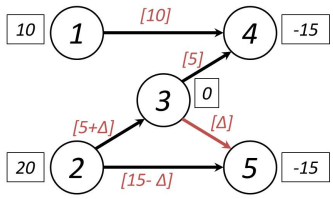
Haciendo $\pi_1 = 0$ se obtiene que,

$$\pi_1 = 0,\ \pi_2 = 0,\ \pi_3 = -3,\ \pi_4 = -5,\ \pi_5 = -8$$

Los costos reducidos de las variables no básicas son,

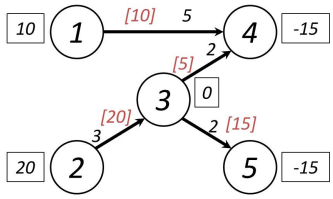
$$\begin{aligned}
\bar{c}_{12} = &\quad c_{12} - \pi_1 + \pi_2 = &\quad 2 - 0 + 0 = 2 \\
\bar{c}_{13} = &\quad c_{13} - \pi_1 + \pi_3 = &\quad 1 - 0 + (-3) = -2 \\
\bar{c}_{35} = &\quad c_{35} - \pi_3 + \pi_5 = &\quad 2 - (-3) + (-8) = -3 \\
\bar{c}_{54} = &\quad c_{54} - \pi_5 + \pi_4 = &\quad 3 - (-8) + (-5) = 6
\end{aligned}$$

Con lo que entra f_{35} a la base. El ciclo que se forma es el siguiente,



Con lo que $\Delta = 15$ y f_{25} sale de la base.

Iteración 2 El árbol generador asociado a la nueva solución básica es,



Las variables básicas entregan el siguiente sistema de ecuaciones, para obtener los valores de los potenciales,

$$\begin{aligned}
\pi_1 - \pi_4 &= 5 \\
\pi_3 - \pi_4 &= 2 \\
\pi_2 - \pi_3 &= 3 \\
\pi_3 - \pi_5 &= 2
\end{aligned}$$

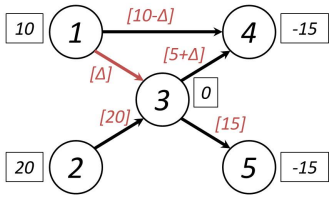
Haciendo $\pi_1 = 0$ se obtiene que,

$$\pi_1 = 0,\ \pi_2 = 0,\ \pi_3 = -3,\ \pi_4 = -5,\ \pi_5 = -5$$

Los costos reducidos de las variables no básicas son,

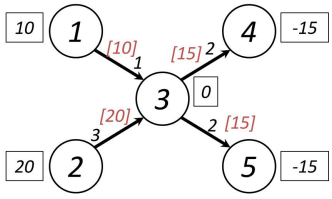
$$\begin{aligned}
\bar{c}_{12} = &\quad c_{12} - \pi_1 + \pi_2 = &\quad 2 - 0 + 0 = 2 \\
\bar{c}_{13} = &\quad c_{13} - \pi_1 + \pi_3 = &\quad 1 - 0 + (-3) = -2 \\
\bar{c}_{25} = &\quad c_{25} - \pi_2 + \pi_5 = &\quad 8 - 0 + (-5) = 3 \\
\bar{c}_{54} = &\quad c_{54} - \pi_5 + \pi_4 = &\quad 3 - (-5) + (-5) = 3
\end{aligned}$$

Con lo que entra f_{13} a la base. El ciclo que se forma es el siguiente,



Con lo que $\Delta = 10$ y f_{14} sale de la base.

Iteración 3 El árbol generador asociado a la solución básica anterior es,



Las variables básicas entregan el siguiente sistema de ecuaciones, para obtener los valores de los potenciales,

$$\begin{aligned}
\pi_1 - \pi_3 &= 1 \\
\pi_3 - \pi_4 &= 2 \\
\pi_2 - \pi_3 &= 3 \\
\pi_3 - \pi_5 &= 2
\end{aligned}$$

Haciendo $\pi_1 = 0$ se obtiene que,

$$\pi_1 = 0,\ \pi_2 = 2,\ \pi_3 = -1,\ \pi_4 = -3,\ \pi_5 = -3$$

Los costos reducidos de las variables no básicas son,

$$\begin{aligned}
\bar{c}_{12} = &\quad c_{12} - \pi_1 + \pi_2 = \quad 2 - 0 + 2 = 4 \\
\bar{c}_{14} = &\quad c_{14} - \pi_1 + \pi_4 = \quad 5 - 0 + (-3) = 2 \\
\bar{c}_{25} = &\quad c_{25} - \pi_2 + \pi_5 = \quad 8 - 2 + (-3) = 3 \\
\bar{c}_{54} = &\quad c_{54} - \pi_5 + \pi_4 = \quad 3 - (-3) + (-3) = 3
\end{aligned}$$

Por lo que la solución actuales óptima. Los flujos óptimos no nulos son,

$$f^*_{13} = 10,\ f^*_{34} = 15,\ f^*_{23} = 20,\ f^*_{35} = 15$$

Con valor del objetivo $Z = 130$.

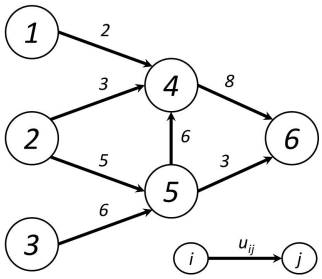
ii) El nuevo arco $(1, 5)$ no cambiará la base actual si no es atractivo que entre, es decir $\bar{c}_{15} \geq 0$. Esto equivale a decir que $c_{15} - \pi_1 + \pi_5 \geq 0 \Rightarrow c_{15} \geq \pi_1 - \pi_5$, es decir si el arco $(1, 5)$ tiene costo $c_{15} \geq 3$, la base actual no cambia.

iii) El problema tendrá múltiples bases óptimas si $\bar{c}_{54} = 0$, lo que equivale a que $c_{54} - \pi_5 + \pi_4 = 0$, es decir $c_{54} = 0$.

Parte b) (10 puntos)

Una empresa petrolera cuenta con tres pozos de extracción de crudo (los nodos 1, 2 y 3), en zonas geográficamente distantes. El crudo se bombea desde los pozos hasta la planta, que se encuentra a gran distancia de los pozos. Por esto, la empresa cuenta con dos estaciones de bombeo (los nodos 4 y 5), que permiten llevar el crudo hasta la planta de refinación (el nodo 6).

Existe una red de tuberías que conectan estas instalaciones, cuyas capacidades son conocidas y se representan mediante el siguiente grafo, donde el atributo del arco (i, j) corresponde a la capacidad de la tubería que conecta las instalaciones en i y j.



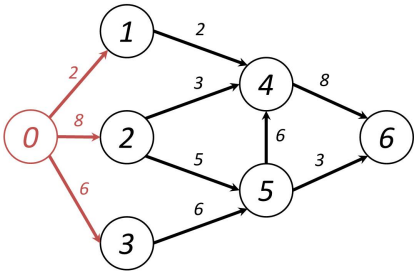
La empresa está interesada en saber cuál es la cantidad máxima de crudo que podría bombear desde los pozos hasta la planta.

i) (2 puntos) Convierta el grafo en uno donde el problema de la empresa pueda resolverse como uno de flujo máximo.

ii) (8 puntos) Ejecute el algoritmo de Ford y Fulkerson en el grafo obtenido en (a).

Solución

i) Debe agregarse un nodo común que haga las veces de origen. Se debe conectar con las fuentes mediante arcos cuya capacidad no limite el flujo máximo de la red. Un criterio simple es ponerle tanta capacidad como el máximo flujo que podría salir de cada fuente. El nuevo grafo es,

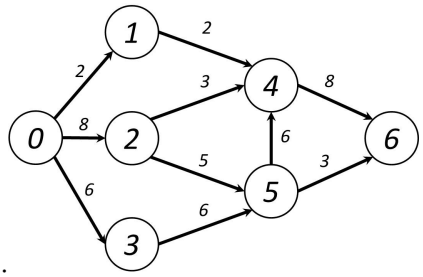


ii) Se ocupará el algoritmo de Ford y Fulkerson, considerando como origen el nodo 0 y como destino el 6.

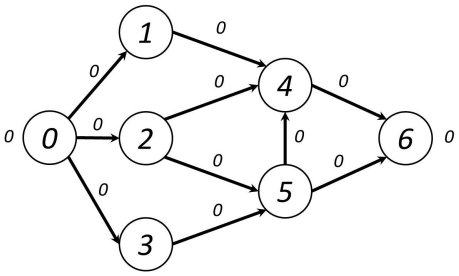
Iteración 1

El primer grafo residual es igual al original y sus capacidades. En el de flujos, todos son nulos.

R_1 :



F_1 :

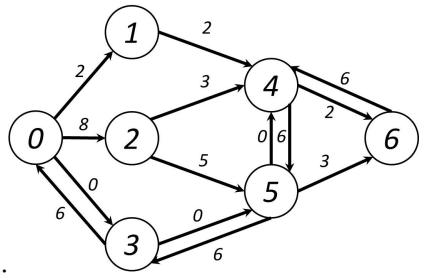


Se observa que pueden enviarse 6 unidades por 0-3-5-4-6.

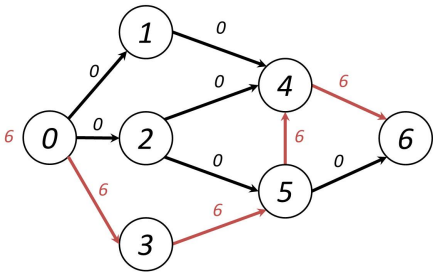
Iteración 2

El nuevo residual y el grafo de flujos resultan ser,

R_1 :



F_1 :

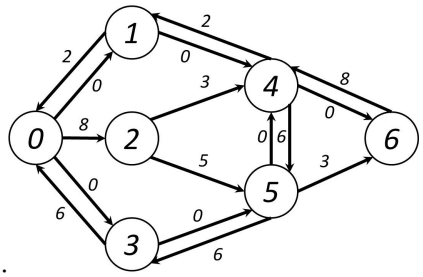


Ahora, pueden enviarse 2 unidades por 0-1-4-6.

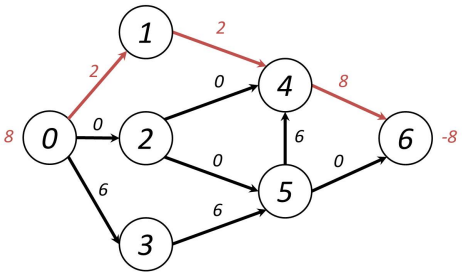
Iteración 3

El nuevo residual y el grafo de flujos resultan ser,

R_1 :



F_1 :

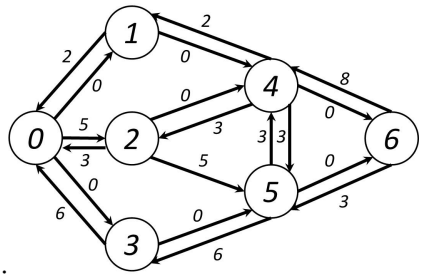


Ahora, pueden enviarse 3 unidades por 0-2-4-5-6.

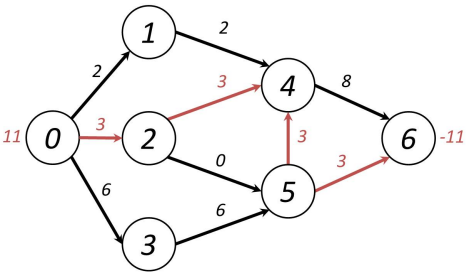
Iteración 4

El nuevo residual y el grafo de flujos resultan ser,

R_1 :



F_1 :



Como no pueden enviarse más unidades de flujo, se ha alcanzado el flujo máximo de la red. El flujo total enviado es $6 + 2 + 3 = 11$ unidades.

Parte c) (10 puntos)

Una agencia gubernamental busca determinar la forma más rápida de llegar desde su centro de acopio a cinco (5) zonas afectadas por un frente de mal tiempo. La siguiente tabla muestra los tiempos de viaje directo entre las zonas. De no existir un valor en la tabla, significa que no existe un camino directo que las comunique.

Desde - Hacia	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5
Centro de Acopio	5	2	10	-	-
Zona 1	-	3	-	-	6
Zona 2	-	-	3	-	-
Zona 3	-	-	-	1	5
Zona 4	-	-	-	-	4

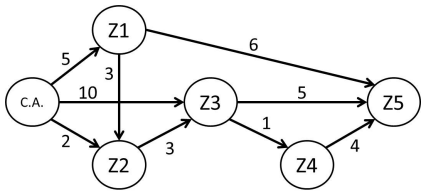
i) (1.5 puntos) Construya el grafo asociado a este problema.

ii) (4.5 puntos) Resuelva usando el algoritmo de Dijkstra. Entregue el árbol de rutas más cortas, así como el tiempo de dichas rutas.

iii) (4.0 puntos) Construya el dual de este problema y demuestre utilizando el teorema fuerte de dualidad que la solución encontrada es efectivamente la solución óptima del problema.

Solución

i) El grafo asociado es,

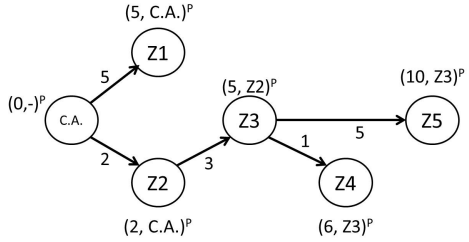


ii) Las iteraciones se encuentran sintetizadas en la siguiente tabla,

Nodo Iteración	1	2	3	4	5	6
C.A.	$(\mathbf{0}, -)^{\mathbf{P}}$	$(0, -)^{P}$	$(0, -)^{P}$	$(0, -)^{P}$	$(0, -)^{P}$	$(0, -)^{P}$
Z1	-	$(5, C.A.)^{T}$	$(\mathbf{5}, \mathbf{C.A.})^{\mathbf{T}}$	$(5, C.A.)^{P}$	$(5, C.A.)^{P}$	$(5, C.A.)^{P}$
Z2	-	$(\mathbf{2}, \mathbf{C.A.})^{\mathbf{T}}$	$(2, C.A.)^{P}$	$(2, C.A.)^{P}$	$(2, C.A.)^{P}$	$(2, C.A.)^{P}$
Z3	-	$(10, C.A.)^{T}$	$(5, Z2)^{T}$	$(\mathbf{5}, \mathbf{Z2})^{\mathbf{T}}$	$(5, Z2)^{P}$	$(5, Z2)^{P}$
Z4	-	-	-	-	$(\mathbf{6}, \mathbf{Z3})^{\mathbf{T}}$	$(6, Z3)^{P}$
Z5	-	-	-	$(11, Z1)^{T}$	$(10, Z3)^{T}$	$(\mathbf{10}, \mathbf{Z3})^{\mathbf{T}}$

Donde se ha puesto en negrita los nodos que pasan a tener etiqueta permanente. La notación de la etiqueta es (distancia al nodo raíz, nodo predecesor).

El árbol de rutas mínimas, junto con las etiquetas que indican las distancias son,



Debe notarse que el arco $(Z4, Z5)$, en reemplazo del $(Z3, Z5)$, también podría haber formado parte del árbol de rutas mínimas, pero la ejecución del algoritmo llevo a la primera.

iii) El problema dual de este problema es (para el origen $C.A.$ y el destino Z_i, $i \in \{1, \ldots, 5\}$) es,

$$\begin{array}{rll} \max & \pi_{CA} - \pi_{Zi} & \\ \text{s.a.} & \pi_{CA} - \pi_{Z1} & \leq 5 \\ & \pi_{CA} - \pi_{Z2} & \leq 2 \\ & \pi_{CA} - \pi_{Z3} & \leq 10 \\ & \pi_{Z1} - \pi_{Z2} & \leq 3 \\ & \pi_{Z1} - \pi_{Z5} & \leq 6 \\ & \pi_{Z2} - \pi_{Z3} & \leq 3 \\ & \pi_{Z3} - \pi_{Z4} & \leq 1 \\ & \pi_{Z3} - \pi_{Z5} & \leq 5 \\ & \pi_{Z4} - \pi_{Z5} & \leq 4 \end{array}$$

Por el árbol de rutas mínimas podemos rápidamente establecer valores duales: $\pi_{CA} = 0$, $\pi_{Z1} = -5$, $\pi_{Z2} = -2$, $\pi_{Z3} = -5$, $\pi_{Z4} = -6$, $\pi_{Z5} = -10$.

Por construcción de los valores π, éstos serán factibles para el conjunto de restricciones del problema dual, sea cual sea el objetivo. Luego el problema admite una solución óptima.

Basta probar que los valores objetivos coinciden. Pensando en el problema de la ruta más corta desde $C.A.$ hasta Zi, $i \in \{1, \ldots, 5\}$, se tiene que el objetivo sería,

$$\max \pi_{CA} - \pi_{Zi}$$

Asignamos los valores de las variables duales tales que son el negativo de la distancia de la ruta mínima desde nodo $C.A.$ hasta cada nodo Z_i, el problema dual tendrá el mismo valor óptimo que el problema primal.

Como el problema primal admite solución óptima, al igual que el problema dual, y sus valores objetivo son iguales, la solución encontrada es la óptima.

Pregunta 3

Una empresa productora de muebles que posee N sucursales debe diseñar su red de distribución para los próximos T años. Cada año debe ser capaz de abastecer sus sucursales con madera para fabricar muebles. Esta madera puede provenir de M aserraderos con los cuales posee convenio. La cantidad máxima de madera que puede entregar el aserradero i en el período t es A_{it}. El requerimiento mínimo en el año t de cada sucursal k es P_{kt}. La empresa debe instalar bodegas donde se reciba la madera proveniente de los aserraderos. Actualmente, no tiene bodegas instaladas y debe decidir dónde localizarlas, estimándose que a lo más se deben instalar S bodegas, las cuales pueden ubicarse en L lugares posibles ($L \geq S$). Estas bodegas pueden ser instaladas en cualquier momento durante los T años, y se asume inmediato su funcionamiento.

Las bodegas a instalar pueden ser de dos tipos; pequeñas o grandes, teniendo las pequeñas la opción de ampliarse posteriormente a un costo de AM_{jt}, correspondiente a una bodega en el lugar j en el año t. Se considera que si la bodega es pequeña su capacidad máxima es de a y si es grande, su capacidad es de b.

En cada sitio factible j puede instalarse a lo más una bodega de cualquier tipo y el costo de instalación es de F_j. El costo de trasladar la madera desde i hasta j por la red de distribución es de

c_{ij} unidades monetarias. Por convenio con la compañía constructora encargada de las instalaciones y ampliaciones, si en un período se realiza alguno de estos trabajos, entonces en los δ periodos siguientes se deberá realizar al menos una ampliación. No asegurar esto hace que la empresa caiga en una violación de contrato, lo que está asociado a una multa millonaria que la empresa no está en condiciones de pagar.

Considerando la información anterior, formule un modelo de programación lineal entero mixto que ayude a la empresa productora de muebles a tomar las decisiones de manera de minimizar el costo total.

Pauta Pregunta 3

Variables de decisión

- $x^1_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{si se instala una bodega de capacidad } a \text{ en el sitio } j = 1, \ldots, L \text{ en el período } t = 1, \ldots, T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$
- $x^2_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{si se instala una bodega de capacidad } b \text{ en el sitio } j = 1, \ldots, L \text{ en el período } t = 1, \ldots, T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$
- $w_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{si una bodega de capacidad } a \text{ en el sitio } j = 1, \ldots, L \text{ se amplia a capacidad } b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$
- y_{ijt} : cantidad de madera a mover desde el aserradero $i = 1, \ldots, M$ a la bodega $j = 1, \ldots, L$ en el período $t = 1, \ldots, T$.
- z_{jkt} : cantidad de madera a mover desde la bodega $j = 1, \ldots, L$ a la sucursal $k = 1, \ldots, N$ en el período $t = 1, \ldots, T$.

Función objetivo

$$\text{mín} \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{j=1}^{L} F_j x^1_{jt} + \sum_{j=1}^{L} F_j x^2_{jt} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{L} c_{ij} y_{ijt} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{L} c_{jk} z_{jkt} + \sum_{j=1}^{L} AM_{jt} w_{jt} \right)$$

Restricciones

(a) Satisfacción de demanda.

$$\sum_{j=1}^{L} z_{jkt} = P_{kt} \qquad \forall k = 1, \ldots, K; \forall t = 1, \ldots, T.$$

(b) Balance de flujo en las bodegas.

$$\sum_{i=1}^{M} y_{ijt} = \sum_{k=1}^{N} z_{jkt} \qquad \forall j = 1, \ldots, L; \forall t = 1, \ldots, T.$$

(c) Cantidad máxima de bodegas.

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{L} \left(x^1_{jt} + x^2_{jt} \right) \leq S$$

(d) Instalación de bodegas de una sola capacidad por período y sitio.

$$x_{jt}^1 + x_{jt}^2 \leq 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, L; \forall t = 1, \ldots, T.$$

(e) Instalación de bodegas en un sitio en un solo período.

$$\sum_{t=1}^{T} x_{jt}^1 \leq 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, L.$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{jt}^2 \leq 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, L.$$

(f) Ampliación de bodegas solo si previamente hay una bodega pequeña instalada en ese sitio.

$$\sum_{h=1}^{t-1} x_{jt}^1 \geq w_{jt} \qquad \forall j = 1, \ldots, L; \forall t = 1, \ldots, T.$$

(g) Determinación de capacidad de bodega por período.

$$\sum_{i=1}^{M} y_{ijt} \leq a \cdot \sum_{h=1}^{t} x_{jt}^1 + b \cdot \sum_{h=1}^{t} x_{jt}^2 + (b-a) \cdot \sum_{h=1}^{t} w_{jt} \qquad \forall j = 1, \ldots, L; \forall t = 1, \ldots, T.$$

(h) Asegurar condición que evita la multa.

$$\sum_{j=1}^{L} \left(x_{jt}^1 + x_{jt}^2 + w_{jt} \right) \leq 3 \cdot L \cdot \sum_{h=t+1}^{t+\delta} \sum_{j=1}^{L} w_{jh} \qquad \forall t = 1, \ldots, T.$$

(i) Naturaleza de las variables de decisión.

$$x_{jt}^1, x_{jt}^2, w_{jt} \in \{0, 1\}, \qquad \forall j = 1, \ldots, L; \forall t = 1, \ldots, T.$$

$$y_{ijt} \geq 0, \qquad \forall i = 1, \ldots, M; j = 1, \ldots, L; \forall t = 1, \ldots, T.$$

$$z_{jkt} \geq 0, \qquad \forall j = 1, \ldots, L; k = 1, \ldots, N; \forall t = 1, \ldots, T.$$