PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2016
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado
F. Palomino - A. Cataldo - J. Vera

Solución Tarea 1

Fecha de Entrega: 20 de Abril.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día miércoles 20 de Abril a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (15 puntos)

a) (2 puntos) ¿Qué debe ocurrir en el algoritmo Simplex para que...

   i) (0,25 puntos) la solución óptima sea degenerada?

   ii) (0,25 puntos) el problema sea infactible?

   iii) (0,25 puntos) el problema tenga infinitas soluciones?

   iv) (0,25 puntos) el problema cuente con una solución no acotada?

   v) (1 punto) en una iteración desde una base i a una base $i+1$ se pueda volver (de forma natural) a la base de la iteración $i-1$?

b) (3 puntos) Sea C un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$. Sea también $f = (f_1, \ldots, f_m)$, en que $f_i : C \mapsto \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m$, son funciones convexas. Sea también $g : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ una función convexa y monotónicamente no-decreciente sobre un conjunto convexo que contiene el conjunto $\big\{f(x) \mid x \in C\big\}$, tal que para todo $u, \bar{u}$ en este conjunto se tiene que $g(u) \leq g(\bar{u})$ si $u \leq \bar{u}$.

   i) (2 puntos) Muestre que la función h definida como $h(x) = g\big(f(x)\big)$ es convexa sobre C.

   ii) (1 punto) Muestre que, si además $m = 1$, g es monotónicamente creciente y f es estrictamente convexa, entonces h es estrictamente convexa.

c) (5 puntos) Considere el ejercicio 2.6 (página 25) del libro de Vanderbei (2014)[3].

   i) (2 puntos) Sin resolverlo, indique qué ocurre en el óptimo del problema. Justifique.

   ii) (2 puntos) Grafique claramente la situación (última iteración de Simplex).

   iii) (1 punto) Verifique el incumplimiento del teorema de Bolzano-Weierstrass y del teorema de la hipótesis H.

d) (3 puntos) Muestre gráficamente que un punto interior del espacio de soluciones factibles no puede ser solución óptima de un problema de programación lineal en variables continuas si al menos uno de los coeficientes que acompañan a las variables en la función objetivo es distinto de 0. Asuma unicidad de la solución.

e) (2 puntos) Considere el problema que busca

$$\begin{array}{lcl} \text{máx} & y & \\ \text{s.a.} & \sin(x) - y & \leq 0 \\ & x + \pi y & \leq 1 \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

   i) (1 punto) Grafique el espacio de soluciones factibles.

   ii) (1 punto) Muestre que el problema anterior admite al menos una solución.

Solución Problema 1.

a) i) Algún $\bar{b}_i = 0$.

   ii) Algún $\bar{b}_i < 0$.

   iii) Algún $\bar{c}_i = 0$, lo que implica multiplicidad de soluciones.

   iv) El criterio de salida no puede contener ningún valor para ser comparado. Es decir, todos los $\bar{a}_{ij}$, con x_j la variable que entra a la base, son < 0.

   v) No es posible. Simplex siempre iterará en una dirección y si se movió de una base, es porque se acercó al óptimo. Al volver a una base recién visitada, Simplex estaría devolviéndose a una base, alejándose así del óptimo. Se puede demostrar que esto no es posible, pero con darse cuentano es necesario.

[3] Ver Referencias Bibliográficas en el programa del curso

b) i) Sea $x, y \in \mathbb{R}^n$ y sea $\alpha \in [0,1]$. Por la definición de h y de f, tenemos:

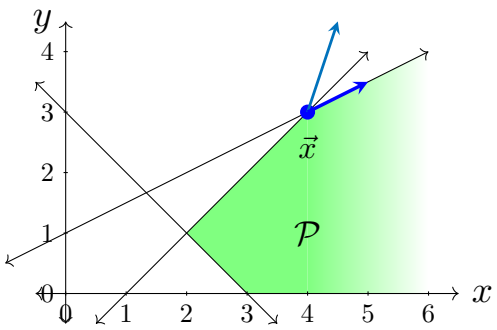
$$\begin{aligned}
h\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) &= g\Big(f\big(\alpha x + (a-\alpha)y\big)\Big) \\
&= g\Big(f_1\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big), \ldots, f_m\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big)\Big) \\
&\leq g\big(\alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_1(y), \ldots, \alpha f_m(x) + (1-\alpha) f_m(y)\big) \\
&= g\Big(\alpha\big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big) + (1-\alpha)\big(f_1(y), \ldots, f_m(y)\big)\Big) \\
&\leq \alpha g\big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big) + (1-\alpha) g\big(f_1(y), \ldots, f_m(y)\big) \\
&= \alpha g\big(f(x)\big) + (1-\alpha) g\big(f(y)\big) \\
&= \alpha h(x) + (1-\alpha) h(y)
\end{aligned}$$

en que la primera desigualdad proviene de la convexidad de cada f_i y la monotocidad de g, mientras que la segunda desigualdad proviene de la convexidad de g.

ii) Si $m = 1$, g es monotónicamente creciente y f es estrictamente convexa, entonces la primera desigualdad se vuelve estricta siempre que $x \neq y$ y $\alpha \in (0,1)$, mostrando que h es estrictamente convexa.

c) i) El problema tiene problemas de no-acotamiento. En particular, x_1 no tiene cota superior en ninguna restricción, y la función objetivo busca maximizar su valor.

ii) El gráfico se presenta a continuación. En él, se aprecia el espacio de soluciones factibles en verde. El punto $x = (4,3)$ es la última base en el algoritmo Simplex que se consideraría. En él, el gradiente de la función objetivo (mostrado en celeste) indicará que el movimiento debe hacerse a través de la restricción $-x_1 + 2x_2 \leq 2$ (proyección del gradiente sobre la restricción, en azul), aumentando el valor de la variable de holgura de la restricción $-x_1 + x_2 \leq -1$. Sin embargo, no se podrá encontrar nin guna variable que salga de la base.



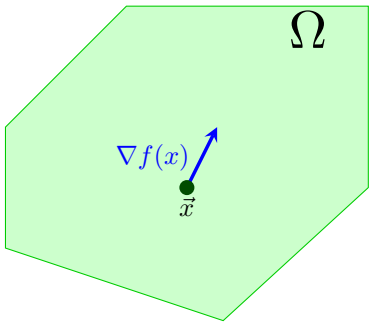
iii) Bolzano queda invalidado debido a que el espacio no es compacto, al no ser acotado: $2 \leq x_1 \leq \infty$, por ejemplo.

El teorema de la hipótesis H queda invalidado tras encontrar un vector de escape que hace que el límite sea infinito. Sea el vector de escape el vector $(2,1)^T$:

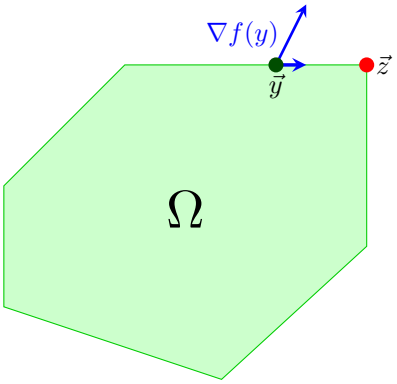
$$\lim_{t \to \infty} f(4 + 2t, 1 + t) = +\infty$$

Luego, el teorema queda invalidado, al encontrar un vector de escape que de $+\infty$ (debía ser $-\infty$ al ser un problema de minimización).

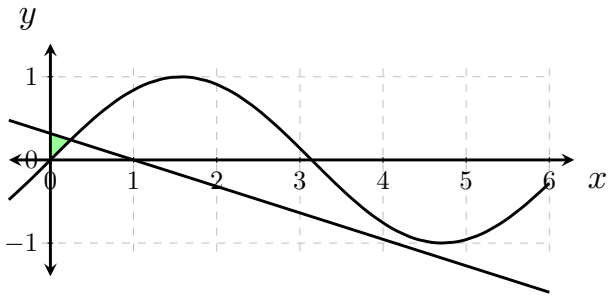
d) Consideremos un espacio de soluciones factibles Ω general de un problema P). Digamos que $\vec{x} \in \Omega$ es punto interior y solución óptima de P). Sin embargo, en $\vec{x}$ existe un gradiente de la función objetivo $\nabla f(x)$ distinto de cero, que indica una dirección de máximo ascenso (asumiendo maximización) factible para $\vec{x}$. Luego, nos podemos mover en esa dirección.



Así, podemos movernos en dirección hasta que no podamos seguir (que es cuando llegamos a un borde de Ω en el punto $\vec{y}$. Ahí, si bien no podemos movernos en la dirección $\nabla f(y)$, sí nos podemos mover en la proyección del gradiente de la función objetivo sobre la restricción en la que se encuentra $\vec{y}$. En esa dirección, las curvas de nivel siguen mejorando. Por lo mismo, podemos movernos en esa dirección hasta que no podamos seguir moviéndonos; ni haya una proyección del gradiente de la función objetivo que permita movernos mejorando el valor objetivo. Así, se llega a un vértice, el punto $\vec{z}$, que será el óptimo. Esta última situación se presenta en el siguiente gráfico.



e) i) El gráfico a continuación presenta el espacio de soluciones factibles pintado en verde.



ii) Se pueden apreciar las siguientes cosas:

- ◇ El conjunto de soluciones factibles es no vacío, pues el punto (0,1) pertenece a él.
- ◇ El espacio de soluciones es compacto, ya que
  - es cerrado (las restricciones son del tipo $\leq$ y $\geq$).
  - es acotado (pues $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1/\pi$)
- ◇ La función objetivo es continua, al ser un polinomio lineal.

Así, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, el problema en cuestión admite al menos una solución factible.

Problema 2. (15 puntos)

a) (6 puntos) Considere la siguiente forma canónica de un problema de minimización:

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & c_1x_4 + c_2x_5 + c_3x_6 + c_4x_7 - 10 & & \\ \text{s.a.} & x_1 - 8x_5 + 2x_6 & = & \beta \\ & x_2 - 5x_4 + a_2x_5 + -x_6 - 4x_7 & = & 1 \\ & x_3 + a_1x_4 + 6x_5 + a_3x_6 - x_7 & = & 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0 \end{array}$$

Donde $c_1, c_2, c_3, c_4, a_1, a_2, a_3$ y β son parámetros. Las preguntas a continuación son independientes entre sí y se refieren al problema recién presentado. Establezca las condiciones más generales para los parámetros mencionados de manera que cada una de las siguientes afirmaciones sea verdadera. Si no se establece condición par algún parámetro, se asumirá que dicho parámetro puede tomar cualquier valor entre $-\infty$ y ∞.

i) (1 puntos) La solución básica representada es óptima y no degenerada.

ii) (2 puntos) La solución básica representada es factible, x_5 es la variable que entra a la base y x_3 es el único candidato a salir de la base y el nuevo valor de la función objetivo es -13.

iii) (2 puntos) La solución básica representada es factible, x_6 es la variable que entra a la base, pero cuando x_6 entra a la base x_3 sale de la base y el nuevo valor de x_6 es 3.

iv) (1 puntos) El problema es no acotado.

b) (3 puntos)

i) (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función convexa. Use la definición de convexidad para mostrar que f "mira hacia arriba", en el sentido de que si x_1, x_2, x_3 son tres escalares tales que $x_1 < x_2 < x_3$, entonces

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

iii) (1 punto) Muestre que la función de $\mathbb{R}^n$ a $(-\infty, \infty]$ a continuación es convexa.

$$f(x) = e^{\beta x^T Ax}$$

, donde A es una matriz semidefinida positiva simétrica de $n \times n$, y β es un escalar positivo.

c) (6 puntos) Un problema que usted debe conocer, ya sea por el curso de Probabilidades y Estadística, o desde el Colegio, es el de hacer una regresión lineal. En este problema se tienen valores de una variables "dependiente", Y, los cuales se quieren explicar a partir de una variable "independiente", X. Se postula un "modelo lineal", donde se quieren encontrar coeficientes a y b de modo tal que

$$Y = a + bX + e$$

donde e representa un error aleatorio. Lo que se tiene en la práctica es que se dispone de n observaciones de las variables Y y X: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ y $X_1, \ldots, X_n$ y entonces se escriben las ecuaciones:

$$Y_i = a + bX_i + e_i \; i = 1, \ldots, n.$$

Los valores de los coeficientes a y b se encuentran mediante "mínimos cuadrados", lo que significa minimizar

$$\sum_{i=1}^{n} (e_i)^2.$$

Esto lleva a las conocidas fórmulas de la regresión lineal.

En este problemas vamos a ver cómo se generaliza esto a un caso de múltiples variables. Específicamente vamos a postular que la variables Y puede ser explicada por los efectos de k variables independientes: $X_1, X_2, \ldots, X_k$, y se postula el modelo lineal multivariado:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + e$$

donde e es un error aleatorio. Estos modelos son lo que suele usarse, por ejemplo, en estudios económicos. Un ejemplo es explicar el consumo de energía eléctrica (Y) en función de la población, el crecimiento del PIB, el índice de actividad económica, etc. (que serán las variables X_j). Al igual que en el caso de una variable, en la realidad se dispone de n observaciones de la variables Y: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ y de n observaciones para cada variable X_j: $X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jn}$, y esto para $j = 1, \ldots, n$. Se escriben, entonces las ecuaciones:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + e_i \; i = 1, \ldots, n.$$

Los coeficientes $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ se obtienen resolviendo el problema de minimizar la suma de errores cuadráticos de las n observaciones:

$$\sum_{i=1}^{n} (e_i)^2$$

i) (1 punto) Muestre que el problema de optimización que encuentra los mejores coeficientes de la regresión multivariada es un problema cuadrático de la forma:

$$\text{mín } \beta^T Q \beta + d^T \beta$$

donde β es el vector de $\mathbb{R}^{k+1}$ de coeficientes $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$, Q es una matriz simétrica de $(k+1) \times (k+1)$ y d es un vector de $\mathbb{R}^{k+1}$. Encuentre explícitamente la matriz Q y el vector d en función de los datos del problema: los valores de Y y de las variables X_j.

Indicación: Para no volverse loco, le recomendamos que haga esto definiendo el vector $y \in \mathbb{R}^n$ corresponiente a las observaciones de Y, y la siguiente matriz de $n \times (k+1)$:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \ldots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & \ldots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \ldots & X_{nk} \end{bmatrix}$$

Escriba todas las expresiones en función de y y de $\bar{X}$.

ii) (2 puntos) En las aplicaciones, especialmente en el área de Econometría, se asume que $n > k+1$, de hecho, mucho mayor. También se asume que las variables explicativas X_j son estadísticamente independientes entre sí. Esto se traduce en que la matriz $\bar{X}$, definida arriba, tiene rango completo. Muestre que, bajo estas hipótesis, el problema por usted planteado tiene solución única. Escriba explícitamente una fórmula para los coeficientes β óptimos.

iii) (3 puntos) Considere el siguiente problema, en donde también se quiere explicar una variable en función de otras: una investigación en biología quiere determinar qué genes podrían influir en una enfermedad. Para esto se disponde de información de la intensidad de la enfermedad (medida en alguna escala adecuada) para n pacientes. Esos son los datos $Y_1, \ldots, Y_n$. Por otro lado, hay información del grado de "expresión" de una cantidad de genes, k en total, para esos mismos pacientes. Esto genera valores $X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{jn}$, y esto para $j = 1, \ldots, n$, correspondientes a la intensidad de expresión del gen j en el paciente i. Se postula, entonces, que una relación de la forma

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} \; i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

permitiría determinar cuáles genes son los que mejor explican la enfermedad.

El problema acá es que la cantidad de genes suele ser superior al número de obeservaciones, es decir ahora tenemos $n < k+1$. Si entendió bien el desarrollo de la parte b), se dará cuanta que en este caso no se puede obtener un conjunto único de coeficientes β que logran el mejor ajuste del modelo. Lo que se hace es bucar una solución que cumpla con el modelo de 1, (notar que ahora se puede pedir que se cumpla exacto, sin error, dado que hay más icógnitas que igualdades) y que tenga el menor número posible de coeficientes $\beta_j \neq 0$. Esto tiene sentido, ya que se buscaría así los pocos genes que mejor explican la enfermedad. Esta forma de estimar se conoce como Least Absolute Shrinkage and Selection Operation (LASSO) y se usa actualmente en muchas aplicaciones de Data Science (Big Data).

Escriba un problema de optimización (será lineal entero mixto) que permita determinar los coeficientes con esa característica.

Solución Problema 2.

a) i) ◇ Para que la solución sea óptima, $c_1, c_2, c_3, c_4 \geq 0$.
◇ Para que sea no degenerada, $\beta > 0$.

ii) ◇ Para que la solución sea factible, $\beta \geq 0$.
◇ Para que x_5 sea candidato a entrar a la base, $c_2 < 0$ y $c_2 < c_1, c_2 < c_3, c_2 < c_4$.
◇ Para que x_3 sea el único candidato a salir a la base, la regla del cuociente debe ser tal que $1/a_2 > 9/6 \mapsto a_2 < 2/3$. Para que el valor de la función objetivo sea 5 necesitamos que $10 - \frac{3c_2}{2} = 13 \mapsto c_2 = \frac{2}{3} \cdot (-3) = -2$.

iii) ◇ Para que la solución sea factible, $\beta \geq 0$.
◇ Para que x_6 sea candidato a entrar a la base, $c_3 < 0$ y $c_3 < c_1, c_3 < c_2, c_3 < c_4$.
◇ Para que x_3 salga de la base, por la regla del mínimo cuociente, $\beta/2 \geq 9/a_3$. Además, para que el nuevo valor de x_6 sea 3, es necesario que $9/a_3 = 3 \mapsto a_3 = 3$. Finalmente, $\beta/2 \geq 3 \mapsto \beta \geq 6$.

iv) Para que el problema sea no acotado, $c_4 < 0$ y $c_1, c_2, c_3 < c_4$.

b) i) Sean x_1, x_2, x_3 tres escalares tal que $x_1 < x_2 < x_3$. Entonces, podemos escribir x_2 como una combinación convexa entre x_1 y x_3 como sigue:

$$x_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} x_3$$

Luego, por la convexidad de la función f, se tiene que

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$$

Esta relación y el hecho de que

$$f(x_2) = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_2)$$

implica que

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\big(f(x_3) - f(x_2)\big)$$

Multiplicando lo anterior por $x_3 - x_1$ y dividiendo por $(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$, se obtiene

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

ii) La función en cuestión se puede ver como una composición $h\big(g(x)\big)$ de la función $h(t) = e^{\beta t}$, con $t \in \mathbb{R}$, y la función $g(x) = x^T A x$ para $x \in \mathbb{R}^n$. En este caso, h es convexa y monotónicamente creciente sobre los reales, mientras que g es convexa sobre $\mathbb{R}^n$ (ya que A es semidefinida positiva). Así, se sigue del ejercicio 1.b que la función en cuestión es convexa sobre $\mathbb{R}^n$.

c) i) Aquí basta escribir el sistema de ecuaciones como

$$y = \bar{X}\beta + e$$

donde $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$. El vector e representa, entonces, los términos de error. Con esto se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} (e_i)^2 = e^T e = (y - \bar{X}\beta)^T (y - \bar{X}\beta)$$

(notar que aquí estamos ocupando la notación matricial y vectorial, es la forma más eficiente de hacerlo, pero también de puede "coordenada a coordenada"). Ahora desarrollamos el lado derecho de la expresión:

$$\begin{aligned} (y - \bar{X}\beta)^T (y - \bar{X}\beta) &= y^T y - y^T \bar{X}\beta - \beta^T \bar{X}^T y + \beta^T \bar{X}^T \bar{X}\beta \\ &= y^T y - 2y^T \bar{X}\beta + \beta^T \bar{X}^T \bar{X}\beta \end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^{n}(e_i)^2 = y^T y - 2y^T \bar{X}\beta + \beta^T \bar{X}^T \bar{X}\beta.$$

Tenemos, entonces, que el problema de minimizar la suma cuadrática de los errores es de la forma propuesta con

$$Q = \bar{X}^T \bar{X},\ d = -2y^T \bar{X}$$

y el término $y^T y$ es simplemente una constante.

ii) Esto se sigue de resultados de Algebra Lineal. Basta probar que la matriz $Q = \bar{X}^T \bar{X}$ es definida positiva y esto se sigue de que $\bar{X}$ es de rango máximo. En efecto, $u^T Qu = u^T \bar{X}^T \bar{X}u$. Si llamamos $v = \bar{X}u$ tenemos que $u \neq 0$ si y sólo si $v \neq 0$, dado que $\bar{X}$ tiene rango máximo. Luego, $u^T Qu = v^T v$ y es > 0 si y sólo si $u \neq 0$. Luego, Q es definida positiva y el problema cuadrático tiene solución única.

La solución de este problema es conocida en estadísticas y se puede encontrar en la literatura, es:

$$\beta^* = (\bar{X}^T \bar{X})^{-1} \bar{X}^T y.$$

iii) Definamos la siguiente función, para un vector $x \in \mathbb{R}^{k+1}$:

$$\|x\|_0 = card\{j : x_j \neq 0\}$$

donde *card* denota la cardinalidad (número de elementos) de un conjunto. Entonces, $\|x\|_0$ es la cantidad de coordenadas no nulas del vector x.

Usando esta función, lo que queremos hacer es minizar $\|\beta\|_0$, pero sujeto a la condición de que cumple el sistema $y = \bar{X}\beta$. El problema es:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \|\beta\|_0 \\ s.a. & \bar{X}\beta = y \end{array}$$

Ahora tenemos que escribir en forma lineal (usando variables enteras) la función contadora, ya que así como está definida no se puede manejar. El siguiente problema de optimización hace eso. Definamos una variables z_j que vale 1 si $\beta_j \neq 0$, y 0 si no:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{j=0}^{k} z_k \\ s.a. & \bar{X}\beta = y \\ & |\beta_j| \leq M z_j, j = 0, \ldots, k \\ & z_j \in \{0, 1\}, j = 0, \ldots, k. \end{array}$$

Donde M es un número más grande que cualquier valor de la coordenada de cualquier posible solución (podemos suponer que existe tal número). Esto tadavía no está en la mejor forma, pero podemos procesar el valor absoluto para llegar a:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \sum_{j=0}^{k} z_k \\ s.a. & \bar{X}\beta = y \\ & -M z_j \leq \beta_j \leq M z_j, j = 0, \ldots, k \\ & z_j \in \{0, 1\}, j = 0, \ldots, k. \end{array}$$

Este es el problema final que buscábamos.

Problema 3. (15 puntos)

a) (8 puntos) Considere el siguiente modelo de optimización.

$$\begin{array}{rll} \text{máx} & 2x_1 + x_2 & \\ \text{s.a.} & 4x_1 + x_2 & \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 & \leq 10 \\ & x_1 - 2x_2 & \leq 6 \\ & x_1 & \leq 8 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

i) (2 puntos) Demuestre sin resolver que el problema anterior tiene al menos una solución óptima.

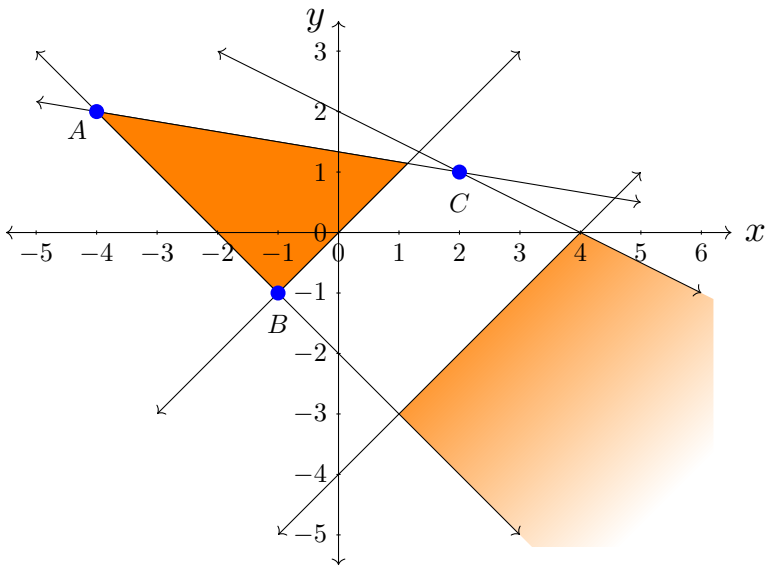
ii) (1 punto) Llévelo a su forma estándar.

iii) (1 punto) Muestre, utilizando el criterio de Factibilidad de Simplex, que el punto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ es infactible, pero que el punto $(x_1, x_2) = (1, 0)$ es factible.

iv) (2 puntos) Resuelva utilizando el algoritmo Simplex, a partir del punto factible de (ii). No es necesario que explicite el cálculo para la inversión de matrices, pero sí indique el valor de las variables y de la función objetivo en el óptimo.

v) (2 puntos) Grafique la región factible y la trayectoria de puntos visitados seguida por el algoritmo.

b) (7 puntos) Yiyo ya lleva tiempo estudiando para la prueba. Ya había hecho varios ejercicios, sin embargo, hubo uno que tuvo que dejar a medias, ya que su tía Marta le pidió ayuda con unas bolsas del supermercado. Cuando Yiyo quiso retomar su estudio, notó que su desorden no le permitió encontrar el inicio de su ejercicio a medias. Lo único que pudo encontrar fue el gráfico que se presenta a continuación y la función objetivo del modelo, máx $x+4y$. En él, se encuentran las coordenadas $A = (-4, 2), B = (-1, -1)$ y $C = (2, 1)$. Ayudemos a nuestro amigo Yiyo a determinar nuevamente el inicio de su desarrollo para que pueda continuar y terminar el ejercicio. Para ello:



i) (3 puntos) Construya el modelo matemático **lineal** asociado al gráfico en cuestión. El espacio de soluciones factibles del modelo, representado en naranjo, debe estar fielmente representado en él.

ii) (2 puntos) Determine de manera gráfica el óptimo del problema. Justifique su respuesta.

Independiente de sus respuestas anteriores, considere el modelo de programación lineal que tiene como restricciones:

- ◇ La que pasa por A y por C.
- ◇ La que pasa por A y por B.
- ◇ La otra que pasa por B.

de manera de que el espacio de soluciones factibles sea sólo el triángulo naranjo cerrado. Sobre este nuevo modelo, conteste las siguientes preguntas:

iii) (1 punto) Desarrolle la forma estándar del problema.

iv) (1 punto) Determine la base óptima del problema.

Solución Problema 3.

a) i) Se puede demostrar directo usando el teorema de B-W.

- ◇ El espacio de soluciones es no-vacío, ya que el punto $x = (1, 0)$ pertenece a él.
- ◇ La función objetivo es continua, al ser un polinomio de primer grado.
- ◇ El espacio de soluciones es compacto, ya que
  - es cerrado, al ser todas sus restricciones del tipo $\leq$ y $\geq$.
  - es acotado, ya que $0 \leq x \leq 8$ y $0 \leq y \leq 5$.

Luego, el teorema de Bolzano-Weierstrass nos permite asegurar que el problema admite al menos una solución óptima.

ii) La forma estándar del problema es

$$\begin{array}{lrll} FE) & \text{mín} & -2x_1 - x_2 & \\ & \text{s.a.} & 4x_1 + x_2 - x_3 & = 4 \\ & & x_1 + 2x_2 + x_4 & = 10 \\ & & x_1 - 2x_2 + x_5 & = 6 \\ & & x_1 + x_6 & = 8 \\ & & x_1, \ldots, x_6 & \geq 0 \end{array}$$

iii) Para ello, es necesario determinar la base de cada uno de los puntos:

- ◇ Para el punto $(x_1, x_2) = (0, 0)$, las variables básicas son x_3, x_4, x_5 y x_6. Luego,

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizamos el criterio de factibilidad:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \not\geq \vec{0}$$

Dado que no todos los componentes son positivos, la base asociada a (0,0) es infactible.

- ◇ Para el punto $(x_1, x_2) = (0, 0)$, las variables básicas son x_1, x_4, x_5 y x_6. Luego,

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizamos el criterio de factibilidad:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

Dado que todos los componentes son positivos, la base asociada a (0,0) es factible.

iv) Utilizamos la base de (ii). En ella, las variables no básicas son x_2 y x_3.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \ngeq \vec{0}^T$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base no es óptima, y el de entrada nos dice que podrían entrar tanto x_2 como x_3 a la base. Arbitrariamente escogemos x_2 como la variable que entra. Para el criterio de salida, calculamos $\bar{b}$:

$$\text{mín}\left\{\frac{1}{1/4}, \frac{9}{7/4}, \bullet, \bullet\right\} = 4 \rightarrow x_1 \text{ es la variable que sale de la base.}$$

Así, nos encontramos con una nueva base, en que las variables básicas son x_2, x_4, x_5 y x_6, mientras que las variables no básicas son x_1 y x_3.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \ngeq \vec{0}^T$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base no es óptima, y el de entrada nos dice que x_3 es la variable que entra. Para el criterio de salida, calculamos $\bar{b}$:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\text{mín}\left\{\bullet, \frac{2}{2}, \bullet, \bullet\right\} = 1 \rightarrow x_4 \text{ es la variable que sale de la base.}$$

Así, nos encontramos con una nueva base, en que las variables básicas son x_2, x_3, x_5 y x_6, mientras que las variables no básicas son x_1 y x_4.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \not\geq \vec{0}^T$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base no es óptima, y el de entrada nos dice que x_1 es la variable que entra. Para el criterio de salida, calculamos $\bar{b}$:

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

$$\text{mín}\left\{\frac{5}{1/2}, \bullet, \frac{16}{2}, \frac{8}{1}\right\} = 8 \rightarrow x_5 \text{ es la variable que sale de la base.}$$

Notar que podría también haber salido x_6 de la base. Si esta nueva base fuese óptima, sabemos que es sobredeterminada. Así, nos encontramos con una nueva base, en que las variables básicas son x_2, x_3, x_1 y x_6, mientras que las variables no básicas son x_5 y x_4.

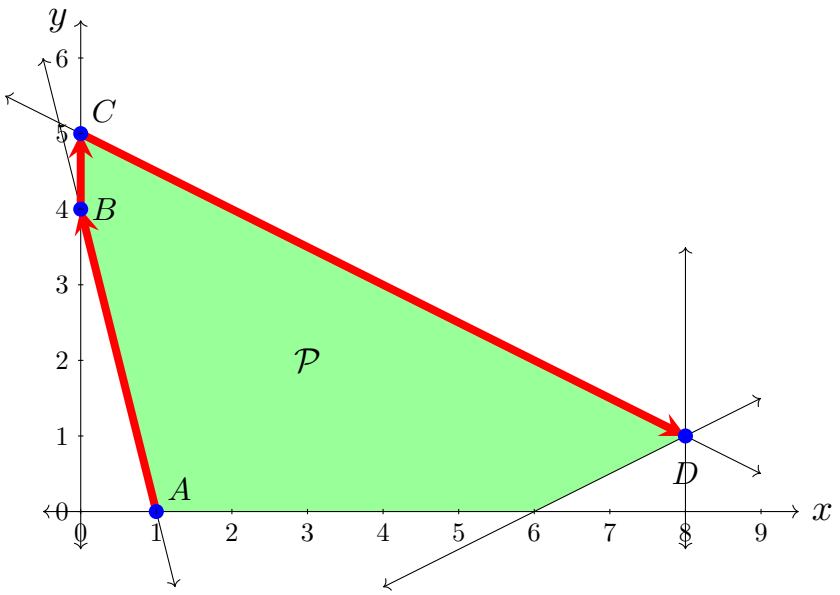
$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ -1 & 9/4 & 7/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar si la base es óptima, utilizamos el criterio de optimalidad de Simplex.

$$\bar{c}_R^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \bar{R} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \geq \vec{0}$$

El criterio de optimalidad nos dice que esta base es óptima y, por ende, se termina la Fase I de Simplex. Además, la base óptima es factible. Por último, el valor de las variables básicas viene dado por $\bar{b}$, indicando que $x_1 = 8, x_2 = 1$. Esto genera un valor óptimo igual a $z^* = 17$.

v) El recorrido se presenta a continuación, con las flechas en rojo. En el dibujo, $A = (1, 0)$, $B = (0, 4)$, $C = (0, 5)$, $D = x^* = (8, 1)$.



b) i) El modelo matemático **no** lineal sería el que sigue:

$$\begin{array}{lrl} \text{máx} & x+4y & \\ \text{s.a.} & -x-y & \leq 2 \\ & |x-y-2| & \geq 2 \\ & x+2y & \leq 4 \\ & x+6y & \leq 8 \end{array}$$

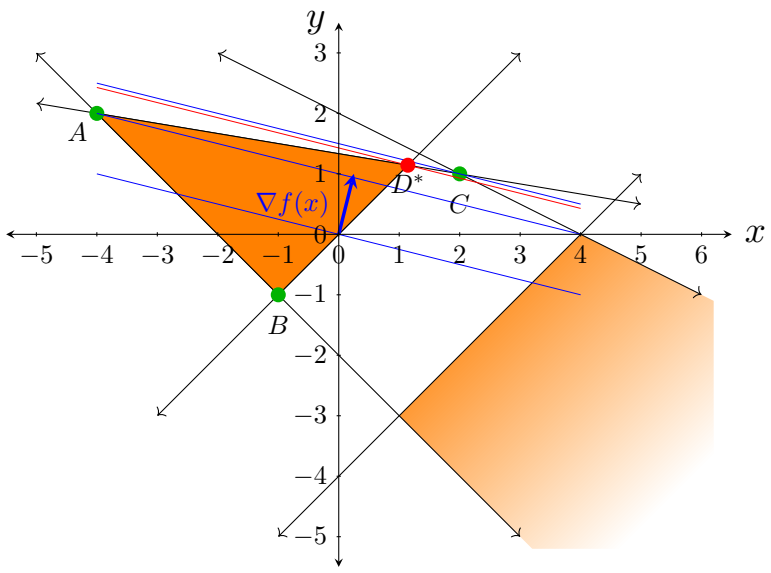
que se debe linealizar por el valor absoluto. Para ello, se puede construir una nueva variable binaria z, que valga 1 si $x-y-2 \geq 2$ y 0 si $x-y-2 \leq -2$. De esta manera, considerando que M es un número muy grande, el modelo equivalente lineal queda como sigue:

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & x+4y & & \\ \text{s.a.} & -x-y & \leq & 2 \\ & x-y-2 & \geq & 2-M(1-z) \\ & x-y-2 & \leq & -2+Mz \\ & x+2y & \leq & 4 \\ & x+6y & \leq & 8 \\ & z & \in & \{0,1\} \end{array}$$

Notar que, sin la variable z (o bien, sin haberlo modelado como un valor absoluto y sólo las dos rectas independientes), el problema habría resultado con un espacio de soluciones vacío, por lo que no estaría representado por el gráfico. Es decir, al poner las restricciones $x-y \geq -4$ y $x-y \leq 0$ se genera un espacio infactible.

En estricto rigor, este modelo tiene una tercera dimensión, sin embargo, es equivalente al gráfico entregado dado que se estará en $z=1$ o en $z=0$, y el gráfico de Yiyo muestra las dos situaciones superpuestas.

ii) El óptimo del problema cae en el punto $D^* = (8/7, 8/7)$. Esto se puede justificar debido a que las curvas de nivel –indicadas en azul– aumentan según $x+4y$ hacia arriba –gradiente en azul–, y la última curva de nivel que toca espacio de soluciones factibles es la roja. El **valor de la función objetivo** es de $z^* = 40/7$.



iii) El modelo indicado corresponde a:

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & x+4y & & \\ \text{s.a.} & -x-y & \leq & 2 \\ & x-y & \leq & 0 \\ & x+6y & \leq & 8 \end{array}$$

Su forma estándar, luego de hacer el reemplazo $x = a - b$ y $y = c - d$, queda

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & (a-b) + 4(c-d) & & \\ \text{s.a.} & -(a-b) - (c-d) + h_1 & = & 2 \\ & (a-b) - (c-d) + h_2 & = & 0 \\ & (a-b) + 6(c-d) + h_3 & = & 8 \\ & a, b, c, d, h_1, h_2, h_3 & \geq & 0 \end{array}$$

iv) En el óptimo, el mismo que en (ii), las variables básicas son a, c y h_1 al ser las variables con valor positivo. Luego,

$$B^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad (B^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -6/7 & 1/7 \\ 0 & 1/7 & 1/7 \\ 1 & -5/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

Así, los valores de las variables son

$$x_{B^*} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ h_1 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 8/7 \\ 8/7 \\ 30/7 \end{pmatrix}$$

Problema 4. (15 puntos)

a) (10 puntos) La PUC se encuentra planificando la asignación de horarios y salas para los cursos que deben dictarse el próximo semestre. Si bien ya se cuenta con un modelo de programación que permite apoyar esta tarea, se quieren evaluar ideas alternativas hechas desde cero por alumnos para ver si surge algo distinto. Eso sí, la programación será más libre.

El programa de estudio contempla un conjunto de cursos C que deben dictarse, y en cada curso $c \in C$ hay a_c alumnos. Además, hay disponible un conjunto de salas S y cada sala $s \in S$ tiene capacidad para k_s alumnos.

Las clases se pueden dictar de lunes a viernes y cada día tiene 6 módulos (1, 2 y 3 en la mañana, 4, 5 y 6 en la tarde). No puede haber dos cátedras del mismo curso en un mismo día. Cada curso exige dos módulos para clases y un módulo de ayudantía.

Los profesores no pueden dictar cátedra en todos los horarios posibles. Esto está representado por el parámetro p_{cdm} que es igual a 1 si el profesor del curso c puede dictar clase en el día d y en el módulo m, en caso contrario es igual a 0.

Como los profesores siempre eligen a los ayudantes con mayor disponibilidad, suponga que los ayudantes tienen disponibilidad completa.

i) Formule un modelo de programación lineal entero que permita ayudar a la Universidad, sabiendo que intenta liberar las tardes tanto a profesores como alumnos en lo posible.

ii) Suponga ahora que para cada par de cursos (c_1, c_2) se sabe que hay A_{c_1,c_2} alumnos que están en ambos cursos.

Modifique el problema propuesto en (i) de forma de minimizar la cantidad de alumnos que tendrán topes de horarios[4].

b) (5 puntos) Nuestro amigo Yiyo debe transportar a los invitados a la fiesta que hará en su casa. Siguiendo la idea de Nico, ha decidido contratar un bus. Para ello cuenta con P posibles paraderos del bus y debe establecer cuáles de estos paraderos vistará el bus. Dado lo lejano que está ubicada su casa, un invitado no podría llegar a la fiesta si el bus no pasa por su paradero. Así, les pide a cada invitado que elija uno de los p paraderos en los que se ubicaría. El resultado es que, si el bus decide parar en el paradero p, una cantidad D_p de invitados se subirá al bus (no pueden subir solo algunos) y él quiere tener por lo menos una cantidad I de invitados en su fiesta.

[4]Un alumno tiene tope de horarios cuando está en dos cursos que tienen uno de los módulos del curso en común.

Se sabe que el bus contratado solo hará viajes ida y vuelta desde su casa a un paradero escogido, y así para todos los paraderos escogidos. (paradero a paradero).

Además, Yiyo cuenta con un monto de dinero H que es lo máximo que se puede gastar en gasolina para el bus. Se sabe que el bus gasta L litros de gasolina por kilómetro, que el precio de la gasolina es de G pesos por litro y que la distancia de su casa al paradero p es r_p kilómetros.

Finalmente, su tía Marta "se pondrá" con el arriendo del bus, que viene definido por c_j para el bus j que tiene capacidad K_j, con $j \in J$ –la lista de buses disponibles para la fecha–. Cabe mencionar que ningún invitado podrá irse parado en el bus. Para que su tía no gaste tanto, Yiyo busca minimizar el costo de arriendo del bus, pero cumpliendo las restricciones expuestas anteriormente. Haga el modelo de programación lineal que permita resolver el problema de Yiyo.

Solución Problema 4.

a) i) A continuación se presenta un modelo que ayudaría al problema.

Variables

x_{cdms}: $\begin{cases} 1 & \text{si se dicta una cátedra del curso } c \text{ en el módulo } m \text{ del día } d \text{ en la sala } s. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

y_{cdms}: $\begin{cases} 1 & \text{si se dicta una ayudantía del curso } c \text{ en el módulo } m \text{ del día } d \text{ en la sala } s. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

Índices :

- $c \in C$
- $d \in [1, 5]$
- $m \in [1, 6]$
- $s \in S$

Función objetivo : Se busca minimizar la cantidad de cátedras y ayudantías en la tarde.

$$\text{mín} \sum_{c \in C} \sum_{d=1}^{5} \sum_{m=4}^{6} \sum_{s \in S} x_{cdms} + y_{cdms}$$

Restricciones

1) Para cada curso $c \in C$ se debe dictar dos cátedras a la semana.

$$\sum_{d=1}^{5} \sum_{m=1}^{6} \sum_{s \in S} x_{cdms} = 2 \qquad \forall c \in C$$

2) Se debe dictar también una ayudantía a la semana.

$$\sum_{d=1}^{5} \sum_{m=1}^{6} \sum_{s \in S} y_{cdms} = 1 \qquad \forall c \in C$$

3) Para cada curso, sólo se puede dictar a lo más una cátedra por día.

$$\sum_{m=1}^{6} \sum_{s \in S} x_{cdms} \leq 1 \qquad \forall c \in C \quad \forall d = 1, \ldots, 5$$

4) Para cada curso, la clase de ayudantía no debe coincidir con las cátedras.

$$\sum_{s \in S} (x_{cdms} + y_{cdms}) \leq 1 \qquad \forall c, d, m$$

5) Las cátedras sólo se pueden realizar en los horarios disponibles por cada profesor.

$$x_{cdms} \leq p_{cdm} \qquad \forall c, d, m, s$$

6) Las salas que serán usadas deben tener una capacidad igual o mayor que el número de alumnos.

$$x_{cdms} \cdot a_c \leq k_s \qquad \forall c, d, m, s$$

$$y_{cdms} \cdot a_c \leq k_s \qquad \forall c, d, m, s$$

7) En cada sala, sólo puede realizarse una clase a la vez.

$$\sum_{c \in C} (x_{cdms} + y_{cdms}) \leq 1 \qquad \forall d, m, s$$

8) Cada clase sólo puede usar a lo más una sala en cada horario.

$$\sum_{s \in S} x_{cdms} \leq 1 \qquad \forall c, d, m$$

$$\sum_{s \in S} y_{cdms} \leq 1 \qquad \forall c, d, m$$

9) Naturaleza de variables.

$$x_{cdms} \in \{0, 1\} \qquad \forall c, d, m, s$$

$$y_{cdms} \in \{0, 1\} \qquad \forall c, d, m, s$$

ii) A continuación se presentan los cambios:

Variables nuevas

$T_{c_1,c_2,d,m}$: $\begin{cases} 1 & \text{si los cursos } c_1 \text{ y } c_2 \text{ tienen clases en el mismo día } d \text{ en el mismo módulo } m. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

Función objetivo : Se busca minimizar la cantidad de alumnos con tope de cátedra.

$$\text{mín} \sum_{c_1 \in C} \sum_{c_2 \in C} \sum_{d=1}^{5} \sum_{m=4}^{6} A_{c_1,c_2} T_{c_1,c_2,d,m}$$

Restricciones nuevas

1) Consistencia entre la nueva variable y las anteriores. Es decir, que T valga 1 si existe tope.

$$\sum_{s \in S} (x_{c_1,d,m,s} + y_{c_1,d,m,s} + x_{c_2,d,m,s} + y_{c_2,d,m,s}) \leq T_{c_1,c_2,d,m} + 1 \quad \forall c_1, c_2, d, m$$

2) Naturaleza de variables adicionales.

$T_{c_1,c_2,d,m} \in \{0, 1\} \qquad \forall c_1, c_2, d, m, s$

$y_{cdms} \in \{0, 1\} \qquad \forall c, d, m, s$

b) A continuación se presenta el modelo que realizó Yiyo.

Variables

x_p: $\begin{cases} 1 & \text{si se visita el paradero } p. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

y_j: $\begin{cases} 1 & \text{si se arrienda el bus } j. \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$

z : cantidad máxima de pasajeros que llevaría el bus en un viaje

Función objetivo : Se debe minimizar el costo de arriendo del bus

$$\text{mín} \sum_{j \in J} y_j \cdot c_j$$

Restricciones

i) Se quiere invitar como mínimo I invitados.

$$\sum_{p=1}^{P} x_p D_p \geq I$$

ii) Existe un presupuesto limitado para la gasolina.

$$\sum_{p=1}^{P} x_p \cdot L \cdot 2r_p \cdot G \leq H$$

iii) Cantidad máxima de personas que el bus llevaría en un viaje.

$$z \geq x_p D_p \qquad \forall p = 1, \ldots, P$$

iv) Determinar qué bus arrendar según la capacidad.

$$K_j y_j \geq z \quad \forall j \in J$$

v) Se arrendará sólo 1 bus.

$$\sum_{j \in J} y_j = 1$$

vi) Naturaleza de las variables

$x_p \in \{0, 1\} \qquad \forall p = 1, \ldots, P$
$y_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in J$
$z \in \mathbb{N}$