PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2017
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palomino
A. Cataldo - J.T. Marquinez

Solución Tarea 3

Fecha de Entrega: 22 de mayo.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día lunes 22 de mayo a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:30 y las 12:30 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (13 puntos)

a) (3 puntos) Suponga que se tiene el siguiente conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + 2x_2 \leq 2; -x_1 \leq \frac{3}{2}; -2x_1 - 3x_2 \leq 9\}$. Determine, justificando en cada caso, si los siguientes planos cortantes son válidos para D:

i) $x_1 \geq -2$

ii) $x_1 + x_2 \geq -3$

iii) $x_2 \leq 11{,}5$

b) (3 puntos) Muestre que el sistema $Ax + By \leq f$, $Cx + Dy = g$, $x \geq 0$ es factible si y solo si se cumple que $u^T f + v^T g \geq 0$ para todo (u, v) tales que $u^T A + v^T C \geq 0$, $u^T B + v^T D = 0$, $u \geq 0$.

c) (2 puntos) Considere el problema:

$$\begin{array}{llrl} P) & \text{mín} & c^T x & \\ s.a. & & Ax & \leq \; b \\ & & x & \geq \; 0 \end{array}$$

donde A es una matriz de m filas y n columnas, y $x \in \mathbb{R}^n$. Comente la siguiente afirmación: "Si se encuentra un punto $y \in \mathbb{R}^m$, tal que $c^T x \geq b^T y$ para algún x factible para P), entonces el problema P) admite solución óptima".

d) (3 puntos) Suponga que se tienen los siguientes problemas:

$$\begin{array}{llrlll} P) & \text{máx} & c^T x & & & \\ & s.a. & a^T x & \leq \; b & & \\ & & x_i & \in \; \{0,1\} & \forall i = 1,..,n \end{array}$$

$$\begin{array}{llrlll} PL) & \text{máx} & c^T x & & & \\ & s.a. & a^T x & \leq \; b & & \\ & & x_i & \leq \; 1 & \forall i = 1,..,n \\ & & x_i & \geq \; 0 & \forall i = 1,..,n \end{array}$$

En donde $a, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$. Se puede observar que P) es el clásico problema de la Mochila visto en clases, mientras que PL) es su relajación lineal.

Una técnica para resolver un problema de mochila es usar un algoritmo greedy, que consiste en seleccionar las variables que "entrarán en la mochila", mediante el cálculo de $r_i = \frac{c_i}{a_i}$ (representa el beneficio por unidad de volumen). La variable cuyo r_i sea el mayor, se ingresa a la mochila. Luego, si queda espacio disponible, se ingresa la variable con segundo mayor valor de r_i. Y así sucesivamente, hasta que la mochila se llena.

i) Muestre que esta técnica encuentra efectivamente la solución óptima para el problema PL).

La idea de esta técnica es que sirva para encontrar rápidamente una solución para el problema P). Entonces, el procedimiento es el siguiente:

1) Se resuelve PL) mediante este algoritmo greedy.
2) Si la solución es entera, nos detenemos acá. Si es fraccionaria, ir al paso 3.
3) Se genera un cover con todas las variables positivas, de manera que la variable que resulte fraccionaria quede fuera de la solución. Se vuelve al paso 1.

De esta forma, el procedimiento se detendrá cuando se intente resolver el problema con suficientes covers mediante el algoritmo greedy tal que la solución resulte entera.

ii) Determine si esta técnica es un método efectivo para encontrar la solución óptima de P).

e) (2 puntos) Sea P un problema de programación lineal de minimización:

$$\begin{array}{llrl} P) & \text{mín} & c^T x & \\ & s.a. & Ax & \leq \; b \\ & & x & \geq \; 0 \end{array}$$

Sea D el problema dual asociado.

Comente la siguiente afirmación: "Si se cumple que $(b - Ax')y' = 0$ y $(A^T y' - c)x' = 0$, entonces x' y y' son soluciones óptimas para el problema P y D respectivamente".

Solución Problema 1.

a) Un plano cortante válido es aquel que corta soluciones fraccionarias, pero conserva todas las soluciones enteras. De esta forma:

i) No es, debido a que no corta ninguna solución fraccionaria.

ii) Sí es.

iii) No es, debido a que corta soluciones enteras.

b) Sea el siguiente problema P) y su dual D):

$$\begin{array}{llrcl} P) & \text{máx} & 0 & & \\ & s.a. & Ax + By & \leq & f \\ & & Cx + Dy & = & g \\ & & x & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{llrcl} D) & \text{mín} & u^T f + v^T g & & \\ & s.a. & u^T A + v^T C & \geq & 0 \\ & s.a. & u^T B + v^T D & = & 0 \\ & & u & \geq & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, como me piden demostrar una doble implicancia, lo haremos en dos partes:

$\Rightarrow$. Supongamos que el sistema $Ax + By \leq f$, $Cx + Dy = g$, $x \geq 0$ es factible. Entonces, como este sistema es factible, significa que el problema P) es factible. Como su función objetivo es 0, entonces cualquier solución es óptima, con valor óptimo 0. Como este problema admite solución óptima, entonces el problema D) admite también solución óptima, con valor óptimo 0 (teorema fuerte de dualidad). Así, como D) es un problema de minimización, tenemos que su mejor solución es 0, por lo que $u^T f + v^T g \geq 0$ para todo (u, v) tales que $u^T A + v^T C \geq 0$, $u^T B + v^T D = 0$, $u \geq 0$. Con lo que queda demostrado.

$\Leftarrow$. Supongamos que $u^T f + v^T g \geq 0$ para todo (u, v) tales que $u^T A + v^T C \geq 0$, $u^T B + v^T D = 0$, $u \geq 0$. Esto significa que el problema D) está acotado inferiormente por 0, por lo cual, sabemos que si es factible, entonces posee un óptimo. Así, el problema P) va a ser factible dado que el dual es factible y acotado. Como P) es factible significa que $Ax + By \leq f$, $Cx + Dy = g$, $x \geq 0$ es factible, por lo que queda demostrado.

c) Falso, pues no se dice que y es un punto factible del problema dual de P), por lo que podría ser cualquier vector, en particular un vector no factible para el problema dual y podría ser que P) fuera no acotado.

d) i) Asumamos que $\sum_{i=1}^{n} a_i > b$ (si no, la solución óptima sería $x_i = 1 \quad \forall i$ y no tendría sentido el problema). Entonces, demostraremos por contradicción.
Supongamos que x^* es la solución óptima del problema P) en que $x_j^* = 0$ y $x_k^* > 0$, con $r_j > r_k$. Sin embargo, con esta información, podríamos construir otra solución que fuera de la siguiente forma:

$$x_i^{**} = x_i^* \quad \forall i \neq j, k; x_k^{**} = 0; x_j^{**} = x_k^* \cdot \frac{a_k}{a_j}$$

Es decir, todos los x_i siguen siendo iguales, solo cambio el valor de x_k y de x_j.
En esta nueva solución, sabemos que es factible, porque el lado izquierdo de la restricción se le resta $a_k x_k^*$ y se le suma $a_j x_j^{**} = a_j x_k^* \frac{a_k}{a_j}$, por lo que queda igual.
Ahora, ¿Cuánto sería el cambio en la función objetivo? Se le resta lo que disminuye con x_k y se le suma lo que aumenta con x_j. Así, el cambio sería:

$$\begin{aligned} \delta f &= -c_k x_k^* + c_j x_j j * & (1) \\ & -c_k x_k^* + c_j x_k^* \frac{a_k}{a_j} & (2) \\ & x_k^* (-c_k + c_j \frac{a_k}{a_j}) & (3) \end{aligned}$$

x_k^* sabemos que es positivo, y el otro término también es positivo porque habíamos dicho que $r_j > r_k$. Así, estamos mejorando la función objetivo, lo cual se contradice con el hecho de que x^* era óptima.

Esto se puede generalizar y decir que si hay dos pares de variables positivas x_i y x_j tales que $r_i > r_j$ y x_i no es igual a su cota superior 1. entonces no se está en el óptimo. Por lo tanto, la única opción posible es que ingrese a la base las variables que tengan el mayor r_i en orden, lo máximo posible cada una. Si no, siempre se puede mejorar la función.

ii) No es un método efectivo. Si bien llega rápidamente a una buena solución, no siempre llega al óptimo. Veamos por ejemplo este problema:

$$\begin{array}{lllll} P) & \text{máx} & x_1 + 4x_2 + 5x_3 & & \\ & s.a. & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \leq & 6 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

El orden de preferencia inicial son los subíndices 2,3 y 1. El primer corte a realizar sería $x_2 + x_3 \leq 1$. Con este corte, el problema encontraría el optimo entero en $x_1 = x_2 = 1$ y $x_3 = 0$. Sin embargo, al ojo, es posible determinar que la solución $x_1 = x_3 = 1$ y $x_2 = 0$ es mejor aún.

e) Falso. Lo que se enuncia acá es el teorema de holguras complementarias, pero este teorema requiere que tanto x' como y' sean soluciones factibles. Estas ecuaciones también se cumplen para algún punto x no óptimo e y infactible y viceversa, por lo que el hecho de encontrar x e y que cumplan las ecuaciones, no garantiza que se trate del óptimo en ambos casos, sino que tengo que comprobar que sean factibles en sus respectivos problemas.

Problema 2. (18 puntos)

a) (9 puntos) Pablito posee un campo de frutas y decide fabricar mermeladas mezclando las frutas que posee en distintas proporciones. En específico, ha decidido que podrá producir tres tipos de mermeladas, A, B y C. Se sabe que para fabricar 1 Kg la mermelada de tipo A, se requiere 2 Kg de manzana y 1 Kg de durazno, más 2 Kg de azúcar. Para 1 Kg de la mermelada de tipo B, se requiere 1 Kg de manzana y 3 Kg de durazno, más un Kg de azúcar. Finalmente, la mermelada de tipo C no posee azúcar, pero requiere de 3 Kg de cada fruta para producir 1 Kg de mermelada.

Pablito cuenta con 50 Kg de Manzana, 40 Kg de Durazno y 20 Kg de azúcar. Además, haciendo un pequeño estudio de mercado, sabe que la mermelada de tipo A y B se venden al mismo precio, y que la de tipo C se venden al doble de precio que las otras.

i) (1 punto) Formule un modelo de programación lineal que permita a Pablito decidir qué mermeladas producir de manera de maximizar sus ganancias.

ii) (1 punto) Formule el problema Dual del problema modelado en i).

iii) (3 puntos) Pablito usa su modelo formulado en i) y obtiene que la solución óptima es producir 10 kg de mermelada de tipo A, 0 kg de mermelada de tipo B, y 10 kg de mermelada de tipo C. Obtenga la solución del problema dual. Inteprete estos resultados.

iv) (1 punto) Si un amigo de Pablito le ofrece regalar un Kg de fruta, ¿Preferiría que fuese de manzanas o de duraznos?

v) (3 puntos) Suponga ahora que usted descubre muchos tipos de mermelada, con sus respectivos precios de venta en el mercado, los cuales los puede hacer usando los mismos ingredientes (manzanas, duraznos y azúcar) solo que en distintas proporciones. Además, otro amigo de Pablito le indicó que, con toda seguridad, solo una de las mermeladas nuevas le va a convenir empezar a producir. Usando conceptos de dualidad, plantee una forma para descubrir cuál es la nueva mermelada que le va a convenir producir.

b) (4 puntos) Sea el siguiente problema de programación lineal:

$$
\begin{array}{lrcll}
P) & \min \sum_{s\in S} \alpha_s(w - \sum_i u_i f_i(s) + \sum_i \sum_j v_{ij} g_{ij}(s)) & & & \\
s.a. & w - \sum_i u_i f_i(s) + \sum_i \sum_j v_{ij} g_{ij}(s) - \lambda \sum_{s'\in S} p_{s',s,a}(w - \sum_i u_i f_i(s') + \sum_i \sum_j v_{ij} g_{ij}(s')) & \geq & r_{s,a} & \forall s \in S, a \in A_s \\
& u_i, v_{ij} & \geq & 0 & \forall i \in I, j \in J \\
& w & \in & \mathbb{R} &
\end{array}
$$

En donde S, I, J son conjuntos arbitrarios, A_s es un conjunto para cada $s \in S$, $f_i(s)$ y $g_{ij}(s)$ son funciones lineales sobre el parámetro $s \in S$, $r_{s,a}$ es un parámetro para todo $s \in S, a \in A_s$, y $p_{s',s,a}$ es un parámetro también para todo $s', s \in S, a \in A_s$.

Obtenga el problema dual de P).

c) (5 puntos) Sea P) un problema de programación lineal entera de minimización con función objetivo $f(x)$, y sea PL) su relajación lineal. Llamemos DL) al problema dual de PL). Sea D) el problema de programación entera definido por DL) (es decir, posee la misma función objetivo y restricciones, solo que son variables enteras en vez de continuas), con función objetivo $g(y)$. Asuma que las funciones f y g son lineales.

i) Sean x e y soluciones factibles para P) y D) respectivamente. Determine justificadamente si se cumple que $f(x) \geq g(y) \quad \forall x, y$ factibles en P y D respectivamente.

ii) Sean x^* e y^* soluciones óptimas para P) y D) respectivamente. Determine justificadamente si se cumple que $f(x^*) = g(y^*)$.

iii) Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Si P) es factible y posee solución óptima, entonces D) es factible y posee solución óptima, no necesariamente con el mismo valor óptimo". Justifique.

Solución Problema 2.

a) i) El problema de programación lineal es:

$$
\begin{array}{llrcl}
P) & \text{máx} & x_A + x_B + 2x_C & & \\
& s.a. & 2x_A + x_B + 3x_C & \leq & 50 \\
& & x_A + 3x_B + 3x_C & \leq & 40 \\
& & 2x_A + x_B & \leq & 20 \\
& & x_A, x_B, x_C & \geq & 0
\end{array}
$$

ii) El problema dual asociado es:

$$
\begin{array}{llrcl}
P) & \text{mín} & 50y_1 + 40y_2 + 20y_3 & & \\
& s.a. & 2y_1 + y_2 + 2y_3 & \geq & 1 \\
& & y_1 + 3y_2 + y_3 & \geq & 1 \\
& & 3y_1 + 3y_2 & \geq & 2 \\
& & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

iii) Usamos el teorema de holguras complementarias:

$$
\begin{aligned}
(2y_1 + y_2 + 2y_3 - 1)x_A &= 0 \\
(y_1 + 3y_2 + y_3 - 1)x_B &= 0 \\
(3y_1 + 3y_2 - 2)x_C &= 0 \\
(2x_A + x_B + 3x_C - 50)y_1 &= 0 \\
(x_A + 3x_B + 3x_C - 40)y_2 &= 0 \\
(2x_A + x_B - 20)y_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Usando la solución que nos dan en el enunciado, $x^* = (10, 0, 10)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + 2y_3 &= 1 \\ 3y_1 + 3y_2 &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos 3 variables para dos ecuaciones. Esto significa que existen múltiples soluciones para el problema dual. Esto quiere decir que el problema primal tiene su solución óptima degenerada, por lo que había una restricción redudante.
Resolviendo este sistema, una posible solución es $y^* = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$. La solución completa, una forma de describirla sería:

$$\begin{aligned} y_1 &= z \\ y_2 &= \frac{2}{3} - z \\ y_3 &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}z \end{aligned}$$

Con $0 \leq z \leq \frac{1}{3}$.
Por lo tanto, cada variable dual tiene su rango de existencia:

$$\begin{aligned} y_1 &\in [0, \frac{1}{3}] \\ y_2 &\in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ y_3 &\in [0, \frac{1}{6}] \end{aligned}$$

Van a ser dos las soluciones básicas que determinen ese punto, dados por los extremos de cada rango. Por lo tanto, cada valor representa cuánto cambia la función objetivo al variar en una unidad el lado derecho de la restricción respectiva. Sin embargo, en este caso, por ejemplo si el lado derecho de la restricción 2 disminuye, tomará uno de los dos valores básicos de y_2, en cambio si aumenta, tomará el otro valor básico de y_2. La solución óptima es justamente un punto de quiebre para el precio sombra.

iv) Preferible uno de duraznos.

v) Lo que se puede interpretar es que, tengo mi solución x^*, óptima, pero se agregarán muchas variables x_k, con sus respectivos precios de venta y uso de ingredientes, dentro de los cuales existe un x_B tal que me conviene producirlo, por lo que debería estar en mi base óptima con un valor positivo.

Entonces, usando solo dualidad, es posible identificar x_B pues, agregar variables al problema primal es equivalente a agregar restricciones a mi problema dual. Si en mi problema primal, x^* es un punto factible no óptimo, significa que el y^* que había obtenido va a ser un punto no factible. Sin embargo, algunas restricciones se van a cumplir. Las primeras tres restricciones de mi problema dual, se van a seguir cumpliendo, pues eran las que ya existían. Como yo sé que una sola variable primal deberá entrar a la base (x_B), entonces yo se que mi restricción dual asociada a x_B es la que no se va a cumplir.

Por lo tanto, el método sería el siguiente:
si tengo K nuevas variables x_k, $k = 1, .., n$, entonces planteo K ecuaciones de la forma $a_k^T y^* \geq c_k$, en donde a_k es el vector que me indica la cantidad de kg de manzana, durazno y azúcar que se necesita para hacer un kg de mermelada de tipo k, y c_k es el precio de venta de esa mermelada. La ecuación que no se cumpla me indicará la mermelada que me convendrá producir.

b) Reordenando el problema, queda:

$$
\begin{array}{lrcll}
P) & \min \sum_{s\in S} \alpha_s w - \sum_i u_i \sum_{s\in S} \alpha_s f_i(s) + \sum_i \sum_j v_{ij} \sum_{s\in S} \alpha_s g_{ij}(s)) & & & \\
s.a. & w(1-\lambda \sum_{s'\in S} p_{s',s,a}) - \sum_i u_i (f_i(s) - \lambda \sum_{s'\in S} p_{s',s,a} f_i(s')) & & & \\
 & \quad + \sum_i \sum_j v_{ij}(g_{ij}(s) - \lambda \sum_{s'\in S} p_{s',s,a} g_{ij}(s')) & \geq & r_{s,a} & \forall s \in S, a \in A_s \\
 & u_i, v_{ij} & \geq & 0 & \forall i \in I, j \in J \\
 & w & \in & \mathbb{R} &
\end{array}
$$

Por lo tanto, aquí queda separado por variable. Planteamos el dual, que tendrá una variable por cada restricción primal y una restricción por cada variable primal:

$$
\begin{array}{lrcll}
D) & max \sum_{s\in S} \sum_{a\in A_s} x_{s,a} r_{s,a} & & & \\
s.a. & \sum_{s\in S} \sum_{a\in A_s} (1-\lambda \sum_{s\in S} p_{s',s,a}) x_{s,a} & = & \sum_{s\in S} \alpha_s & \\
 & -\sum_{s\in S} \sum_{a\in A_s} (f_i(s) - \lambda \sum_{s'\in S} p_{s',s,a} f_i(s')) x_{s,a} & \leq & -\sum_{s\in S} \alpha_s f_i(s) & \forall i \in I \\
 & \sum_{s\in S} \sum_{a\in A_s} (g_{ij}(s) - \lambda \sum_{s'\in S} p_{s',s,a} g_{ij}(s')) x_{s,a} & \leq & \sum_{s\in S} \alpha_s g_{ij}(s) & \forall i \in I, j \in J \\
 & x_{s,a} & \geq & 0 & \forall s \in S, a \in A_s
\end{array}
$$

c) Sean z_P, z_{PL}, z_{DL}, z_D los valores óptimos de P, PL, DL y D respectivamente

i) Sí es cierto. Se tiene que:

$$
z_D \underbrace{\leq}_{\text{Óptimo de relajación lineal}} z_{DL} \underbrace{=}_{\text{Teorema fuerte de dualidad}} z_{PL} \underbrace{\leq}_{\text{Óptimo derelajación lineal}} z_P
$$

.

Por lo tanto, $z_D \leq z_P$. Como se sabe que $z_P \leq f(x)$, para cualquier x factible para P), y $z_D \geq g(y)$, para cualquier y factible para D), entonces $g(y) \leq z_D \leq z_P \leq f(x) \Rightarrow f(x) \geq g(y)$.

ii) No es cierto en general. Supongamos que se tiene $z_D \leq z_{DL} = z_{PL} \leq z_P$. Basta que uno de los dos problemas de relajación lineal no tenga el mismo valor óptimo que su problema original para que el enunciado sea falso.

iii) Falso. Si P) es factible y posee solución óptima, entonces D) podría ser infactible. El siguiente ejemplo muestra esta situación:

$$
\begin{array}{llrcl}
P) & \text{máx} & 0{,}1y_1 - 0{,}9y_2 & & \\
 & s.a. & y_1 - y_2 & = & 1 \\
 & & y_1, y_2 & \geq & 0, \text{ enteros}
\end{array}
$$

Este problema es factible y tiene solución óptima a (1,0), al igual que PL). Entonces, el problema D) quedaría:

$$
\begin{array}{llrcl}
D) & \text{mín} & x_1 & & \\
 & s.a. & x_1 & \geq & 0{,}1 \\
 & & -x_1 & \geq & -0{,}9 \\
 & & x_1 & & \text{entero}
\end{array}
\quad \text{reescrito, queda:} \quad
\begin{array}{llrcl}
D) & \text{mín} & x_1 & & \\
 & s.a. & x_1 & \geq & 0{,}1 \\
 & & x_1 & \leq & 0{,}9 \\
 & & x_1 & & \text{entero}
\end{array}
$$

La relajación lineal DL) tiene un óptimo claro y es $x_1 = 0{,}1$. Sin embargo, D) es infactible.

Problema 3. (13 puntos)

a) (5 puntos) Sea el siguiente problema de programación lineal entera:

$$
\begin{array}{llrcl}
P) & \text{máx} & 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 & & \\
& s.a. & 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 & \leq & 8{,}5 \\
& & 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 3 \\
& & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 7 \\
& & 2x_3 & \leq & 2 \\
& & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\
& & x_1, x_2, x_3 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
$$

Resuelva el problema utilizando el algoritmo de Branch & Bound, determinando la(s) solución(es) óptima(s) y el valor óptimo del problema, mostrando claramente el árbol resultante con la solución y el valor de la función objetivo en cada nodo.

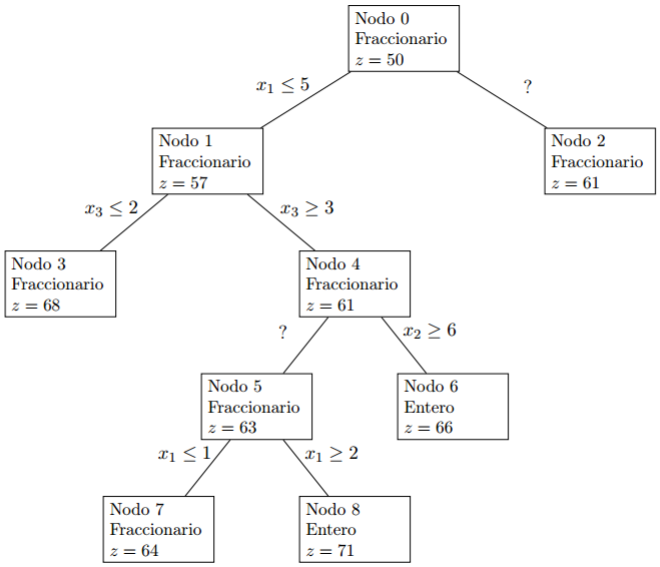
b) (5 puntos) Sea el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{array}{llrcl}
P) & \text{máx} & x_1 + 2x_2 & & \\
s.a. & & -x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\
& & 6x_1 + 5x_2 & \leq & 30 \\
& & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
& & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
$$

i) Resuleva el problema de relajación lineal y, en caso de ser necesario, genere dos cortes de Gomory distintos para este problema (**Hint:** Puede que tenga que agregar un corte, resolver nuevamente y de ahí agregar el segundo corte).

ii) Resuleva el problema de relajación lineal (agregando las restricciones generadas en *i*) y concluya que se llegó a un óptimo del problema P).

c) (3 puntos) Considere un problema lineal entero de minimización. Un árbol parcial de Branch & Bound se muestra a continuación:



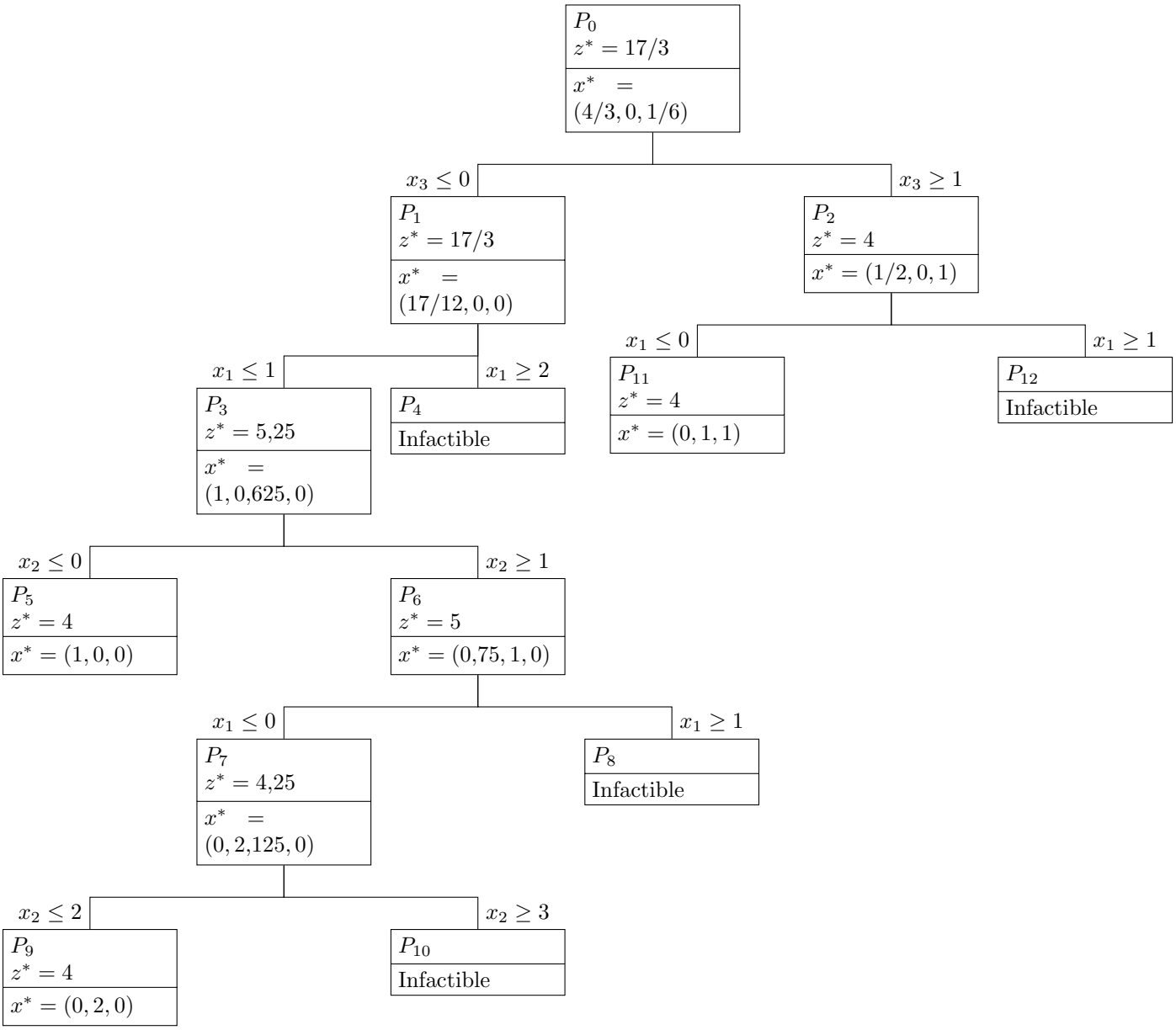
i) (1 punto) ¿Cuáles son las restricciones que se agregaron a los nodos 2 y 5?

ii) (1 punto) ¿Cuál es la mejor cota superior e inferior encontrada hasta el momento?

iii) (1 punto) ¿Qué nodos deben ser podados y qué nodos se deben seguir ramificando? Justifique

Solución Problema 3.

a) El árbol de B& B quedaría:



Por lo tanto, las soluciones óptimas serían (1,0,0), (0,2,0) y (0,1,1), con un valor óptimo de 4.

b) La solución del problema de relajación lineal es $(\frac{40}{17}, \frac{54}{17})$. Por lo tanto, la forma canónica del problema (basta con solo calcular B^{-1}) sería:

$$\begin{array}{lcccc} P) & & \min f(x) & & \\ s.a. & x_1 - \frac{5}{17}x_3 + \frac{2}{17}x_4 & = & \frac{40}{17} \\ & x_2 + \frac{6}{17}x_3 + \frac{1}{17}x_4 & = & \frac{54}{17} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

De aquí, puedo generar dos cortes, debido a que ambas variables resultan fraccionarias. Ambos cortes serían:

$$(-\frac{5}{17} - \left\lfloor -\frac{5}{17} \right\rfloor)x_3 + (\frac{2}{17} - \left\lfloor \frac{2}{17} \right\rfloor)x_4 \geq (\frac{40}{17} - \left\lfloor \frac{40}{17} \right\rfloor) \Rightarrow 12x_3 + 2x_4 \geq 6$$

$$(\frac{6}{17} - \left\lfloor \frac{6}{17} \right\rfloor)x_3 + (\frac{1}{17} - \left\lfloor \frac{1}{17} \right\rfloor)x_4 \geq (\frac{54}{17} - \left\lfloor \frac{54}{17} \right\rfloor) \Rightarrow 6x_3 + x_4 \geq 3$$

Ambos son el mismo corte, que corresponde a $x_2 \leq 3$. Por lo tanto, como queremos generar un segundo corte, volvemos a resolver el problema de relajación lineal, esta vez agregando la nueva restricción:

$$\begin{array}{lccc} P_2) & \text{máx } x_1 + 2x_2 & & \\ s.a. & -x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ & 6x_1 + 5x_2 & \leq & 30 \\ & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

La solución óptima del problema es $(\frac{5}{2}, 3)$. Por lo tanto, la fomra canónica del problema sería:

$$\begin{array}{lccc} P_2) & \text{máx } x_1 + 2x_2 & & \\ s.a. & x_1 + \frac{1}{6}x_4 - \frac{5}{6}x_5 & = & \frac{5}{2} \\ & x_2 + x_5 & = & 3 \\ & x_3 + \frac{1}{6}x_4 - \frac{17}{6}x_5 & = & \frac{1}{2} \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Aquí solo una de las dos variables es fraccionaria (x_1), por lo que solo se puede generar un corte:

$$(\frac{1}{6} - \left\lfloor \frac{1}{6} \right\rfloor)x_4 + (-\frac{5}{6} - \left\lfloor -\frac{5}{6} \right\rfloor)x_5 \geq (\frac{5}{2} - \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor) \Rightarrow x_4 + x_5 \geq 3$$

Este corte corresponde a $x_1 + x_2 \leq 5$. Si se agrega este corte y se resuelve nuevamente el problema de relajación lineal, se obtendrá una solución de (2,3), que es entera. Por lo tanto, se comprueba la eficacia del método.

c) i) Nodo 2: $x_1 \geq 6$
Nodo 5: $x_2 \leq 5$

ii) Mejor cota superior: 66
Mejor cota inferior: 61

iii) Se debe seguir ramificando los nodos 2 y 7. Se debe podar el nodo 3 (solución peor que el incumbente), nodo 8 (solución entera) y nodo 6 (solución entera).

Problema 4. (16 puntos)

El país de Conservia posee una cadena de museos (que se encuentran en el conjunto M) a lo largo de ciudades dentro del país (que se encuentran en el conjunto N, con $|M| > |N|$). El presidente del país quiere fomentar la cultura en sus ciudadanos, por lo que le interesa planificar la actividad de los museos para las próximas S semanas.

En específico, existe un conjunto I de pinturas y un conjunto J de esculturas que pueden ser exhibidas en cada museo. Al principio de la temporada ($t = 0$), puede asumir que todas las pinturas y esculturas están almacenados en algún museo, indicado en el parámetro a^p_{im} que equivale a 1 si la pintura i se encuentra en el museo m (en $t = 0$), 0 en caso contrario, y a^e_{im} que equivale a 1 si la escultura j se encuentra en el museo m (en $t = 0$), 0 en caso contrario. El presidente, para que todas las ciudades estén más o menos equilibradas, quiere que todos los días, en cada ciudad, se esté exhibiendo al menos una escultura. Además, hay algunas pinturas especiales que están en el conjunto $P \subset I$, las cuales solo pueden estar en algunos museos, debido a que necesitan medidas de seguridad que solo algunos establecimientos poseen. Este requerimiento se refleja en el parámetro α_m, que equivale a 1 si el museo m tiene las medidas de seguridad suficientes para ello. Estas pinturas especiales siempre tienen que estar en exhibición, y no pueden haber dos de ellas en un mismo museo en el mismo día.

Cada museo debe encargarse también de funcionar correctamente. Se sabe que un museo puede pasar a lo más 6 días seguidos en funcionamiento antes de necesitar un día de aseo completo. Es decir, ese día de aseo,

el museo permanece cerrado. El presidente quiere que siempre los fines de semana esté abierto al menos un museo en cada ciudad. Además, para cada pintura $i \in I$, se necesita una cantidad de guardias q_i que la estén custodiando durante el día, independiente si el museo está abierto o no. Contratar un guardia por día tiene un costo de c en caso de ser un día de semana, y tiene un costo r en caso de ser fin de semana, con $r > c$.

Las pinturas y esculturas es posible trasladarlas de lugar, en caso de ser más útiles en otro lado. Para ello, se sabe que el costo de trasladar una pintura de un museo m a otro museo l en el día t es u^p_{mlt}. Si además los museos están en ciudades distintas, se debe incurrir en un costo f^p_t en el día t. Este traslado se hace bien temprano al inicio de un día, de manera de no afectar el funcionamiento de un museo. En el caso de las esculturas, el costo es de u^e_{mlt} y f^e_t respetivamente. Asuma que los traslados de pinturas y esculturas sí se pueden hacer en un día de aseo. Considere que el parámetro β_{mn} es igual a 1 si el museo m está en la ciudad n, 0 en otro caso.

Además, se sabe que para cada museo m existe una demanda diaria equivalente a d_{mt} personas para el día t. Cada pintura i producirá un beneficio cultural de B^p_i unidades por cada persona que pueda ver esa pintura en un día, mientras que una escultura j producirá un beneficio de B^e_j. Cada museo debe cobrar una pequeña entrada, y existen dos precios posibles a cobrar dados por p_1 y p_2, con $p_1 < p_2$. Las personas van a entrar al museo independiente del precio que se cobre. Sin embargo, si se cobra p_2, se producirá un perjuicio cultural de V unidades por cada persona que pague esa entrada.

El presidente quiere que exista un nivel mínimo de Z unidades de cultura conseguidas en las siguientes S semanas. Plantee un problema de programación lineal entero que le permita al presidente planificar diariamente qué hacer con su cadena de museos de modo de cumplir sus requerimientos maximizando sus utilidades totales.

Nota: una pintura/escultura está en exhibición si el museo está abierto. Si el museo está cerrado, una pintura/escultura puede estar en el museo, pero no se considera en exhibición.

Solución Problema 4.

Antes de modelar, vamos a definir unos parámetros que no están explícitos en el enunciado, pero son totalmente deducibles:

$$h_t = \begin{cases} 1 & \text{Si el día } t \text{ es sábado o domingo.} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$g_{ml} = \begin{cases} 1 & \text{Si los museos } m \text{ y } l \text{ están en ciudades distintas.} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

Y definiremos el conjunto T de todos los días.

Variables de decisión:

$$x^p_{imt} = \begin{cases} 1 & \text{Si la pintura } i \text{ se encuentra en el museo } m \text{ en el día } t. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$x^e_{jmt} = \begin{cases} 1 & \text{Si la escultura } j \text{ se encuentra en el museo } m \text{ en el día } t. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\gamma^p_{imt} = \begin{cases} 1 & \text{Si la pintura } i \text{ se encuentra en exhibición en el museo } m \text{ en el día } t. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\gamma^e_{jmt} = \begin{cases} 1 & \text{Si la escultura } j \text{ se encuentra en exhibición en el museo } m \text{ en el día } t. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$z_{mt} = \begin{cases} 1 & \text{Si el museo } m \text{ está abierto en el día } t \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

y_{mt} = Cantidad de guardias a contratar el día t en el museo m.

$$w^p_{imlt} = \begin{cases} 1 & \text{Si la pintura } i \text{ se traslada desde el museo } m \text{ hasta el museo } l \text{ en el día } t. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$w^e_{jmlt} = \begin{cases} 1 & \text{Si la escultura } j \text{ se traslada desde el museo } m \text{ hasta el museo } l \text{ en el día } t. \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$v_m = \begin{cases} 1 & \text{Si el precio a cobrar en el museo } m \text{ es igual a } p_2. \\ 0 & \text{Si el precio a cobrar en el museo } m \text{ es igual a } p_1. \end{cases}$$

ω_{mt} = variable auxiliar que representará $z_{mt} \cdot v_m$

Función objetivo:

$$\text{máx} \sum_t \sum_m d_{mt}(z_{mt}p_1 + \omega_{mt}(p_2 - p_1)) - \sum_t \sum_m y_{mt} \cdot (h_t r + (1 - h_t)c)$$

$$- \sum_t \sum_m \sum_{l \neq m} (\sum_i w^p_{imlt}(u^p_{mlt} + g_{ml} f^p_t) + \sum_j w^e_{jmlt}(u^e_{mlt} + g_{ml} f^e_t))$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

Una pintura/escultura solo puede estar en un lugar al mismo tiempo:

$$\sum_{m \in M} x^p_{imt} = 1 \qquad \forall i \in I, t \in T$$

$$\sum_{m \in M} x^e_{jmt} = 1 \qquad \forall j \in J, t \in T$$

Relación entre el lugar donde está una pintura/escultura y donde estuvo el día anterior, indicando que debe haber viajado:

$$x^p_{im0} = a^p_{im} \qquad \forall i \in I, m \in M$$

$$x^p_{imt-1} + x^p_{ilt} - 1 \leq w^p_{imlt} \qquad \forall i \in I, m, l \in M, t \in T$$

$$x^e_{jm0} = a^e_{jm} \qquad \forall j \in J, m \in M$$

$$x^e_{jmt-1} + x^e_{jlt} - 1 \leq w^e_{jmlt} \qquad \forall j \in J, m, l \in M, t \in T$$

Cuando una pintura/escultura está en exhibición, significa que está en un museo determinado y el museo está abierto ese día:

$$\gamma^p_{imt} \leq \frac{x^p_{imt} + z_{mt}}{2} \qquad \forall i \in I, m \in M, t \in T$$

$$\gamma^p_{imt} \geq x^p_{imt} + z_{mt} - 1 \qquad \forall i \in I, m \in M, t \in T$$
$$\gamma^e_{jmt} \leq \frac{x^e_{jmt} + z_{mt}}{2} \qquad \forall j \in J, m \in M, t \in T$$
$$\gamma^e_{jmt} \geq x^e_{jmt} + z_{mt} - 1 \qquad \forall j \in J, m \in M, t \in T$$

Tiene que haber una escultura en exhibición en cada ciudad todos los días:

$$\sum_{j \in J} \sum_{m \in M} \beta_{mn} \gamma^e_{jmt} \geq 1 \qquad \forall n \in N, t \in T$$

Pinturas especiales solo pueden estar en algunos museos:

$$(1 - \alpha_m) \sum_{i \in P} x^p_{imt} = 0 \qquad \forall m \in M, t \in T$$

Pinturas especiales deben exhibirse siempre:

$$\sum_{m \in M} \gamma^p_{imt} \geq 1 \qquad \forall i \in P, t \in T$$

Pinturas especiales no pueden haber dos en un mismo museo:

$$\sum_{i \in P} \gamma^p_{imt} \leq 1 \qquad \forall m \in M, t \in T$$

Un museo no puede funcionar más de 6 días seguidos:

$$\sum_{s=t-6}^{t} z_{ms} \leq 6 \qquad \forall m \in M, t = 7, 8, 9, ..., 7 \cdot S$$

En cada ciudad, si es sábado o domingo, debe haber al menos un museo abierto:

$$\sum_{m \in M} \beta_{mn} z_{mt} \geq h_t \qquad \forall n \in N, t \in T$$

Guardias mínimos para un día:

$$y_{mt} \geq \sum i \in I q_i x^p_{imt} \qquad \forall m \in M, t \in T$$

Definición de variable auxiliar:

$$\omega_{mt} \leq \frac{z_{mt} + v_m}{2} \qquad \forall m \in M, t \in T$$
$$z_{mt} + v_m - 1 \leq \omega_{mt} \qquad \forall m \in M, t \in T$$

Beneficio cultural mínimo:

$$\sum_{t \in T} \sum_{m \in M} (\sum_{i \in I} \gamma^p_{imt} d_{mt} B^p_i + \sum_{j \in J} \gamma^e_{jmt} d_{mt} B^e_j) - \sum_{t \in T} \sum_{m \in M} \omega_{mt} d_{mt} V \geq Z$$

Naturaleza de variables.