PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2013
Profesores: P.Álvarez - P.Carrillo - A.Cataldo
R.Giesen - A.Lüer - J.Vera

Pauta Interrogación 2

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Se debe contestar en cuadernillos independientes cada pregunta. En cada cuadernillo debe colocar su nombre y número de lista asignado. ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (12 puntos)

(a) (4 puntos) Indique si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, y justifique con claridad su respuesta. Sus argumentos deben basarse en los conceptos del curso.

(I) Considere el problema lineal

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ s.a. & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

donde c es un vector no nulo. Suponga que existe un vector $x_0 > 0$, tal que $Ax_0 < b$. Entonces, ese vector x_0 es candidato a solución óptima del problema.

Respuesta:
Falso. Del enunciado se desprende que x_0 es un punto factible, ubicado al interior del poliedro. Ya que el objetivo es lineal, uno puede moverse a partir de este punto en la dirección en que el objetivo decrece (esto se respalda por el hecho de que c es un vector no nulo), sin salirse del poliedro. Como existe la posibilidad de mejora en el objetivo a partir del punto actual, éste no es óptimo.

(II) Un punto extremo del sistema $Ax = b$, $x \geq 0$ es equivalente a una solución básica factible de dicho sistema y viceversa.

Respuesta:
Verdadero. Bastaba argumentar diciendo que era un resultado básico del curso. Éste se basa en un teorema que entrega una triple equivalencia, para un poliedro P y un punto $x \in P$:

1) x es una solución básica factible.
2) x es un vértice de P.
3) x es un punto extremo de P.

La demostración es como sigue, partiendo de un poliedro con restricciones de $\geq$.

Vértice $\Rightarrow$ Punto extremo

Sea v un vértice, entonces, una cierta función objetivo $c^T x$ se minimiza en v. Supongamos que v no es un punto extremo. Entonces, $v = \lambda y + (1-\lambda)\, z$, con $0 \leq \lambda \leq 1$ y $y, z \in P$. Entonces se tiene que el objetivo se puede escribir como: $c^T v = c^T \left[\lambda y + (1-\lambda)\, z\right] = \lambda c^T y + (1-\lambda)\, c^T z$.

Es decir, $c^T y \leq c^T v \leq c^T z$. Como v es un mínimo, se tiene que $c^T v \leq c^T y$ y $c^T v \leq c^T z$. Esto lleva a que $c^T y = c^T v = c^T z$, esto es una contradicción, al suponer que v no es un punto extremo.

Punto extremo ⇒ Solución básica factible

Sea x un punto extremo, que por definición es factible. Supongamos que x no es una solución básica. Sea F el conjunto de las filas de la matriz A para las cuales las restricciones se cumplen en igualdad. Como x no es una solución básica, F no expande todo el espacio, es decir, habría un vector no nulo $d \neq 0$ tal que $a_{i.}d = 0$, $\forall i \in F$.

Sean dos vecinos de x, $y = x + \epsilon d$ y $z = x - \epsilon d$. Si una fila i pertenece a F, entonces se cumple $a_{i.}y = a_{i.}z = b_i$. Para una fila $i \notin F$, se puede asegurar que, evitando salirse del poliedro, $a_{i.}y \geq b_i$ y $a_{i.}z \geq b_i$, es decir y e z factibles. Como $x = \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$, no puede ser un punto extremo, porque por definición un punto extremo no puede escribirse como combinación lineal convexa de dos puntos, una contradicción.

Solución básica factible ⇒ Vértice

Sea x una solución básica y $F = \{i : a_{i.}x = b_i\}$. Sea el objetivo de minimizar $\tilde{c}y$, con $\tilde{c} = \sum_{i \in F} a_{i.}$. Así, se tiene que $\tilde{c}x = \sum_{i \in F} a_{i.}x = \sum_{i \in F} b_i$.

Para todo $x' \in P$, $\tilde{c}x' = \sum_{i \in F} a_{i.}x' \geq \sum_{i \in F} b_i$ con igualdad sólo si $a_{i.}x' = b_i, \forall i \in F$. Esto implica que $x' = x$, y que x minimiza en forma única el objetivo $\tilde{c}y$.

(III) Al realizar el test del mínimo cuociente en el algoritmo Simplex, se garantiza que la variable que sale de la base es la correcta.

Respuesta:
Verdadero. El test del mínimo cuociente busca determinar la primera variable que llega a 0 (sale de la base), cuando una variable no básica, es decir, que estaba en 0, sube en su valor (entra a la base). De no elegirse la variable mediante este criterio, la nueva base obtenida será infactible.

(IV) Si el valor óptimo de una variable dual es 0, entonces la restricción primal asociada se encuentra inactiva.

Respuesta:
Falso. Si el valor óptimo de una variable dual es 0, por el Teorema de Holguras Complementarias no tenemos más información. La restricción primal puede estar activa o inactiva.

(b) (3 puntos) Resuelva el siguiente problema, o algún otro equivalente, en forma gráfica:

$$\begin{array}{rrcrcrl} \max & 3x & + & 3y & + & 21z & \\ \text{s.a.} & 6x & + & 9y & + & 25z & \leq 15 \\ & 3x & + & 2y & + & 25z & \leq 20 \\ & x & , & y & , & z & \geq 0 \end{array}$$

Respuesta:
Para resolverlo de forma gráfica, conviene trabajar con el problema dual, que es.

$$\begin{array}{rrcrl} \min & 15w_1 & + & 20w_2 & \\ \text{s.a.} & 6w_1 & + & 3w_2 & \geq 3 \\ & 9w_1 & + & 2w_2 & \geq 3 \\ & 25w_1 & + & 25w_2 & \geq 21 \end{array}$$

Cuyo dominio, en el plano (w_1, w_2) es,

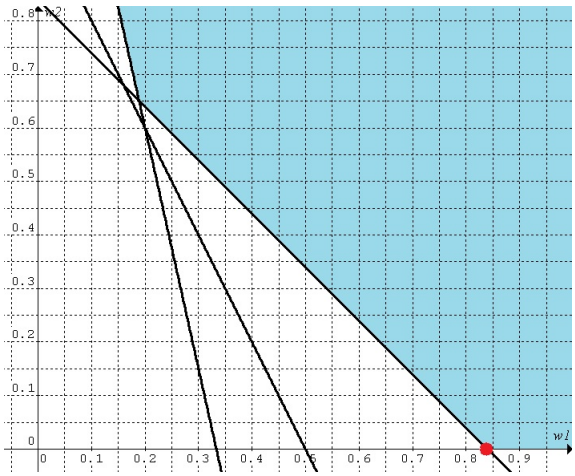


Figura 1: Figura del dominio del problema dual de la pregunta 1b.

La solución óptima es $(w_1^*, w_2^*) = (21/25, 0)$, con valor óptimo $63/5$.

La solución óptima del problema original puede obtenerse mediante el Teorema de Holguras Complementarias. El sistema resultante es,

$$\begin{aligned} x\,(6w_1 + 3w_2 - 3) &= 0 \\ y\,(9w_1 + 2w_2 - 3) &= 0 \\ z\,(25w_1 + 25w_2 - 21) &= 0 \\ w_1\,(15 - 6x - 9y - 25z) &= 0 \\ w_2\,(20 - 3x - 2y - 25z) &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando y detectando las expresiones relevantes, lleva al siguiente sistema.

$$\begin{aligned} 6x + 9y + 25z &= 15 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Lo que lleva a la solución $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 3/5)$, con valor óptimo $63/5$.

(c) (2 puntos) Considere el siguiente problema de la mochila binario.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrl} \max & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 8x_5 & + & 6x_6 & \\ \text{s.a.} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 3x_5 & + & x_6 & \leq 5 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \in \{0,1\} \end{array}$$

La solución óptima de su correspondiente relajación lineal es $\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1\right)$. Encuentre una restricción de corte o "cover", que corte a la solución fraccionaria anterior. *(Nota: NO se pide que encuentre la solución óptima del problema entero).*

Respuesta:
Un cover es un subconjunto de los índices de las variables, donde si éstas toman el valor 1 en una restricción de mochila binaria, la solución sería infactible.

Uno de ellos es $C = \{1, 5, 6\}$, cuya restricción o corte de cover asociada(o) es $x_1 + x_5 + x_6 \leq 2$. Al reemplazar los valores de la solución fraccionaria se obtiene $\frac{1}{2} + 1 + 1 > 2$, por lo que este cover corta la solución fraccionaria anterior. Otros ejemplos son $C' = \{1, 5\}$ y $C'' = \{1, 6\}$.

(d) (3 puntos) Considere el siguiente problema de Programación Lineal Entera:

$$\begin{array}{lrcrll} \min & 5x_1 & + & 4x_2 & & \\ \text{s.a.} & 3x_1 & + & 7x_2 & \geq 20 & \\ & 4x_1 & + & 9x_2 & \geq 19 & \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 & \text{enteras.} \end{array}$$

Se ha resuelto la relajación lineal de ese problema y se ha llegado al siguiente Tableau óptimo:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
x_2	$3/7$	1	$-1/7$	0	$20/7$
x_4	$-1/7$	0	$-9/7$	1	$47/7$
$-z$	$23/7$	0	$4/7$	0	$-80/7$

Determine los cortes de Gomory que puedan obtenerse de ahí, y expréselos en términos de las variables originales del problema.

Respuesta:
Ya que ambas filas tienen lados derechos fraccionarios, pueden obtenerse cortes de Gomory directamente. Éstos son,

$$\begin{array}{rcl} \left(\frac{3}{7} - 0\right) x_1 + \left(-\frac{1}{7} - (-1)\right) x_3 & \geq & \frac{20}{7} - 2 \\ \left(-\frac{1}{7} - (-1)\right) x_1 + \left(-\frac{9}{7} - (-2)\right) x_3 & \geq & \frac{47}{7} - 6 \end{array}$$

Tras realizar las operaciones y simplificar resultan,

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 & \geq & 2 \\ 6x_1 + 5x_3 & \geq & 5 \end{array}$$

Ya que x_3 y x_4 son variables de exceso, se sabe que,

$$\begin{array}{rcccrcl} 3x_1 + 7x_2 - x_3 & = & 20 & \Leftrightarrow & x_3 & = & 3x_1 + 7x_2 - 20 \\ 4x_1 + 9x_2 - x_4 & = & 19 & \Leftrightarrow & x_4 & = & 4x_1 + 9x_2 - 19 \end{array}$$

Reemplazando en los cortes obtenidos, resultan,

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & \geq & 6 \\ 3x_1 + 5x_2 & \geq & 15 \end{array}$$

Que se encuentran escritos en las variables originales.

Pregunta 2 (12 puntos)

(a) (2 puntos) Justifique claramente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(I) Si la relajación lineal de un problema entero admite solución óptima, entonces el problema entero también admite solución óptima.

Respuesta:
Falso. Un contraejemplo,

$$\begin{array}{ll} \max & x \\ \text{s.a.} & 0{,}1 \leq x \leq 0{,}9 \\ & x \text{ entera} \end{array}$$

Evidentemente su relajación lineal tiene solución óptima única: $x^* = 0{,}9$ con $z^* = 0{,}9$, pero por otra parte el problema entero es infactible, ya que no existen puntos enteros x que satisfagan $0{,}1 \leq x \leq 0{,}9$.

(II) Toda fila del Tableau óptimo de la relajación lineal de un problema entero puede utilizarse para generar un corte de Gomory.

Respuesta:
Falso, ya que las filas deben tener lado derecho fraccionario. Si no fuera así, el corte tendría la forma,

$$\sum_{i \in \mathcal{R}} a_i x_i \geq 0$$

Por construcción, los coeficientes de las variables en los cortes de Gomory son no-negativas, por lo que la desigualdad generada no sirve, ya que no corta a ninguna solución fraccionaria. De hecho, es redundante en la forma estándar.

(b) (4 puntos) Cuando se usa el algoritmo de Ramificación y Acotamiento, o un algoritmo de Planos Cortantes para resolver un problema de Programación Entera, hay que preocuparse de resolver eficientemente un problema que se obtiene a partir de otro agregando una restricción adicional. Más específicamente, supongamos que alguna relajación lineal del problema entero original es:

$$P_0) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ & Ax = b, x \geq 0 \end{array}$$

y que x^* es solución óptima de P_0). Supongamos que se crea otro problema que tiene la forma

$$P_1) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ & Ax = b, x \geq 0 \\ & d^T x \geq \beta \end{array}$$

donde $d^T x \geq \beta$ es la restricción agregada y el vector d y el escalar β se seleccionaron de modo tal que $d^T x^* < \beta$ (este es, por ejemplo, el caso de un plano cortante como un Corte de Gomory o un problema que se obtiene por ramificación).

Muestre que si y^* es una solución dual óptima de P_0), entonces a partir de ella se puede construir una solución dual factible (aunque no necesariamente óptima) para P_1). Esto significa que, después de agregar la restricción adicional, el problema dual sigue siendo factible y se puede reoptimizar fácilmente a través de dual.

Respuesta:
El dual de P_0) es

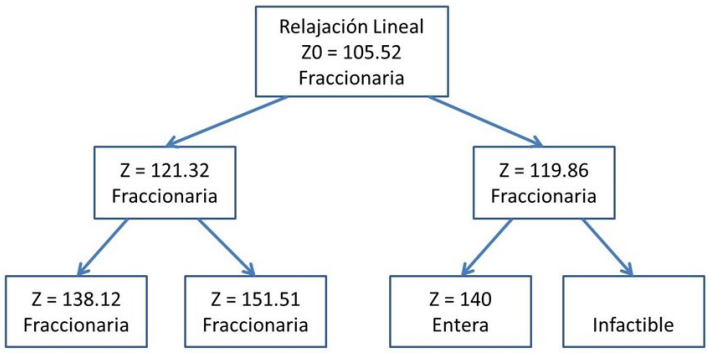
$$\begin{array}{ll} \text{máx} & b^T y \\ s.a. & A^T y \leq c \end{array}$$

Si y^* es solución óptima de este problema, entonces $A^T y^* \leq c$. El dual del problema con la restricción agregada es:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & b^T y + t\beta \\ s.a. & A^T y + td \leq c \\ & t \geq 0. \end{array}$$

Luego, basta tomar $\bar{t} = 0$ y tenemos que $A^T y^* + \bar{t} d = A^T y^* \leq c$. Luego $(y^*, 0)$ es solución factible del dual del nuevo problema. De hecho, es fácil ver que es solución básica factible.

(c) (3 puntos) Suponga que se intenta resolver un problema de Programación Lineal Entera de minimización mediante Branch & Bound y en estos momentos se tiene el siguiente árbol, en donde se indica el valor óptimo del problema del nodo y si acaso la correspondiente solución es fraccionaria o entera.[1].



(I) ¿Qué debería hacerse a continuación?

Respuesta:

Sea P_0 el problema de la relajación lineal, P_1 y P_2 sus hijos izquierdo y derecho, respectivamente. Denotemos los hijos de P_1 como P_3 y P_4, mientras que los de P_2 como P_5 y P_6.

Debe ramificarse en alguna de las coordenadas fraccionarias de P_3, P_4 debe podarse por cota (es peor que el incumbente, P_5).

Tanto P_5 como P_6 ya fueron cerrados, uno por ser factible entero, y el otro por ser infactible.

(II) Determine el mejor intervalo posible (mejor cota inferior y mejor cota superior) para el valor óptimo entero en base a la información que le entrega el árbol en su estado actual.

Respuesta:

El incumbente entrega la mejor cota superior en un problema de minimización, es decir $\overline{z} = 140$.

Los nodos con solución fraccionaria entregan la cota inferior. En este caso $\underline{z} = 138{,}12$. Es decir,

$$138{,}12 = \underline{z} \leq z^* \leq \overline{z} = 140$$

(d) (3 puntos) Sean $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c, p, q \in \mathbb{R}^n$, tal que $p \leq q$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Con esta información se ha construido el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.a:} & Ax = b \\ & p \leq x \leq q \end{array}$$

Pruebe que el dual del problema planteado *siempre* posee una solución factible.

Respuesta:

[1] 'Fraccionaria': solución que posee al menos una coordenada no-entera para una variable. 'Entera': solución entera factible del problema original. Z: valor óptimo del subproblema del nodo respectivo.

El problema puede reescribirse como:

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x & \\ \text{s.a:} & Ax = b & (1) \\ & x \leq q & (2) \\ & x \geq p & (3) \\ & x \in \mathbb{R}^n & (4) \end{array}$$

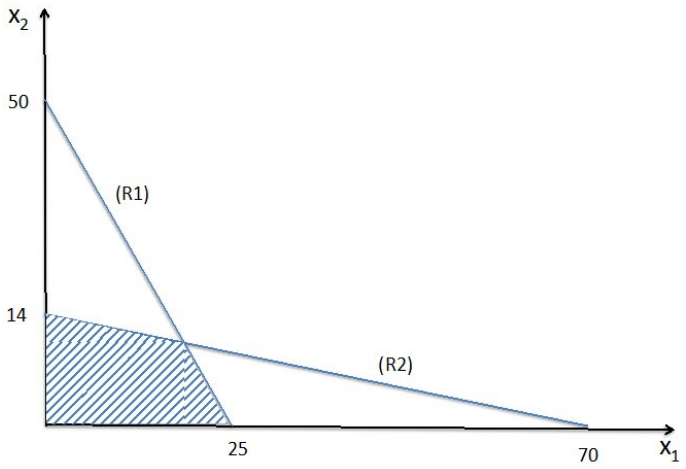
Se puede apreciar que el problema posee $m + n + n$ restricciones. Luego, el dual contará con esa cantidad de variables. Definamos $u \in \mathbb{R}^m$, asociadas a (1) y $v, w \in \mathbb{R}^n$, asociadas a (2) y (3). Con esto, el dual se escribe como:

$$\begin{array}{lll} \max & b^T u + q^T v + p^T w & \\ \text{s.a:} & A^T u + v + w = c & (D1) \\ & u \in \mathbb{R}^m & \\ & v \leq 0 & (3) \\ & w \geq 0 & (4) \end{array}$$

Luego, para que el dual sea siempre factible, se debe asegurar que (D1) se cumple siempre para cualquier $v \leq 0$ y $w \geq 0$ (no se considera relevante u pues es irrestricto). Luego, si hacemos $u_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m.$ y definamos $c_j = r_j - s_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$, con $r_j, s_j \geq 0$, basta con definir $w_j = r_j \geq 0$ $v_j = -s_j \leq 0$, para asegurar que se cumplen las $j = 1, \ldots, n$ restricciones, dado que $A^T u + v_j + w_j = 0 + r_j - s_j = c_j$.

Pregunta 3 (10 puntos)

Considere el problema de planificación de la producción de una empresa con dos productos: 1 y 2, y en donde x_1 y x_2 son las cantidades a producir de cada uno de ellos. En la figura, la región achurada muestra las combinaciones factibles de producción de esta empresa. Además usted sabe que existen dos vértices que son soluciones óptimas del problema, una donde sólo se produce el producto 1 y otra donde ambas restricciones, $(R1)$ y $(R2)$, son activas.



(a) (3 puntos) Construya el modelo de Programación Lineal que es consistente con los datos entregados. Construya además el dual asociado a este problema.

(b) (4 puntos) Usando el algoritmo de Simplex en forma estándar, resuelva el problema primal formulado en la parte (a). Para ello, utilice como punto de partida el vértice (0, 14).

(c) (3 puntos) Utilice el Teorema de Holguras Complementarias para demostrar que la solución óptima obtenida en (b) es efectivamente la solución óptima del problema.

Respuesta:

(a) El modelo es:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{máx} & 2x_1 & + & x_2 & & \\ s.a. & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 50 \\ & x_1 & + & 5x_2 & \leq & 70 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

cuyo dual es:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{mín} & 50y_1 & + & 70y_2 & & \\ s.a. & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 2 \\ & y_1 & + & 5y_2 & \geq & 1 \\ & y_1 & , & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(b) La forma estándar del primal queda:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \text{mín} & -2x_1 & - & x_2 & & & & & & \\ s.a. & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 50 \\ & x_1 & + & 5x_2 & & & + & x_4 & = & 70 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

El tableau inicial queda:

x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
2	1	1	0	50
1	5	0	1	70
−2	−1	0	0	0

x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
9/5	0	1	−1/5	36
1/5	1	0	1/5	14
−9/5	0	0	1/5	14

x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{b}$
1	0	5/9	−1/9	20
0	1	−1/9	2/9	10
0	0	1	0	50

que es la solución óptima del problema, cuyos valores óptimos son: $x^* = (20, 10, 0, 0)$ y $z^* = 50$.

(c) Por holguras complementarias, como ambas variables del primal son no nulas ambas restricciones del dual deben ser activas, por lo tanto, la solución del dual se puede obtener resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{rcrcl} 2y_1 & + & y_2 & = & 2 \\ y_1 & + & 5y_2 & = & 1 \end{array}$$

cuya solución es $y^* = (1, 0)$, que es dual factible y $w^* = 50$. Por lo tanto, por teoría de dualidad se demuestra que ambas soluciones son óptimas de sus respectivos problemas.

Pregunta 4 (10 puntos)

Considere el siguiente problema de Programación Lineal:

$$
P) \quad \begin{array}{lrcrcl} \text{máx} & x_1 & + & 2x_2 & & \\ s.a. & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & ax_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}
$$

donde a es un escalar.

(a) (2 puntos) Escriba el problema dual de P).

(b) (4 puntos) Usando las propiedades de dualidad, determine el rango de valores para a que hacen que el problema primal sea no acotado. Justifique con claridad todos sus argumentos.

(c) (4 puntos) Asuma ahora que $a = 1$. Determine la solución óptima del problema primal P) y, usando esa solución y las propiedades de dualidad, determine una solución óptima del problema dual. Justifique con claridad sus argumentos.

Respuesta:

(a) El problema dual es:

$$
D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & -y_1 + 2y_2 + 15y_3 \\ s.a. & -2y_1 - y_2 + ay_3 \geq 1 \\ & -y_1 + y_2 + 5y_3 \geq 2 \\ & (y_1, y_2, y_3) \geq 0 \end{array}
$$

(b) El problema primal es evidentemente factible ($x_1 = 0, x_2 = 1$ es factible). Luego, si logramos que el dual sea infactible, el primal tiene que ser no acotado. Mirando la primera restricción del dual, es evidente que si $a \leq 0$, no hay forma de cumplir la relación con valores de $y_i \geq 0$. Ahora bien, si $a > 0$, el problema dual is factible.

(c) Si $a = 1$, se puede hacer un gráfico y ver fácilmente que la solución se alcanza con $x_2 = 0, x_1 = 15$, haciendo la tercera restricción del primal activa. Como la primera y segunda restricción son inactivas, tenemos de inmediato que $y_1 = y_2 = 0$. Como $x_1 > 0$, la primera restricción del dual debe ser activa lo que lleva $y_3 = 1$, que también cumple la segunda restricción. Luego, la solución óptima del dual es $(0, 0, 1)$.

Pregunta 5 (16 puntos)

Un reconocido cantante ha terminado de escribir nuevas canciones para su próximo disco, y las ha listado en orden alfabético en el conjunto N. La duración de cada canción es conocida, y se encuentra registrada en el parámetro t_i, que indica la duración en minutos de la canción i, para todo $i \in N$.

El sello discográfico de este cantante, luego de escuchar el material, ha decidido agrupar las canciones en diferentes discos, teniendo como requisitos que: cada canción debe ser incluida en un sólo disco,

cada disco debe contener un mínimo de R canciones, y la duración de cada disco debe ser a lo más de T minutos. Considere que el nombre de los nuevos discos que se producirán con este nuevo material son conocidos y se encuentran listados en el conjunto D.

Para el diseño de los nuevos discos, se ha realizado un estudio del cual se ha concluido que la valoración que el mercado hará de cada disco –medida en probabilidad de compra– depende exclusivamente del orden en que las canciones son colocadas en cada disco. En consecuencia, se ha construido el parámetro B_{ij}, que indica la valoración que aporta a un disco el que la canción i esté justo antes que la canción j.

Con la información anterior, formule un modelo de programación lineal entera que permita diseñar los discos de manera que se maximice su valoración en el mercado.

Pauta

Variables

x_{ij}^d	variable binaria que vale 1 si la canción i está justo antes que la canción j en el disco d, y que toma valor 0 en cualquier otro caso.
y_i^d	variable binaria que vale 1 si la canción i es incluida en el disco d, y que toma valor 0 en cualquier otro caso.

Función Objetivo (2 puntos)

La función objetivo consiste en maximizar la valoración de mercado de los discos. Esto queda:

$$\text{máx} \sum_{j \in N} \sum_{i \in N: i \neq j} B_{ij} \left(\sum_{d \in D} x_{ij}^d \right)$$

Restricciones

1) Toda canción debe estar en un y sólo un disco. (1 punto)

$$\sum_{d \in D} y_i^d = 1 \qquad \forall\, i \in N.$$

2) Cada disco contiene al menos R canciones. (2 puntos)

$$\sum_{i \in N} y_i^d \geq R \qquad \forall\, d \in D.$$

3) Cada disco tiene una duración máxima de T minutos. (2 puntos)

$$\sum_{i \in N} t_i y_i^d \leq T \qquad \forall\, d \in D.$$

4) Primera relación entre las variables. (2 puntos)

$$\sum_{j \in N: j \neq i} x_{ij}^d + \sum_{j \in N: j \neq i} x_{ji}^d \geq y_i^d \qquad \forall\, i \in N; d \in D.$$

5) Segunda relación entre las variables. (1 punto)

$$\sum_{j \in N: j \neq i} x_{ij}^d + \sum_{j \in N: j \neq i} x_{ji}^d \leq 2y_i^d \qquad \forall\, i \in N; d \in D.$$

6) Se necesita construir el orden de las canciones en cada disco, y que este orden tenga sentido. Primera restricción. (2 puntos)

$$\sum_{d \in D} \sum_{j \in N: j \neq i} x_{ij}^d \leq 1 \qquad \forall\, i \in N.$$

7) Se necesita construir el orden de las canciones en cada disco, y que este orden tenga sentido. Segunda restricción. (1 punto)

$$\sum_{d \in D} \sum_{i \in N: i \neq j} x_{ij}^d \leq 1 \qquad \forall\, j \in N.$$

8) Se necesita construir el orden de las canciones en cada disco, y que este orden tenga sentido. Tercera restricción. (2 puntos)

$$\sum_{d \in D} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N: j \neq i} x_{ij}^d = Card(N) - Card(D)$$

9) Naturaleza de las variables. (1 punto)

$$x_{ij}^d \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in N; j \in N : i \neq j; d \in D.$$
$$y_i^d \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in N; d \in D.$$