PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2015
Profesores: P.Álvarez - M.Fuentes
J.Vera - A.Cataldo - D.Pozo

Tarea 3

Fecha de Entrega: 16 de Junio.

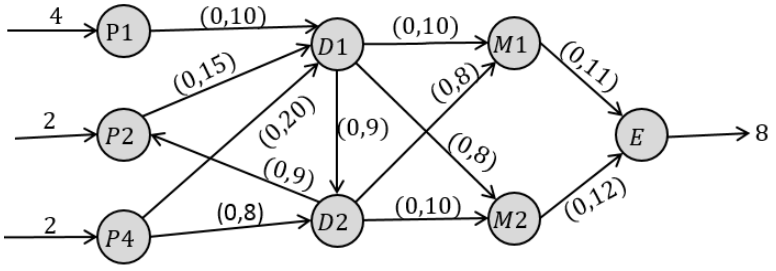
Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea debe ser desarrollada individualmente.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **nombre, sección**[1] **y número de alumno con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupo de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día martes 16 de Junio a las 13:00 horas. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaria del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a la sección a la que están inscritos.
- ◇ La copia o intento de copia será castigada con la **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso.

Problema 1. (14 puntos)

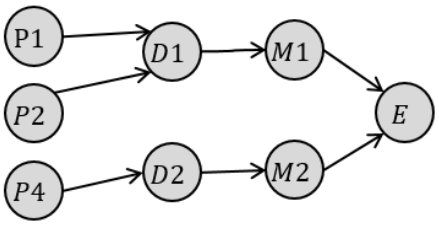
a) (3 puntos) Considere la siguiente red, que indica (l_{ij}, u_{ij}):



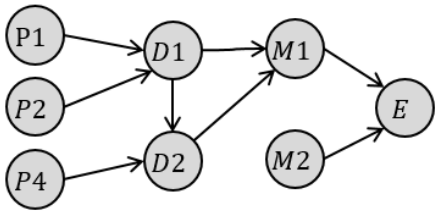
Indique cuál de las redes a continuación corresponden a una solución básica factible. Justifique claramente tanto si lo fuera como si no lo fuera. Y en caso de que lo fuera, determine los valores de $f_{ij} = x_{ij}$ para cada arco.

[1] La sección que deben escribir es aquella a la que están inscritos y no a la que asisten.

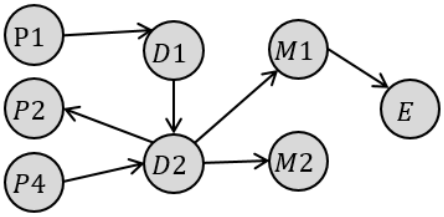
(i)



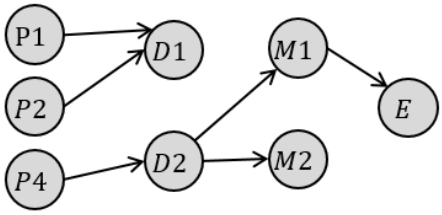
(ii)



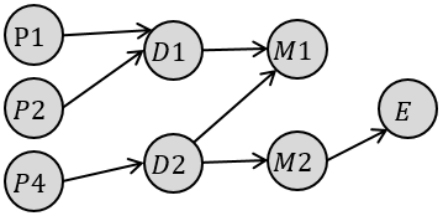
(iii)



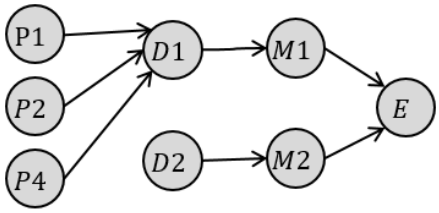
(iv)



(v)

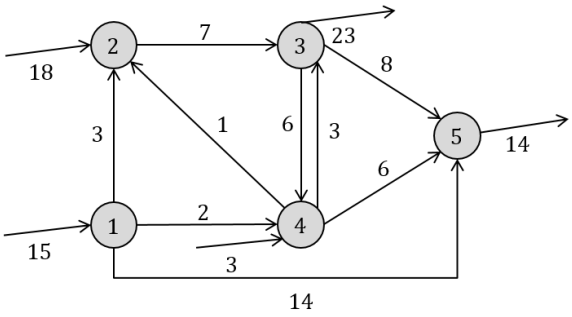


(vi)



b) (2 puntos) Demuestre que si una ruta $i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_n$ es mínima entre 1 y n, entonces para cualquier (s,t) con $1 \leq s < t \leq n$ la ruta $i_s \to \cdots \to i_t$ es mínima entre i_s e i_t.

c) (2 puntos) Considere la siguiente red de flujo a costo mínimo, que indica los costos unitarios en cada arco. Indique en pocas palabras qué problema tiene para resolverlo utilizando Simplex especializado en redes y qué haría usted para resolverlo.



d) (3 puntos) Considere el problema general de corte mínimo. Pruebe que las variables π_i (las duales del flujo máximo asociada a la restricciones de conservación de flujo) podrán tomar solamente valores 0 ó 1 en el óptimo, para todo $i \in N$, en el óptimo.

e) (2 puntos) El método de Newton se caracteriza por considerar la expansión de segundo orden de $f(x)$. Determine a partir de ésta la expresión para la dirección de descenso que utiliza este método de optimización.

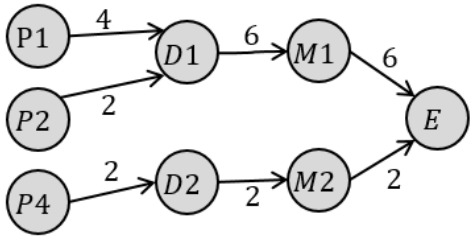
f) (2 puntos) Para la minimización de las siguientes funciones, ¿qué método recomendaría, Newton o Gradiente?

i) (1 punto) $f(x,y) = x^4 + 3y^2$

ii) (1 punto) $f(x) = x^3 + e^{-x^2}$

Solución Problema 1.

a) (i) Es un árbol, conexo y acíclico. Además, permite llevar el flujo de manera factible cumpliendo flujos exógenos. Luego es una solución básica factible.



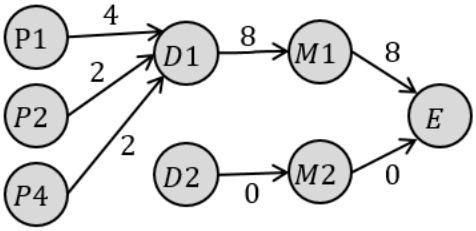
(ii) Es una red que permite una distribución factible del flujo. Sin embargo, no es básica dado que no es un árbol (tiene un ciclo).

(iii) Es un árbol, conexo y acíclico. Sin embargo, no permite cumplir con las ofertas y demandas de la red. Luego no es una base factible.

(iv) No es un árbol, dado que no es conexo. Luego no es una base factible.

(v) Es un árbol, conexo y acíclico. Sin embargo, no permite cumplir con las ofertas y demandas de la red. Luego no es una base factible. Para que eso ocurra, $M1 - E$ debería tener flujo positivo, y por ende, estar en la base. Luego no es una base factible.

(vi) Es un árbol, conexo y acíclico. Además, permite llevar el flujo de manera factible cumpliendo flujos exógenos. Luego es una solución básica factible.



b) Supongamos que la ruta $P_0 : i_1 \to \cdots \to i_n$ es mínima entre 1 y n. Esta ruta puede ser descompuesta en tres tramos, $P_1 : i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_s, P_2 : i_s \to \cdots \to i_t$ y $P_3 : i_t \to \cdots \to i_n$.

Supongamos que la ruta P_2 no es óptima entre i_s e i_t. Así, llamemos P_2' a la ruta entre i_s e i_t con costo menor que P_2. La ruta $P_1 \cup P_2' \cup P_3$ es una ruta entre i_1 e i_n de costo menor que P_0, lo que contradice nuestra hipótesis, lo que prueba que P_2 es ruta mínima entre s y t.

c) El problema es que la red presenta un exceso de oferta, por lo que la red no está balanceada. Lo que hay que hacer es crear un nodo auxiliar demanda en el grafo, que demande $\sum_{i \in O} O_i - \sum_{i \in D} D_i$, con O el conjunto de los nodos que ofertan, y D el conjunto de los nodos que demandan. A este nodo auxiliar ingresan arcos que salen desde todos los nodos que ofertan algo, cuyas capacidades son 0 e ∞, y con costo 0.

d) Consideremos una ruta sobre el grafo original, definida por la secuencia $n_s, n_1, n_2, \ldots, n_r$, donde el nodo s es el nodo de entrada de flujo a la red y el nodo r es el nodo de salida de flujo de la red.

Las restricciones del problema dual son:

$$\pi_i - \pi_j + \psi_{ij} - \phi_{ij} = 0 \quad (1)$$
$$\pi_r - \pi_s = 1 \quad (2)$$

Si se suma para la ruta escogida las restricciones (1) se tiene:

$$\pi_s - \pi_r + \sum_{(i,j) \in \text{ruta}} \psi_{ij} - \sum_{(i,j) \in \text{ruta}} \phi_{ij} = 0 \quad (3)$$

Asumamos, sin perder generalidad, que esta ruta transporta flujo y que uno de sus arcos, el arco (ab), satura su capacidad (y entonces $f_{ab} = u_{ab}$), y que el resto queda tal que $f_{ij} \leq u_{ij}, \forall (i,j) \in \text{ruta} - \{ab\}$. Al aplicar el teorema de holguras complementarias a estos flujos se tiene que: $\psi_{ab} \geq 0$ y $\phi_{ab} = 0$ y que $\psi_{ij} = \phi_{ij} = 0, \forall (i,j) \in \text{ruta} - \{ab\}$.

Si se reconstruye el segmento $j - a - b - i$ parte de la ruta analizada, se tiene que:

$$\begin{gathered} \pi_j - \pi_a + \psi_{ja} - \phi_{ja} = 0 \\ \pi_a - \pi_b + \psi_{ab} - \phi_{ab} = 0 \\ \pi_b - \pi_i + \psi_{bi} - \phi_{bi} = 0 \end{gathered}$$

Pero se sabe que $\psi_{ab} \geq 0$ y $\phi_{ab} = 0$ y que $\psi_{ij} = \phi_{ij} = 0, \forall (i,j) \in \text{ruta} - \{ab\}$, entonces, las expresiones anteriores quedan:

$$\begin{gathered} \pi_j = \pi_a \\ \pi_a - \pi_b = -1 \\ \pi_b = \pi_i \end{gathered}$$

de donde se desprende a través de inducción que $\pi_s = \ldots = \pi_j = \pi_a$ (conjunto X) y que $\pi_b = \pi_i = \ldots = \pi_r$ (conjunto $\bar{X}$). Así, si los π_j para todo $j \in X$ toman valor 0 entonces los π_i para todo $i \in \bar{X}$ deberán tomar valor 1.

e) Por la expansión de Taylor de segundo orden,

$$f(x+d) = f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x + \delta d) d$$

para algún $\delta \in (0,1)$. Por continuidad, y para d pequeños, aproximamos $\nabla^2 f(x + \delta d)$ a $\nabla^2 f(x)$.

Asumiendo $\nabla^2 f(x) > 0$, minimizamos $f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x) d$.

- ◇ El óptimo es $d = -\left(\nabla^2 f(x)^{-1}\right) \nabla f(x)$.
- ◇ Notemos que $d^T \nabla f(x) = -\nabla f(x)^T (\nabla^2 f(x)^{-1})^T \nabla f(x)$.
- ◇ Es decir, si $\nabla^2 f(x) > 0$, d es dirección de descenso.

f) i) Para este caso, el método recomendado en general es el método de Newton, dado que la función es de forma cuadrática y (estrictamente) convexa, por lo tanto Newton podría terminar en una iteración en la búsqueda del óptimo. Sin embargo, esto depende del punto de partida que se tenga. Así, por ejemplo, si se comienza del punto (1,0):

- ◇ Newton desarrolla una iteración general donde sólo avanza por la coordenada 1 de la forma $x_{k+1} = \frac{2}{3} x_k$ y la convergencia no es cuadrática. Esto dice que no tiene «strong convexity» debido a que el Hessiano de f en (0,0) no es definido positivo.
- ◇ Sin embargo, el método del Gradiente termina en una iteración.

ii) En este caso, al ser una función de una sola variable, no tiene mucho sentido hablar de gradiente. Por lo mismo, el método de Newton es el adecuado.

Problema 2. (18 puntos)

a) (6 puntos) Terminada la Interrogación 3 de este semestre, dos profesores del curso y los 6 ayudantes de cátedra se quieren trasladar desde la Universidad al restorán *OptiPizza* para conversar de temas recreativos no relacionados con el curso (no todo es el curso). Sin embargo, conocen la ciudad y saben que los «eventos» en las calles no causarían un menor daño a los vehículos que los transporten. Por otro lado, saben que hay disturbios en algunas zonas y que si, por un tramo, pasasen más de una cierta cantidad de gente, simplemente no llegarían. Usando sus conocimientos de redes, decidieron construir toda la información de tramos existentes en las siguientes matrices C y U, que representan los costos físicos y la máxima cantidad de gente que puede pasar por cada tramo. Se indica con $c_{ij} = \infty$ aquellos tramos imposibles.

$$C = \begin{array}{c} \\ SJ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} SJ & 1 & 2 & 3 & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 8 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 15 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \end{array} \qquad U = \begin{array}{c} \\ SJ \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} SJ & 1 & 2 & 3 & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 12 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

i) (3 puntos) Formule el problema presentado como un problema de flujo a costo mínimo, y utilice el algoritmo de Simplex especializado en redes para determinar cómo deberían moverse los miembros del curso para llegar al momento de recreación de manera óptima. Indique claramente cuál es la ruta que tomaría cada uno. Considere que, actualmente y sin pensar mucho el problema, están considerando irse todos juntos siguiedo el trayecto $SJ - 1 - 3 - R$.

ii) (2 puntos) El equipo quiere estar seguro de que todos llegarán en el menor costo posible, dado que el presupuesto no es tan grande. Para estar seguros, les piden también que reformulen el problema como uno de ruta más corta y utilicen el algoritmo de *Dijkstra* para encontrar la solución óptima.

iii) (1 punto) Compare las soluciones obtenidas en i) y en ii), y comente qué puede decir de ellas. ¿Por qué sucede esto?

b) (3 puntos) Considere el siguiente problema de optimización sin restricciones:

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} (x-3)^2 + (y+2)^2 + 5$$

i) (1 puntos) Argumente brevemente si el problema anterior tiene solución óptima. En caso de ser afirmativa, comente brevemente de la unicidad de esa solución.

ii) (2 puntos) Resuelva utilizando el método del gradiente a paso óptimo, tomando como punto de partida el punto $(x_0, y_0) = (4, 0)$.

c) (6 puntos) Considere el siguiente problema de Programación Lineal:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.a. & a_i^T x \geq b_i, i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

donde A es una matriz de $m \times n$, con $m > n$ y cuyas columnas son linealmente independientes (de rango máximo), $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que se conoce un punto x^0 tal que $a_i^T x^0 > b_i, i = 1, \ldots, m$. En algunas aplicaciones avanzadas de optimización interesa encontrar un punto, como ese, que cumpla estrictamente todas las restricciones, pero que esté ubicado muy "al centro" de la región factible. Eso se hace planteando el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \min & -\sum_{i=1}^{n} \log(a_i^T x - b_i) \\ s.a. & x \in S \end{array}$$

donde $S = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x - b_i > 0, i = 1, \ldots, m\}$. Note que esto es así porque x tiene que estar siempre en el interior de las restricciones o si no la función objetivo de este problema no está definida. Por esa razón podemos remitirnos al siguiente problema sin restricciones:

$$\min f(x)$$

donde

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{n} \log(a_i^T x - b_i)$$

Vamos a usar el método de Newton, partiendo desde x^0 para resolver este problema.

i) (1 punto) Argumente que $f(x) \to \infty$ cuando x se acerca a la frontera del conjunto S, por el interior.

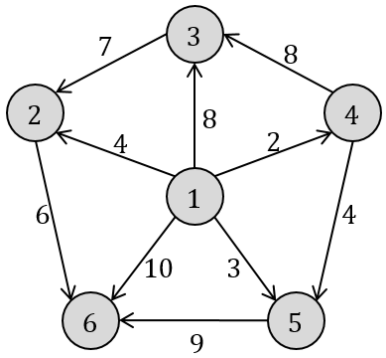
ii) (2 puntos) Determine el gradiente y Hessiano de la función objetivo.

iii) (1 punto) Muestre que la función objetivo es estrictamente convexa en su dominio.

iv) (1 punto) Escriba la fórmula para la dirección del método de Newton.

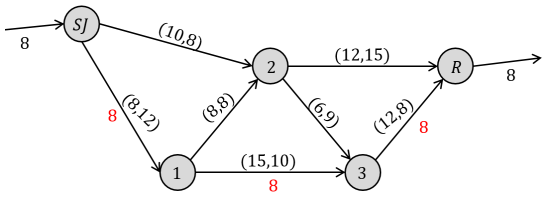
v) (1 puntos) Argumente que el método nunca saldrá del interior de la región definida por las restricciones.

d) (3 puntos) Considere la siguiente red a través de la cual se desea transportar flujo desde el nodo 1 al nodo 6. Considere que, sobre cada arco, se ha colocado la información sobre la capacidad del mismo. Indique cuántos cortes es posible realizar entre los nodos 1 y 6 en esta red (indicando la capacidad de cada corte) y determine el valor del corte mínimo.



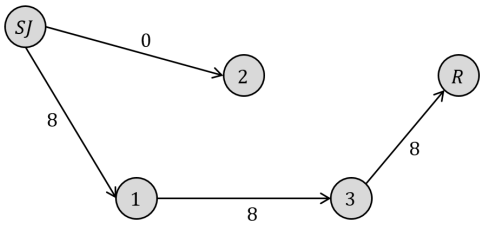
Solución Problema 2.

a) i) La figura a continuación representa la información entregada, además de la solución factible inicial indicada. La información de los arcos presenta (c_{ij}, u_{ij}), y en rojo se presenta el flujo inicial factible.



Ahora, para resolver el problema con el algoritmo de Simplex especializado en redes, se debe encontrar una base factible inicial (árbol generador mínimo) y comenzar a iterar.

◇ Iteración 1.
La solución básica factible inicial se muestra en la figura a continuación.



Esta es la base que utilizamos para calcular el valor de las variables duales $(\pi' s)$, a través de los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de $\pi' s$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$:

$$\bar{c}_{SJ,1} = 8 - \pi_{SJ} + \pi_1 = 0$$

$$\bar{c}_{SJ,2} = 10 - \pi_{SJ} + \pi_2 = 0$$

$$\bar{c}_{13} = 15 - \pi_1 + \pi_3 = 0$$

$$\bar{c}_{3R} = 12 - \pi_3 + \pi_R = 0$$

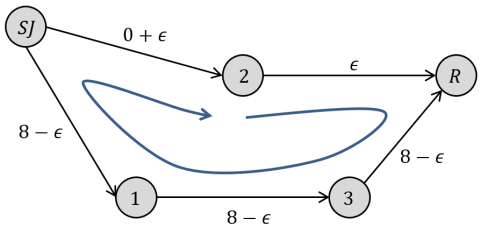
Considerando, arbitrariamente, $\pi_{SJ} = 0$ se tiene que $\pi_1 = -8, \pi_2 = -10, \pi_3 = -23$, y $\pi_R = -35$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de costos reducidos de las variables no básicas.

$$\bar{c}_{12} = 8 - (-8) + (-10) = 6 \geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{23} = 6 - (-10) + (-23) = -7 \ngeq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{2R} = 12 - (-10) + (-35) = -13 \ngeq 0 \ \ (l)$$

Como el costo reducido $\bar{c}_{2R}$ es aquél que más invalida la condición de optimalidad, entonces entra a la base f_{2R}.

- Salida de la Base.
Para determinar que variable debe abandonar la base, se construye el grafo presentado en la figura a continuación a partir del árbol generador mínimo agregando la variable entrante.

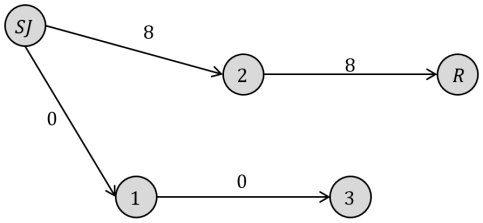


Se debe calcular el cuello de botella de la reasignación de flujo. Para ello:

$$\text{mín}\{\epsilon_{SJ,2} = 8, \epsilon_{2R} = 15, \epsilon_{SJ,1} = 8, \epsilon_{13} = 8, \epsilon_{3R} = 8\} = \epsilon = 8$$

Luego, puede salir de la base $f_{SJ,1}, f_{13}$ o f_{3R}. Cualquiera de las variables que se escoja, el resultado final será el mismo. Entonces, escogemos f_{3R} para que abandone la base, y pasamos a la siguiente iteración.

◇ Iteración 2.
La solución básica factible inicial se muestra en la figura a continuación.



Esta es la base que utilizamos para calcular el valor de las variables duales ($\pi's$), a través de los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$:

$$\bar{c}_{SJ,1} = 8 - \pi_{SJ} + \pi_1 = 0$$
$$\bar{c}_{SJ,2} = 10 - \pi_{SJ} + \pi_2 = 0$$
$$\bar{c}_{13} = 15 - \pi_1 + \pi_3 = 0$$
$$\bar{c}_{2R} = 12 - \pi_2 + \pi_R = 0$$

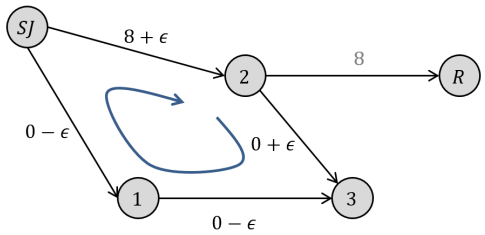
Considerando, arbitrariamente, $\pi_{SJ} = 0$ se tiene que $\pi_1 = -8, \pi_2 = -10, \pi_3 = -23$, y $\pi_R = -22$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de costos reducidos de las variables no básicas.

$$\bar{c}_{12} = 8 - (-8) + (-10) = 6 \geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{23} = 6 - (-10) + (-23) = -7 \ngeq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{3R} = 13 - (-23) + (-22) = 13 \geq 0 \ \ (l)$$

Como el costo reducido $\bar{c}_{23}$ es aquél que más invalida la condición de optimalidad, entonces entra a la base f_{23}.

- Salida de la Base.
Para determinar que variable debe abandonar la base, se construye el grafo presentado en la figura 3 a partir del árbol generador mínimo agregando la variable entrante.



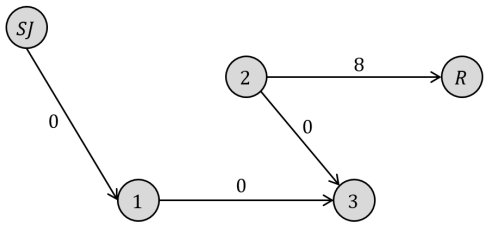
Se debe calcular el cuello de botella de la reasignación de flujo. Para ello:

$$\text{mín}\{\epsilon_{SJ,2} = 0, \epsilon_{23} = 9, \epsilon_{SJ,1} = 0, \epsilon_{13} = 0\} = \epsilon = 0$$

Luego, puede salir de la base $f_{SJ,1}, f_{SJ,2}$ o f_{13}. Cualquiera de las variables que se escoja, el resultado final será el mismo. Entonces, escogemos $f_{SJ,2}$ para que abandone la base, y pasamos a la siguiente iteración.

◇ Iteración 3

La solución básica factible inicial se muestra en la figura a continuación.



Esta es la base que utilizamos para calcular el valor de las variables duales ($\pi's$), a través de los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$:

$$\bar{c}_{SJ,1} = 8 - \pi_{SJ} + \pi_1 = 0$$
$$\bar{c}_{13} = 15 - \pi_1 + \pi_3 = 0$$
$$\bar{c}_{23} = 6 - \pi_2 + \pi_3 = 0$$
$$\bar{c}_{2R} = 12 - \pi_2 + \pi_R = 0$$

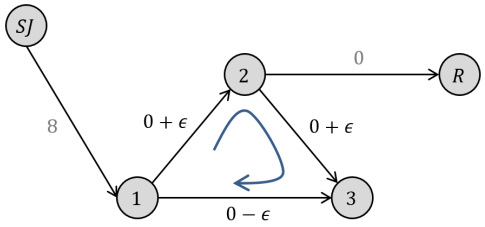
Considerando, arbitrariamente, $\pi_{SJ} = 0$ se tiene que $\pi_1 = -8, \pi_2 = -17, \pi_3 = -23$, y $\pi_R = -29$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de costos reducidos de las variables no básicas.

$$\bar{c}_{SJ,2} = 10 - (0) + (-17) = -7 \leq 0 \ \ (u)$$
$$\bar{c}_{12} = 8 - (-8) + (-17) = -1 \ngeq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{3R} = 12 - (-23) + (-29) = 6 \geq 0 \ \ (l)$$

Como el costo reducido $\bar{c}_{12}$ es aquél que más invalida la condición de optimalidad, entonces entra a la base f_{12}.

- Salida de la Base.
  Para determinar que variable debe abandonar la base, se construye el grafo presentado en la figura 3 a partir del árbol generador mínimo agregando la variable entrante.

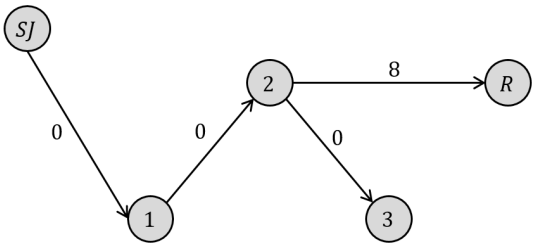


  Se debe calcular el cuello de botella de la reasignación de flujo. Para ello:

$$\text{mín}\{\epsilon_{12} = 8, \epsilon_{13} = 0, \epsilon_{23} = 9\} = \epsilon = 0$$

  Luego, puede salir de la base cualquiera de las tres variables. Escogemos f_{13} para que abandone la base para ahorrar cálculos, y pasamos a la siguiente iteración.

◇ Iteración 4
Se tiene la siguiente solución básica factible:



que utilizamos para calcular el valor de las variables duales ($\pi's$), a través del cálculo de los costos reducidos de las variables básicas.

- Cálculo de $\pi's$, utilizando $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$:

$$\bar{c}_{SJ,1} = 8 - \pi_{SJ} + \pi_1 = 0$$
$$\bar{c}_{12} = 8 - \pi_1 + \pi_2 = 0$$
$$\bar{c}_{23} = 6 - \pi_2 + \pi_3 = 0$$
$$\bar{c}_{2R} = 12 - \pi_2 + \pi_R = 0$$

  Considerando, arbitrariamente, $\pi_{SJ} = 0$ se tiene que $\pi_1 = -8, \pi_2 = -16, \pi_3 = -22$, y $\pi_R = -28$. Con esta información, se calculan los costos reducidos de las variables no básicas.

- Cálculo de costos reducidos de las variables no básicas.

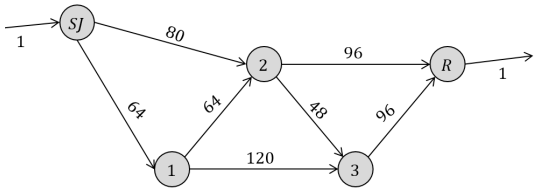
$$\bar{c}_{SJ,2} = 10 - (0) + (-16) = -6 \leq 0 \ \ (u)$$
$$\bar{c}_{13} = 15 - (-8) + (-22) = 1 \geq 0 \ \ (l)$$
$$\bar{c}_{3R} = 12 - (-22) + (-28) = 6 \geq 0 \ \ (l)$$

  Como todos los costos reducidos de las variables no básicas cumplen con su criterio de optimalidad (costos reducidos no negativos para variables en su cota inferior y no positivos para las variables en su cota superior), la solución es óptima. Todos los miembros del equipo se van juntos utilizando la ruta $SJ - 2 - R$, y el valor óptimo de la solución corresponde a 176.

ii) Para reformular el problema anterior como un problema de ruta más corta, se tiene que adecuar la información entregada de costos, de manera de poder tomar la decisión binaria de qué tramos de la red estarán incluidos n la ruta más corta. Para ello, simplemente se calcula el costo de llevar a los 8 intergrantes por cada tramo, y entonces, la información de costos para esta parte queda como sigue:

Arco	Costo nuevo = Número de personas · Costo de cada arco
$SJ-1$	$8 \cdot 8 = 64$
$SJ-2$	$8 \cdot 10 = 80$
$1-2$	$8 \cdot 8 = 64$
$1-3$	$8 \cdot 15 = 120$
$2-3$	$8 \cdot 6 = 48$
$2-R$	$8 \cdot 12 = 96$
$3-R$	$8 \cdot 12 = 96$

Con esta inforamción, el problema de ruta más corta a resolve se muestra en el siguiente grafo:



Ahora resolvemos por Dijkstra.

◇ Iteración 1.
Se escoge el nodo origen SJ para actualizar la información de los nodos a los que se pueden llegar.
Se construye la siguiente tabla que contiene la información del costo de llegar al nodo i (d_i), y de dónde se visita el nodo (p_i).

Nodo	d_i	p_i
SJ	0	SJ
1	64	SJ
2	80	SJ
3	∞	$-$
R	∞	$-$

Así, se luego se cierra el nodo de origen SJ, y se ingresa a la lista de nodos visitados.
El conjunto de nodos visitados es $V = \{SJ\}$.
El conjunto de nodos por visitar es $\bar{V} = \{1, 2, 3, R\}$.

◇ Iteración 2.
Se escoge el nodo de $\bar{V}$ que tenga menor d_i, que en este caso es 1.
Se actualiza la información de la tabla que tiene la información del costo de llegar al nodo i (d_i), y de dónde se visita el nodo (p_i).

Nodo	d_i	p_i
SJ	0	SJ
1	64	SJ
2	80	SJ
3	184	1
R	∞	$-$

Así, se luego se cierra el nodo 1, y se ingresa a la lista de nodos visitados.
El conjunto de nodos visitados es $V = \{SJ, 1\}$.
El conjunto de nodos por visitar es $\bar{V} = \{2, 3, R\}$.

◇ Iteración 3.
Se escoge el nodo de $\bar{V}$ que tenga menor d_i, que en este caso es 2.
Se actualiza la información de la tabla que tiene la información del costo de llegar al nodo i (d_i), y de dónde se visita el nodo (p_i).

Nodo	d_i	p_i
SJ	0	SJ
1	64	SJ
2	80	SJ
3	128	2
R	176	2

Así, se luego se cierra el nodo 2, y se ingresa a la lista de nodos visitados.
El conjunto de nodos visitados es $V = \{SJ, 1, 2\}$.
El conjunto de nodos por visitar es $\bar{V} = \{3, R\}$.

- ◇ Iteración 4.
  Se escoge el nodo de $\bar{V}$ que tenga menor d_i, que en este caso es 3.
  Se actualiza la información de la tabla que tiene la información del costo de llegar al nodo i (d_i), y de dónde se visita el nodo (p_i).

Nodo	d_i	p_i
SJ	0	SJ
1	64	SJ
2	80	SJ
3	128	2
R	176	2

Así, se luego se cierra el nodo 3, y se ingresa a la lista de nodos visitados.
El conjunto de nodos visitados es $V = \{SJ, 1, 2, 3\}$.
El conjunto de nodos por visitar es $\bar{V} = \{R\}$.

- ◇ Iteración 5.
  Se escoge el nodo de $\bar{V}$ que tenga menor d_i, que en este caso es R.
  En este caso, como es el nodo destino, y no va a ningún otro nodo, la tabla de información no cambia.
  Así, se luego se cierra el nodo R, y se ingresa a la lista de nodos visitados.
  El conjunto de nodos visitados es $V = \{SJ, 1, 2, 3, R\}$.
  El conjunto de nodos por visitar es $\bar{V} = \emptyset$.
  Como el nodo destino a ingresado a V, el algoritmo termina.

La ruta encontrada es $SJ-2-R$, por lo que los ayudantes se van juntos con los profesores siguiente esa ruta, que tiene un costo de 176.

iii) Primero, es posible transformar el problema anterior en un problema de ruta más corta solo porque las cotas inferiores son todas iguales a 0, y las cotas superiores son todas mayores o iguales al flujo que se requiere pasar por la red.

b) i) Al ser un problema no lineal irrestricto de minimización, el argumento necesario para mostrar que tiene solución óptima es que la función objetivo sea convexa. Se puede argumentar que es fácil ver que, debido a los términos cuadráticos que tienen coeficientes positivos, la función tiende a $+\infty$ cuando $\|(x, y)\| \to +\infty$. Como f es continua, se concluye que tiene un valor mínimo. Por otro lado la función es estrictamente convexa ya que el Hessiano es:

$$H_f(x, y) = \nabla^2(f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que claramente es definido positivo. Luego, el problema de optimización planteado tiene un único mínimo global.

ii) Debemos resolver mín $f(x, y) = (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + 5$.

Antes de comenzar a iterar con el método del gradiente, calculamos $\nabla f(\vec{x})$:

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2(x - 3) \\ 2(y + 2) \end{pmatrix}$$

Ahora comenzamos a iterar

◇ Iteración 1:

- Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(4,0) = (2,4) \neq \vec{0} \Rightarrow$ Seguimos.
- Calculamos nuevo punto $\vec{x}_1$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2\lambda_0 \\ -4\lambda_0 \end{pmatrix}$$

Para calcular λ_0 minimizamos $h(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda>0} h(\lambda) &= \min_{\lambda} f(\vec{x}_0 - \lambda \nabla f(\vec{x}_0)) \\ &= \min_{\lambda} f\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \min_{\lambda} f(4-2\lambda, -4\lambda) \\ &= \min_{\lambda} (1-2\lambda)^2 + (-4\lambda+2)^2 + 5 \end{aligned}$$

$$\frac{dh(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{2}$$

(Es válido verificar que el punto crítico es óptimo para $h(\lambda)$ comprobando que $d^2h/d\lambda^2|_{1/2} > 0$)
Entonces:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

◇ Iteración 2:

- Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(3,2) = (0,0) = \vec{0} \Rightarrow$. Por lo tanto estamos en el óptimo, que sabemos que es único. Terminamos de iterar.

c) i) Esto es sólo observar que al acercarnos a la frontera, para al menos un i se tiene que $a_i^T x - b_i$ tiende a 0. El logaritmo de eso tiende, entonces, a $-\infty$ y esto hace que $f(x)$ tienda a ∞.

ii) En este caso tenemos que

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{n} \log(a_i^T x - b_i)$$

Derivando tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{a_i^T x - b_i} \right) a_{ij}$$

que se puede escribir, en forma compacta, como:

$$\nabla f(x) = -A^T D(x)^{-1} e_m$$

donde $D(x)$ es una matriz digonal, donde el elemento i de la diagonal es igual a $a_i^T x - b_i$, Aquí, e_m es el vector de m componentes, todas ellas iguales a 1.
Ahora, si se deriva una vez más, se llega fácilmente a que el Hessiano es igual a:

$$\nabla^2 f(x) = A^T D(x)^{-2} A$$

iii) Para esto basta darse cuenta que la matriz Hessiana, $A^T D(x)^{-2} A$ es definida positiva en cualquier x del dominio. En efecto, como los puntos del dominio definen que $a_i^T x - b_i > 0$, entonces $D(x)$ tiene diagonal positiva. Luego, si $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$, tenemos:

$$u^T [\nabla^2 f(x)] u = u^T A^T D(x)^{-2} A u = v^T D(x)^{-2} v$$

donde $v = Au$. Como A tiene rango completo, si $u \neq 0$, entonces $v \neq 0$ y se tiene que

$$u^T [\nabla^2 f(x)] u > 0, u \neq 0.$$

iv) Esta es simplemente

$$d = -[\nabla^2 f(x)]^{-1} \nabla f(x) = [A^T D(x)^{-2} A]^{-1} A^T D(x)^{-1} e_m.$$

v) Efectivamente, una vez calculada la dirección de descenso d, se debe resolver el problema de minimización unidireccional,

$$\min_{t \geq 0} f(x + td)$$

Si el punto x se acerca a la frontera del dominio desde el interior, entonces los valores de f crecen hacia ∞. Luego, el valor t que optimiza el problema de búsqueda siempre dará puntos estrictamente en el interior del dominio.

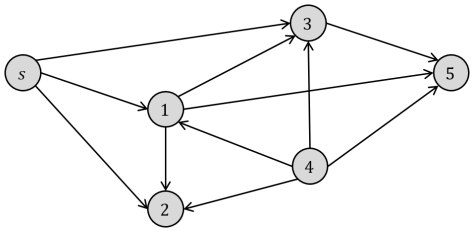
d) Para un grafo general de n nodos, la cantidad de cortes posibles es de a lo más 2^{n-2} cortes. Por lo tanto, en este caso hay a lo más $2^4 = 16$ cortes posibles en la red. Sin embargo, hay que notar que no todas esas 16 maneras de generar conjuntos $S - \bar{S}$ son cortes válidos (es necesario que los dos subgrafos generados sean conexos). A continuación se presentan los cortes válidos:

Nodos en S	Nodos en $\bar{S}$	Valor del corte
1,2,3,4,5	6	25
1,2,3,4	5,6	23
1,3,4,5	2,6	30
1,2,3	4,5,6	21
1,3,4	2,5,6	28
1,4,5	2,3,6	39
1,2	3,4,5,6	29
1,3	2,4,5,6	26
1,4	2,3,5,6	37
1,5	2,3,4,6	33
1	2,3,4,5,6	27

El corte mínimo vale 21, y corresponde al corte definido por $S = \{1, 2, 3\}$ y $\bar{S} = \{4, 5, 6\}$.

Problema 3. (11 puntos)

La siguiente red indica el flujo de comercio desde una ciudad productora de maíz (s) a un grupo de civilizaciones (1,2,3,4,5). En ella, la dirección de los arcos indica el sentido único del flujo de productos. Suponga que las rutas indicadas entre las ciudades son capaces de soportar todo el maíz que demandan cada una de las civilizaciones.



Usted es una civilización desarrollada (no presentada en la red) que se encuentra en guerra con la civilización 5, y uno de sus planes de acción para derrotarla es aislándola del comercio de maíz, porque así no podrá hacer intercambio de sus productos, fundamental para el avance.

a) (2 puntos) Formule matemáticamente el problema de encontrar el menor número de arcos que deben romperse para desconectar a la civilización 5.

b) (2 puntos) Determine el dual de este problema y e interprete qué busca determinar este problema.

c) (2 puntos) Formule el problema completo como grafo, ayudándose de la interpretación determinada en b) para reconocer qué tipo de problema debe modelar.

d) (3 puntos) Resuelva el problema modelado en (c) utilizando el algoritmo visto en clases apropiado para ello. Sea completo en realizar sus iteraciones y mencione qué arcos deben cortarse para aislar a la civilización 5.

e) (2 puntos) ¿Cambia su respuesta si la civilización 5 logra un intercambio nuevo con la civilización 2? Esto corresponde a indicar una ruta de comercio que va de 2 a 5. En caso de cambiar, utilice su última iteración de d) para continuar y encontrar la nueva cantidad menor de arcos posibles. En caso de no cambiar, presente la última iteración de d) que presente la nueva información.

Solución Problema 3.

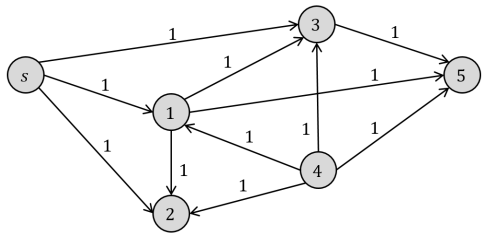
a) Dado que se pretende encontrar la manera de separar s con 5 de tal manera que el costo sea el mínimo, este problema se puede representar como un problema de corte mínimo, en que las capacidades son unitarias y las cotas mínimas son nulas. Esto nos permitiría encontrar cuáles son las rutas o caminos que hay que cortar para cortar el flujo hacia el nodo 5. Luego, el modelo matemático quedaría como un de corte mínimo:

$$\begin{array}{lrcll} \text{mín} & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} \psi_{ij} & & & \\ \text{s.a.} & \pi_i - \pi_j + \psi_{ij} - \phi_{ij} & = & 0 & \forall i,j \in N : (i,j) \in A \\ & \pi_s - \pi_r & = & 1 & \forall (i,j) \in A \\ & \psi_{ij}, \phi_{ij} & \geq & 0 & \forall (i,j) \in A \end{array}$$

b) Como es sabido, el problema dual del problema de corte mínimo, es el de flujo máximo del problema. Encontrar el flujo máximo a través de la red, considerando capacidades unitarias, nos indicaría la cantidad de arcos que son necesarios cortar para incomunicar a la civilización 5. El modelo se trabaja como uno de flujo máximo, en que F es el flujo que se envía desde el nodo s:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & F \\ \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(k,i)\in A} x_{ki} = \begin{cases} F & i = s \\ 0 & i \neq s, 5 \\ -F & i = 5 \end{cases} \\ & 0 \leq x_{ij} \leq 1, \forall (i,j) \in A \end{array}$$

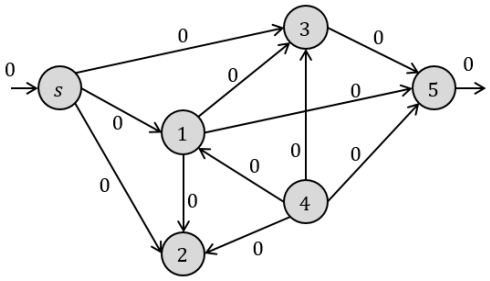
c) Asignamos a cada arco una capacidad equivalente a una unidad de flujo (y cota mínima nula). Luego, el grafo considerando capacidades queda:

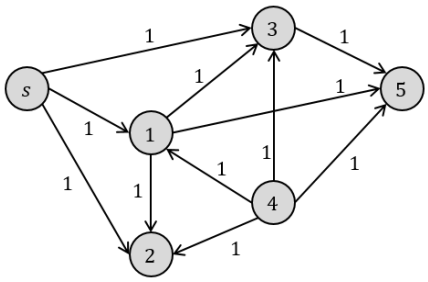


Encontrar el flujo máximo entre la civilización productora de maíz (s) y la civilización 5 nos entregaría el valor del corte mínimo entre este par de nodos. Además, al imponer capacidad unitaria a todos los arcos, el valor del corte mínimo corresponderá al número de arcos de ese corte. Entonces, tendremos el menor número de arcos para desconectar a la civilización 5 del productor s.

Esta formulación resuelve el problema solicitado porque si se cortan esos arcos, entonces cortamos todos los caminos desde el productor de maíz s a la civilización 5 a menor costo (en términos del número de arcos cortados).

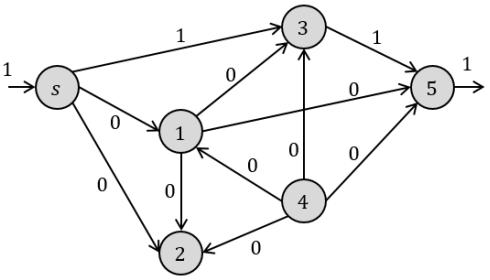
d) Iteración 1: La solución factible inicial del flujo es tal que $f_{ij} = 0 \forall (i,j) \in A$, y se muestra en la figura a continuación de la izquierda. Con esto, se construye la red residual que se muestra a su derecha.

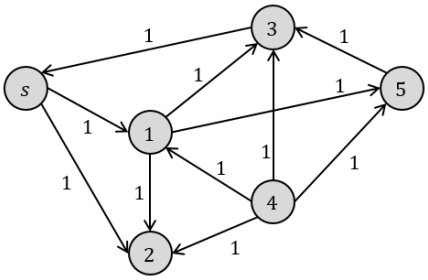




Como se aprecia en la red residual, existe más de un camino entre el nodo s y el nodo 5. Luego, la solución actual no es la óptima. Se escoge entonces una ruta incremental: arbitrariamente escogemos $s-3-5$ que tiene capacidad de 1.

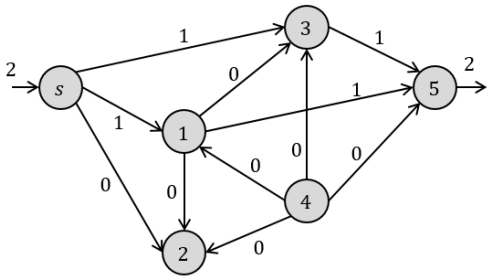
Iteración 2: La solución factible se muestra en la figura a continuación de la izquierda. Con esto, se construye la red residual que se muestra a su derecha.

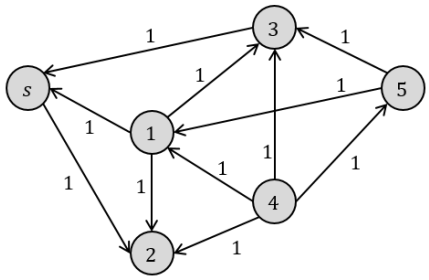




Como se aprecia en la red residual, existe más de un camino entre el nodo s y el nodo 5. Luego, la solución actual no es la óptima. Se escoge una ruta incremental: arbitrariamente escogemos $s-1-5$ que tiene capacidad de 1.

Iteración 3: La solución factible se muestra en la figura a continuación de la izquierda. Con esto, se construye la red residual que se muestra a su derecha.



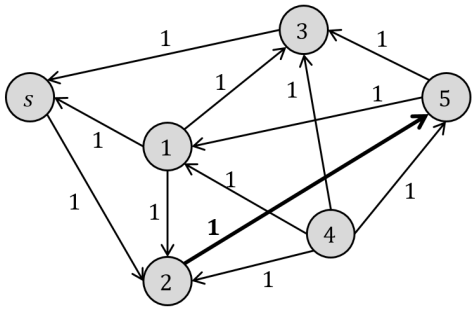


Como se aprecia en la red residual, no existe un camino entre el nodo s y el nodo 5. Luego, la solución actual es óptima.

Se puede apreciar que el corte que separa el nodo s del nodo 5 es $S = \{s, 2\}$. Los arcos que van de S a $\bar{S}$ son $(s,1)$ y $(s,3)$ y la suma de sus capacidades es 2. Luego, basta con cortar esos dos arcos para asegurar que no llegará flujo desde s a 5.

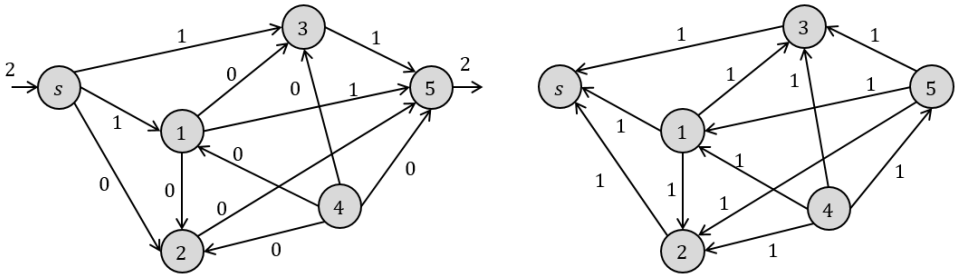
Es importante destacar que en este problema existe otro corte que separa al nodo s del nodo 5. Este corte es tal que $S = \{s, 1, 2, 3\}$ de manera que los arcos que van de S a $\bar{S}$ son (1,5) y (3,5) y la suma de sus capacidades es 2.

e) Para considerar este cambio, basta con agregar el nuevo arco con una capacidad de 1 en la red residual de la última iteración, como se muestra en la siguiente figura.



De esta red residual, se puede apreciar que existe un camino entre el nodo s y el nodo 5. Luego, la solución actual no es la óptima. Se escoge la ruta disponible $s-2-5$ para aumentar la capacidad en 1 unidad.

Iteración 4: La solución factible se muestra en la figura a continuación de la izquierda. Con esto, se construye la red residual que se muestra a su derecha.



Como se aprecia en la red residual, no existe un camino entre el nodo s y el nodo 5. Luego, la solución actual es óptima.

Se puede apreciar que el corte que separa el nodo s del nodo 5 es $S = \{s\}$. Los arcos que van de S a $\bar{S}$ son $(s,1),(s,2)$ y $(s,3)$ y la suma de sus capacidades es 3. Luego, basta con cortar esos dos arcos para asegurar que no llegará flujo desde s a 5.

Problema 4. (13 puntos)

a) (3 puntos) Considere una red definida por el grafo $G(N,A)$ con un origen s y un destino t. Se desea encontrar k rutas desde s a t de forma que no compartan nodos (salvo los extremos), y tales que la suma de los costos de las k rutas sea mínimo. Formule en forma de grafo, y de manera genérica, este problema como un problema de flujo a costo mínimo.

b) (10 puntos) Una vez en el local *OptiPizza*, los integrantes del curso se enteraron que la gerencia del local estaba replanteando la política de turnos del delivery. Uno de los profesores, decide ayudarlos indicándoles que conoce un amigo experto en modelación de problemas matemáticos: nuestro amigo Enrique. Él, siempre dispuesto a ofrecer su tiempo libre a quien necesita ayuda, escucha atento la descripción del problema que le da el profesor:

«En *OptiPizza* hay M trabajadores dedicados a repartir el producto. Inicialmente, la reglamentación horaria estipulaba trabajar 16 hrs. ininterrumpidas a todos sus empleados. Sin embargo, por normativas superiores se debe organizar un sistema de turnos que satisfaga un porcentaje de la demanda.

»Para tales efectos, la demanda por hora es conocida y está dada por D_i [Unidades/hora], $i = 1,\ldots,16$ y en esta nueva etapa se propone satisfacer un porcentaje $p \in (0,1]$ de ella. Además, cada empleado satisface sólo un pedido por hora y no puede trabajar más de 8 horas diarias.»

i) (6 puntos) Enrique les solicita ayuda para modelar el problema. Para ello, plantee un modelo de optimización lineal entero que permita encontrar la cantidad mínima de turnos y la distribución de empleados por turno que satisfaga la restricción de demanda.

ii) (4 puntos) Dados los malos resultados de la política anterior, se decide imponer que el 20 % de sus empleados trabaje horas extra (10 horas en lugar de 8). Formule el modelo para considerar este caso.

Solución Problema 4.

a) Sea $G(N, A)$ el grafo original, y a partir de este se construye el grafo $G'(N', A')$ de la siguiente manera.

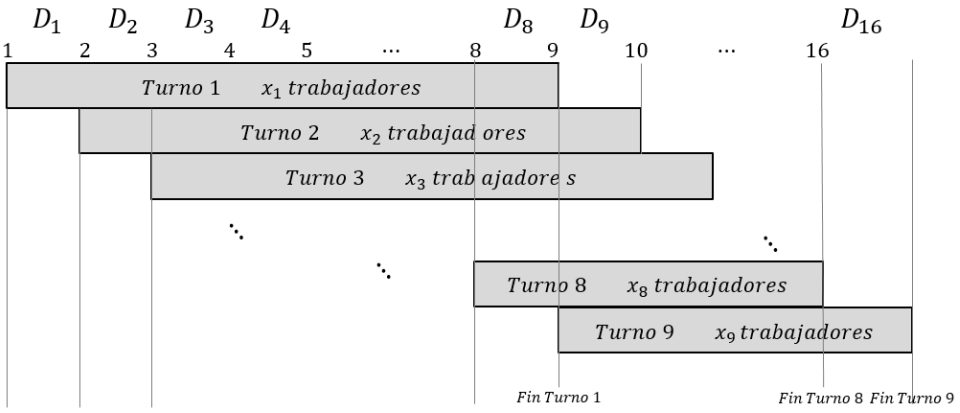
- ◇ Para cada nodo $i \in N \setminus \{s, t\}$ se crean dos nodos, los nodos i^+ e i^- y el arco (i^+, i^-) de capacidad 1 y costo 0.
- ◇ Si existe el arco $(i, j) \in A, i \neq s, j \neq t$ se crea el arco $(i^-, j^+) \in A'$
- ◇ Para cada arco $(s, i) \in A$ se agrega el arco $(s, i^+) \in A'$, y para cada arco $(i, t) \in A$ se agrega el arco $(i^-, t) \in A'$ de capacidades y costos idénticos a los originales.
- ◇ Todos los nodos tienen demanda 0 excepto el nodo s que ofrece k unidades y el nodo t que demanda k unidades.

b) i) El modelo solicitado se presenta a continuación:

Variables

x_i: Número de empleados que entran en la hora i, con $i = 1, \ldots, 9$

y_i: variable binaria que vale 1 si hay un turno en la hora i, y 0 si no.



Función objetivo La empresa pretende minimizar la cantidad de turnos

$$\text{mín} \sum_{j=1}^{9} y_j$$

Restricciones

R1) Relación entre variables: Si no hay turno, no hay empleados.

$$x_i \leq M \cdot y_i \qquad \forall i = 1, \ldots, 16$$

R2) Cantidad total de empleados que pueden haber por hora.

$$\sum_{i=1}^{9} x_i \leq M$$

R3) Restricciones de satisfacción de la demanda.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\text{Hora 1} & x_1 & & & & & & & & \geq p \cdot D_1 \\
\text{Hora 2} & x_1 & +x_2 & & & & & & & \geq p \cdot D_2 \\
\text{Hora 3} & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & & & \geq p \cdot D_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\
\text{Hora 8} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & +x_8 & \geq p \cdot D_8 \\
\text{Hora 9} & & x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & +x_8 & +x_9 & \geq p \cdot D_9 \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
\text{Hora 15} & & & & & & & & x_8 & +x_9 & \geq p \cdot D_1 5 \\
\text{Hora 16} & & & & & & & & & x_9 & \geq p \cdot D_1 6
\end{array}
$$

R4) Naturaleza de las variables

$x_i \in \mathbb{Z}^+$, para $i = 1, \ldots, 16$.

$y_i \in \{0, 1\}$, para $i = 1, \ldots, 16$.

ii) Las modificaciones se presentan a continuación:

Variables adicionales

x_i^+: Número de empleados que entran en la hora i (turno i) y que trabajan 10 horas.

Restricciones

R5) Porcentaje de trabajo.

$$\sum_{i=1}^{16} x_i^+ = 0,2 \left(\sum_{i=1}^{16} x_i + x_i^+ \right)$$

R1') Relación entre variables.

$$x_i + x_i^+ \leq M \cdot y_i \qquad i = 1, \ldots, 9$$

R6) No permitir trabajar fuera del horario de trabajo. Como el local cierra a la hora 16, entonces no pueden haber horas extras en esos turnos.

$$x_8^+ = x_9^+ = 0$$

R3') Se debe cumplir la demanda. Esto es análogo al punto (i)

$$\sum_{j=\text{máx}\{1,i-7\}}^{\text{mín}\{i,9\}} x_j + \sum_{j=\text{máx}\{1,i-9\}}^{\text{mín}\{i,7\}} x_j^+ \geq P \cdot D_i \qquad \forall i = 1, \ldots, 16$$

R4') Naturaleza de las variables adicionales

$x_i^+ \in \mathbb{Z}^+$, para $i = 1, \ldots, 16$.

R2') Total de empleados

$$\sum_{i=1}^{9} x_i + x_i^+ \leq M$$