PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 01-2018
Profesores: S. Encina - R. Cuadrado - F. Palomino
A. Cataldo - J.T. Marquinez - J. González

Solución Tarea 4

Fecha de Entrega: 29 de junio

La tarea tiene un total de 60 puntos.

Reglas de la Tarea

No seguir estas reglas generará una penalización en la nota de la tarea.

- ◇ La Tarea se desarrolla en forma grupal y estos grupos **deben** ser los mismos grupos ya asignados para el proyecto semestral. Cada grupo debe entregar una sola tarea.
- ◇ Se debe contestar en hojas **independientes** cada una de las cuatro preguntas de la Tarea. Estas hojas deben ser **blancas y de tamaño carta**, y está a su decisión si escribirla en computador o a mano, mientras **esté ordenado**. En cada hoja debe colocar su **número de grupo**[1] **con letra clara y legible**. Las hojas de cada pregunta deben estar corcheteadas, entregando así cuatro grupos de hojas el día de la entrega.
- ◇ El plazo de entrega vence impostergablemente el día viernes 29 de junio a las 12:30 horas puntualmente. Aquellas Tareas no entregadas en la fecha y hora indicadas, serán consideradas como **Tarea NO Entregada**.
- ◇ La Tarea se entrega en la **secretaría del segundo piso del edificio Raúl Devés**. Deben entregar las preguntas por separado en el buzón que corresponde a cada pregunta. Además, **la entrega de la tarea se debe realizar entre las 10:30 y las 12:30 el día de la entrega**. Esto, para evitar cualquier conflicto durante la mañana.
- ◇ Esta tarea es grupal y el desarrollo y discusión debe ocurrir dentro de cada grupo. No se distribuyan la resolución de las preguntas por separado, hagan realmente un trabajo grupal de desarrollo ya que el no hacerlo va contra la idea de aprendizaje colaborativo. Pueden discutir los problemas con los profesores y los ayudantes del curso, pero al final cada grupo debe entregar sus propias soluciones, desarrolladas y escritas por el grupo. La copia o intento de copia a otros grupos será sancionada dependiendo la gravedad (a ser determinada por el equipo docente del curso) con consecuencias que podrían ir desde un 1.0 en la nota de la Tarea hasta la escalación a la Dirección de Docencia de la Escuela, con posible **REPROBACIÓN AUTOMÁTICA** del curso[2].
- ◇ Cualquier duda sobre el enunciado, enviarlas al correo electrónico `dudas.tareas.ics1113@gmail.com`. Este correo centralizará todas las dudas (únicamente) sobre el **enunciado de la tarea**. Cualquier correo enviado a otra dirección respecto a la tarea, no será considerado (y por lo tanto, no será respondido). Tampoco lo serán aquellos correos que lleguen a este buzón que contengan preguntas no relacionadas con la tarea. Este correo será revisado desde la publicación de este enunciado hasta el día antes de la entrega, dos veces al día (una en la mañana y otra en la tarde-noche).

[1] Deben escribir «Grupo XX», donde XX corresponde al número de grupo.
[2] Tener en consideración, para esto, el Código de Honor de la Escuela

Problema 1. (14 puntos)

a) (3 puntos) Considere el siguiente problema de optimización:

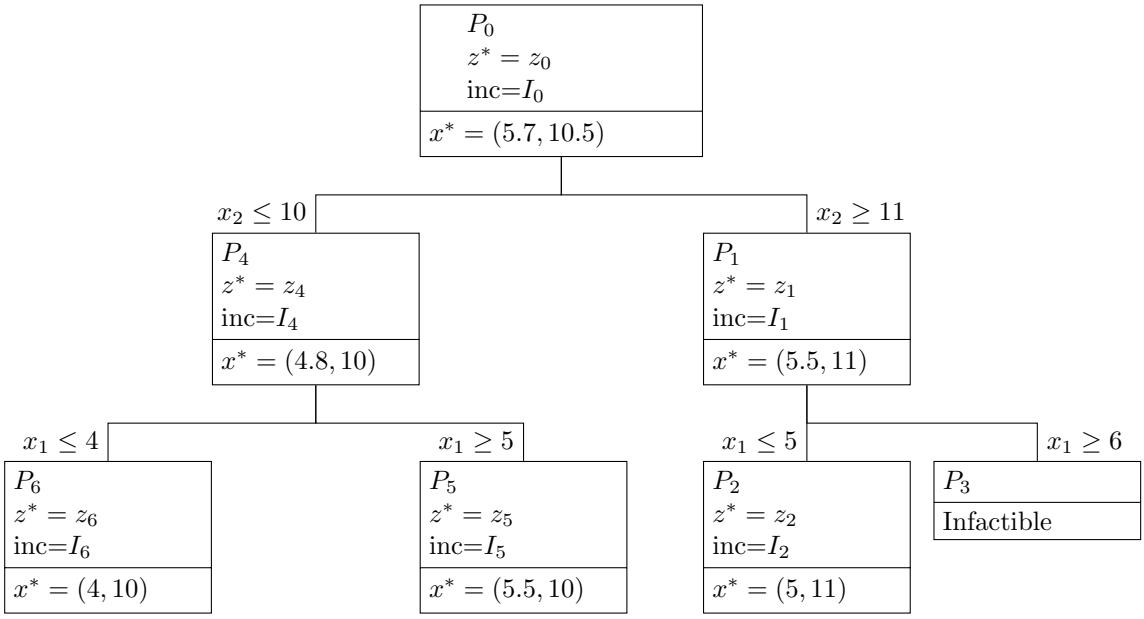
$$P) \qquad \text{máx} \quad \frac{1}{x^2 + y^2 - 6x + 6y + k}$$

$$s.a.$$

$$\begin{array}{rcl} 2x + y & \geq & 2 \\ x^2 - 2x + y^2 & \leq & 15 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}$$

Determine para que valores de k se puede asegurar que el problema tiene solución óptima.

b) (3 puntos) Suponga que ya resolvió un problema de optimización entero con el algoritmo de B&B. El árbol de resolución es el siguiente:



con z^* el valor óptimo de cada problema relajado e I_j el incumbente actualizado después de resolver el suproblema P_j. Suponga que el subproblema P_j fue el j-ésimo nodo en resolverse. Indique qué relaciones de desigualdad se pueden asegurar sobre todos los I_j y z_j. ¿Se resolvió con un enfoque de profundidad o amplitud?

c) (5 puntos) Encuentre un equivalente lineal para las siguientes restricciones:

i) (1 punto) $x_{ij}(y_i + 2 - y_j) \leq 0, \forall i, j \in N$

ii) (2 puntos) $x_{ij} \leq \max_{i', j' \in N} \{y_{i'} - y_{j'}\}, \forall i, j \in N$

iii) (2 puntos) $z_{ij} \geq \max_{i', j' \in N : i < j} \{|y_{j'} - y_{i'}|\}, \forall i, j \in N$

Asuma que las variables y_{ij}, z_{ij} son continuas, mientras que x_{ij} es binaria. Puede crear nuevas variables auxiliares si lo considera necesario.

d) (3 puntos) Demuestre que en un problema de optimización lineal, los multiplicadores de Lagrange son iguales a las variables duales en el óptimo del problema dual.

Solución Problema 1.

a) Para asegurar que el problema tiene solución óptima, se deben cumplir las siguientes condiciones:

- ◇ Dominio Cerrado:Ya que las restricciones no son desigualdades estrictas, si no que del tipo mayor o igual.
- ◇ Dominio no vacío: Ya que existe al menos un punto que pertenece al dominio D, por ejemplo (0,2).
- ◇ Dominio acotado: Se puede comprobar que las variables son acotadas, a partir de las 3 restricciones.
- ◇ Función objetivo continua: Depende del valor que tome k

El denominador de la función objetivo se puede reescribir como: $(x-3)^2+(y+3)^2+k-18$, lo que equivale a una circunferencia centrada $(3,-3)$ con radio $\sqrt{18-k}$. Entonces, para que la función objetivo sea continua se debe cumplir que los puntos del dominio nunca alcancen el radio de la circunferencia, pues en dicho caso

Por las restricciones del problema, x e y deben ser mayores que cero, por lo tanto, se deben considerar puntos de la circunferencia que sí pertenezcan al dominio. Entonces, el radio de la circunferencia debe ser mayor que 3, para que en el eje y se alcancen los números positivos, cumpliendo con la restricción de signo y con el hecho de ser una función que no se hace cero (no se indetermina el problema). De esto:

$$\sqrt{18-k} < 3 \Longrightarrow 18-k < 9 \Longrightarrow k > 9$$

Este análisis hace sentido si se piensa que para que el radio sea menor a 3, 18 – k debe ser menor que 9, de hecho si k = 9 el problema se indefine.

c) *i*) $y_i + 2 \leq y_j + M(1-x_{ij}), \forall i,j \in N$

ii)
- ◇ ω_{ij}: Variable binaria que vale 1 si el par (i,j) corresponde a $y_i - y_j = \underset{i',j' \in N: i'<j'}{\text{máx}} \{y_{i'} - y_{j'}\}$
- ◇ $\sum_{i \in N} \sum_{j \in N: i<j} \omega_{ij} = 1$
- ◇ $y_i - y_j x_{ij} \leq (y_{j'} - y_{i'}) - M(1-\omega_{i'j'}), \forall i,i',j,j' \in N$
- ◇ $y_j - y_i \geq y_{j'} - y_{i'} - M(1-\omega_{ij}), , \forall i,i',j,j' \in N$

iii) $z_{ij} \geq y_{j'} - y_{i'}, \forall i,j \in N, \forall i',j' \in N$

c) Dependiendo de si el problema es de minimización o maximización habrán distintas relaciones. Suponiendo que se está minimizando:

- ◇ $I_0 = \infty = I_1$
- ◇ $z_0 \leq z_1 \leq z_4 < z_2 = I_2 = I_4 = I_5 < z_5$
- ◇ $z_4 \leq I_6 \leq z_6$
- ◇ $I_6 \leq I_5$

En caso de que sea un problema de maximización, las relaciones (y los signos) se invierten.

d) Sin perder generalidad, suponga que el problema lineal está en su forma estándar:

$$\begin{array}{lll} P) & \text{máx} & c^T x \\ s.a. & & \\ & Ax & = \quad b \\ & x & \geq \quad 0 \end{array}$$

Planteando el Lagrangeano del problema:

$$L(x,\lambda) = c^T x + \pi\,(b-x)$$

Con esto, las condiciones de KKT quedan:

$$\frac{\partial L}{\partial x} \geq 0 \rightarrow c^T - \pi^T A \geq 0 \quad (1)$$

$$x\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow x\left(c^T - \pi^T A\right) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi} \leq 0 \rightarrow b - Ax \leq 0 \quad (3)$$

$$\pi\frac{\partial L}{\partial \pi} = 0 \rightarrow \pi\left(b - A^T x\right) = 0 \quad (4)$$

$$x \geq 0 \quad (5)$$

Esto quiere decir que:

$$c_j - \pi^T A_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$
$$c_j - \pi^T A_j = 0, j : x_j > 0$$

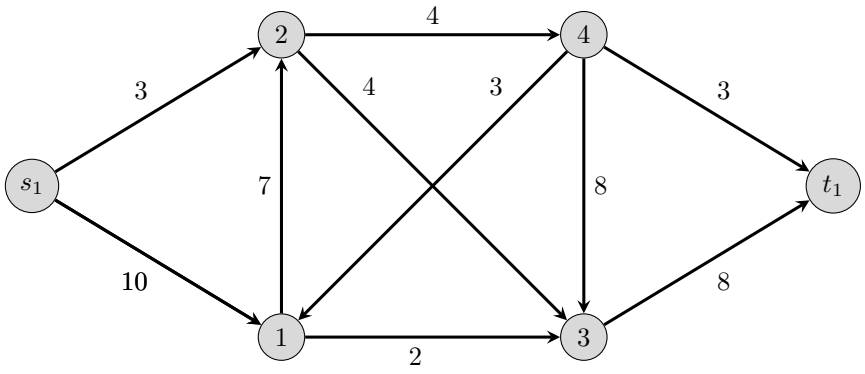
que son precisamente las conciones de optimalidad de Simplex. Entonces, las condiciones de KKT definen ecuaciones de holgura complementaria con π las variables duales, y se demuestra lo pedido.

Problema 2. (17 puntos)

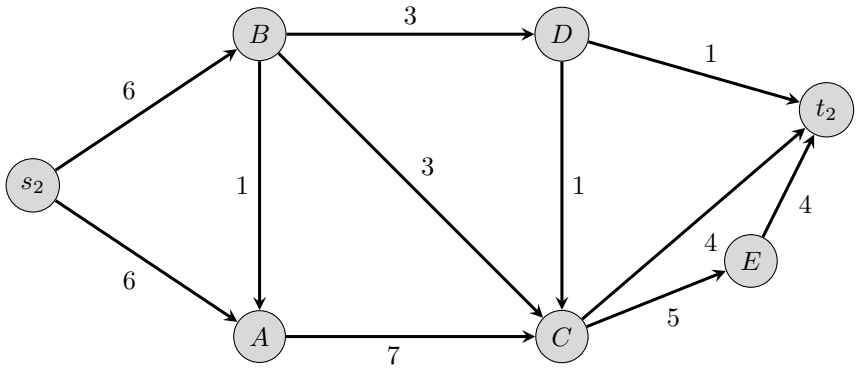
a) (3 puntos) La vigésima primera edición de la Copa Mundial de Fútbol masculina organizada por la FIFA comenzó el pasado 14 de junio y finalizará el 15 de julio. Un amigo suyo, empresario nacional, posee solo dos bodegas donde guarda insumos: una en Taltal en el norte de Chile y otra en Curacautín en el sur de Chile. Su amigo, experto en negocios, hace un tiempo compró camisetas de fútbol para vender en esta fecha, las que guardó en sus respectivas bodegas.

Dado que Rusia ganó 5-0 a Arabia Saudita durante el partido inaugural, la demanda de camisetas de esta selección en el norte y sur de Chile aumentó considerablemente, por lo que desde grandes tiendas de Antofagasta y Temuco le están pidiendo camisetas de Rusia.

En el siguiente grafo, se muestra la cantidad máxima de camisetas que puede trasladar desde Taltal hasta Antofagasta:

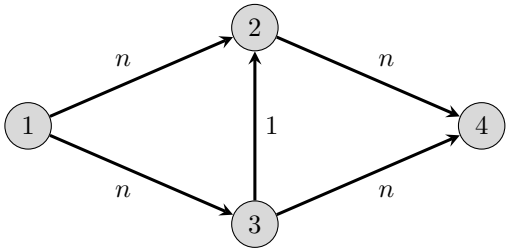


Por otro lado, en el siguiente grafo se muestra la cantidad máxima de camisetas que se pueden trasladar desde Curacautín hasta Temuco:



Usted decide ayudar a su amigo a realizar la distribución de camisetas desde sus bodegas haciendo uso del algoritmo de Ford & Fulkerson. Sin embargo, debe considerar que usted dispone del tiempo para ejecutar **sólo una** vez el algoritmo. Plantee el problema de flujo máximo a resolver, de manera de realizar la distribución de camisetas bajo la condición antes descrita (ejecutar sólo una vez el algoritmo), y apoyando su resultado con un grafo. Además, compruebe el Teorema de Ford–Fulkeroson, que indica que el máximo valor de flujo (si existe) que se puede enviar desde el origen al destino es igual a la capacidad de un corte mínimo.

b) (2 puntos) Dada la siguiente red, a través del algoritmo de Ford & Fulkerson, **en el peor de los casos**, ¿cuántas iteraciones se deberán realizar para llegar al resultado óptimo? Considere n un número muy grande.



c) (5 puntos) Alejandra ha decidido implementar un nuevo negocio. En esta oportunidad, se dedicará a introducir un nuevo producto al mercado de un pequeño país, llamado Pelton. Este país consta de 8 ciudades y Alejandra debe descubrir la forma de transportar sus productos desde la ciudad A a la ciudad H de forma que se minimice la distancia que recorran sus camiones de distribución. Para esto, ella cuenta con la siguiente tabla de información acerca de las distancias entre las ciudades que conectan a las ciudades A y H:

Ciudades	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	62	88	-	-	-	49	-
B	-	-	48	-	75	-	-	-
C	-	-	-	13	46	-	-	-
D	-	-	-	-	32	30	-	-
E	-	-	-	-	-	-	-	40
F	-	-	-	-	5	-	-	45
G	-	-	-	-	-	83	-	-
H	-	-	-	-	-	-	-	-

i) (1 punto) Encuentre un grafo que describa la distancia existente entre todas las ciudades del país Pelton.

ii) (2 puntos) Utilizando el algoritmo de Dijkstra, encuentre el árbol de rutas mínimas asociado a la ciudad A de este país. Además, encuentre la ruta que Alejandra debería utilizar para el transporte de su mercadería.

iii) (2 puntos) Dado el problema planteado de ruta más corta, transfórmelo a un problema de flujo a costo mínimo y considere la ruta A–G–F–E–H para realizar una iteración del algoritmo Simplex especializado en redes.

d) (2 puntos) Suponga una grafo con un nodo s desde el cual se puede llegar al resto de la red. ¿Siempre es posible encontrar la ruta más corta desde s al resto de los nodos utilizando el algoritmo de Dijkstra? Justifique. Si su respuesta es no, nombre y describa de forma general un algoritmo que funcione en estos casos.

e) (5 puntos) Considere el siguiente problema de optimización de flujo a costo mínimo:

$$
\begin{aligned}
\text{mín}\ & 4x_{A1} + 3x_{A2} + 3x_{A3} + x_{B1} + 4x_{B2} + 4x_{B3} + 4x_{C1} + 5x_{C2} + 6x_{C3} + 3x_{D1} + 4x_{D2} + 3x_{D3} \\
\text{s.a.}\ & x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} = 10 \\
& x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} = 10 \\
& x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} = 4 \\
& x_{D1} + x_{D2} + x_{D3} = 6 \\
& -x_{A1} - x_{B1} - x_{C1} - x_{D1} = -12 \\
& -x_{A2} - x_{B2} - x_{C2} - x_{D2} = -12 \\
& -x_{A3} - x_{B3} - x_{C3} - x_{D3} = -6 \\
& x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{C1}, x_{C2}, x_{C3}, x_{D1}, x_{D2}, x_{D3} \geq 0
\end{aligned}
$$

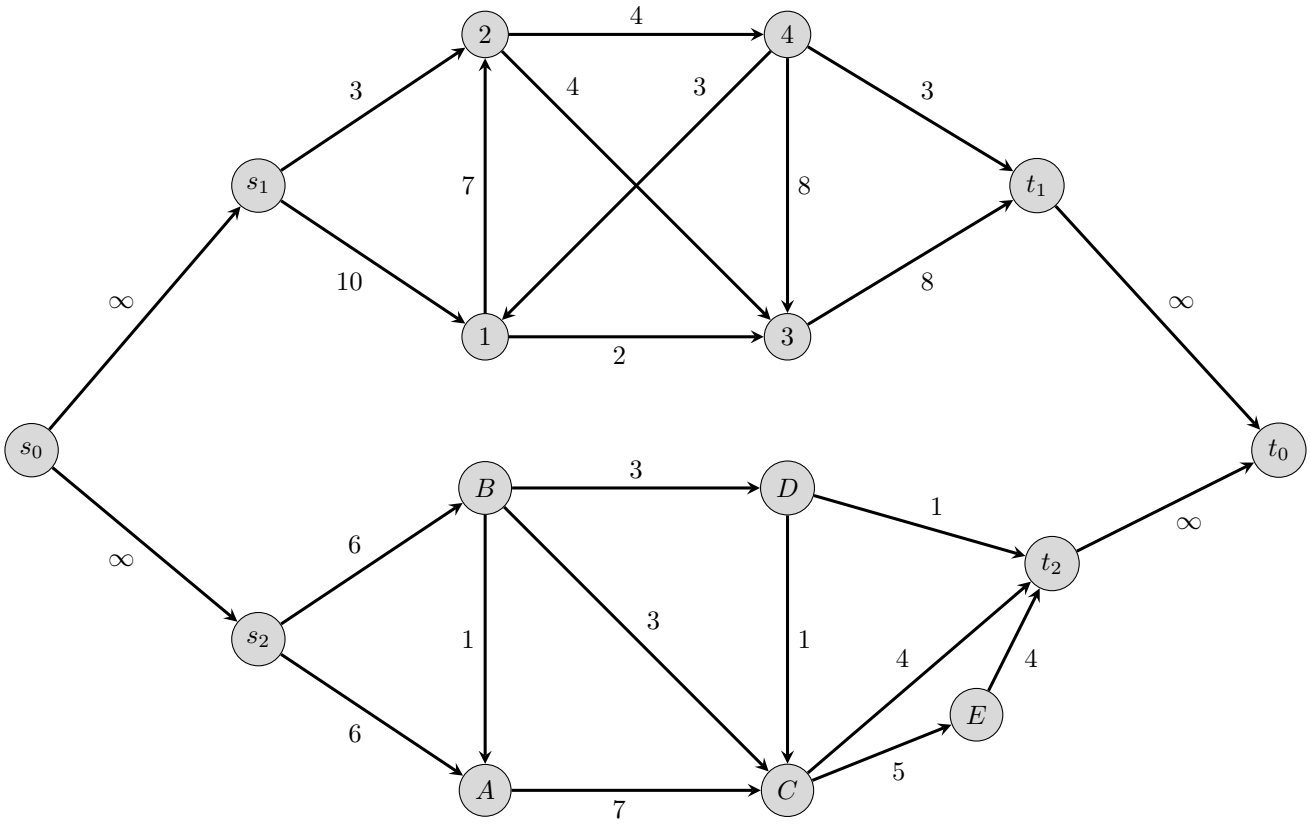
i) (1 punto) Encuentre el grafo asociado a la matriz de incidencia nodo arco.

ii) (2 puntos) Se sabe que el grafo tiene la base factible $x_{A1}, x_{A2}, x_{B1}, x_{B3}, x_{C2}, x_{D2}$. Además, realizando el criterio de optimalidad, se encuentra que la variable x_{D3} debe entrar a la base. Encuentre la nueva distribución de flujos en la red según el algoritmo de Simplex especializado en redes.

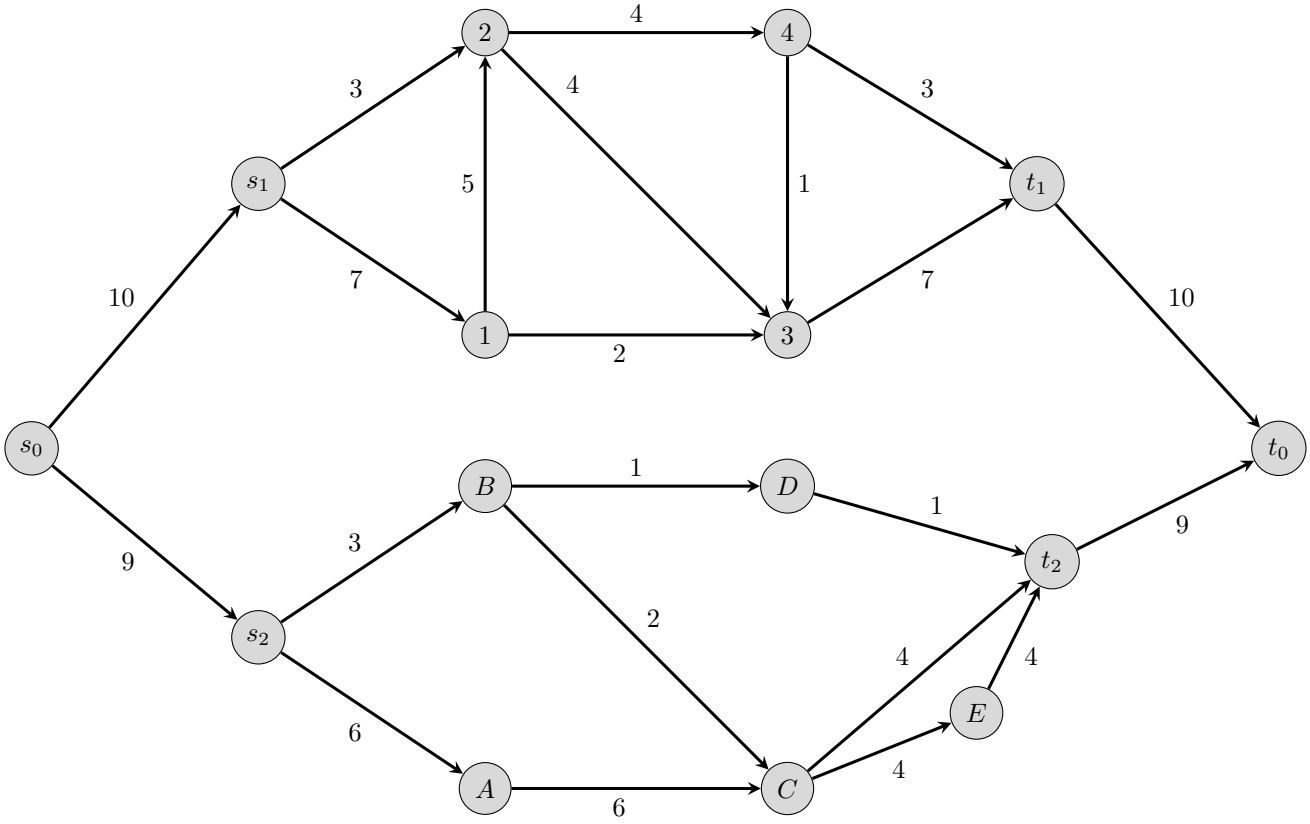
iii) (2 puntos) A partir del árbol básico asociado a la nueva asignación de flujo encontrada en ii) encuentre el óptimo del problema.

Solución Problema 2.

a) El grafo que resume el problema de flujo máximo para la distribución de camisetas es:

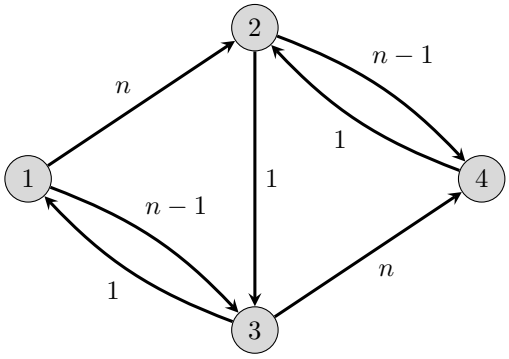


La distribución de flujo óptima para la empresa será:

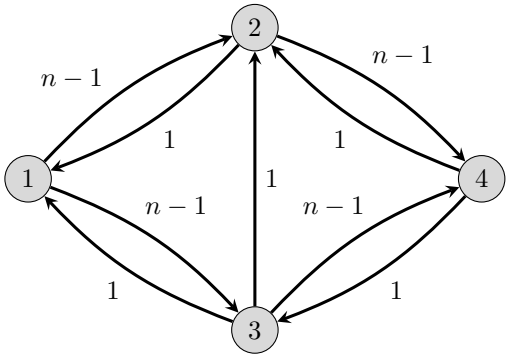


Con un flujo máximo de $F = 19$, enviando 10 camisetas desde la bodega en Taltal hasta Antofagasta y 9 desde Curacautín a Temuco. En el grafo anterior, el flujo máximo estará asociado al corte mínimo dado por $S = \{s_0, s_1, s_2, 1, 2, B, A, C, D, E\}$, $T = \{4, 3, t_1, t_2, t_0\}$ con capacidad 19.

b) El algoritmo funcionará de la siguiente forma:
Iteración 1:

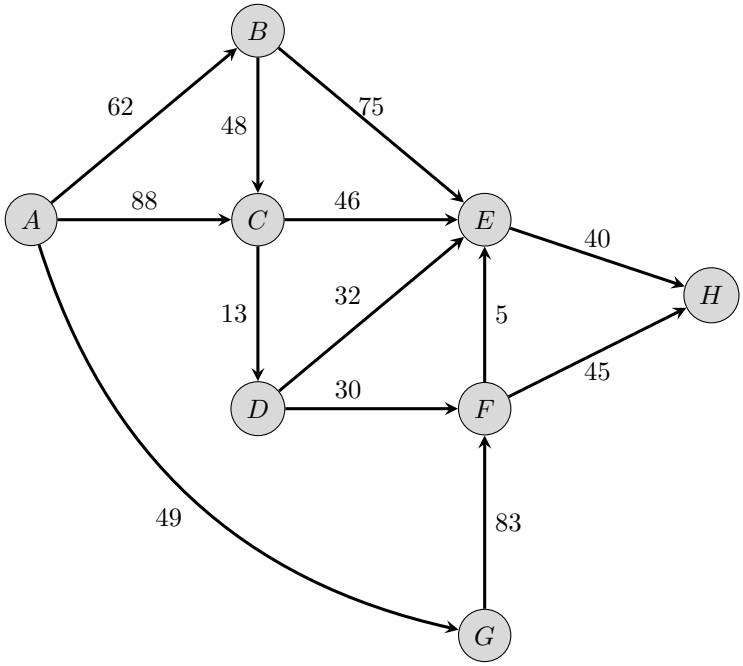


Iteración 2:



De esta forma, es claro ver que el algoritmo en el peor de los casos iterará 2*n veces.

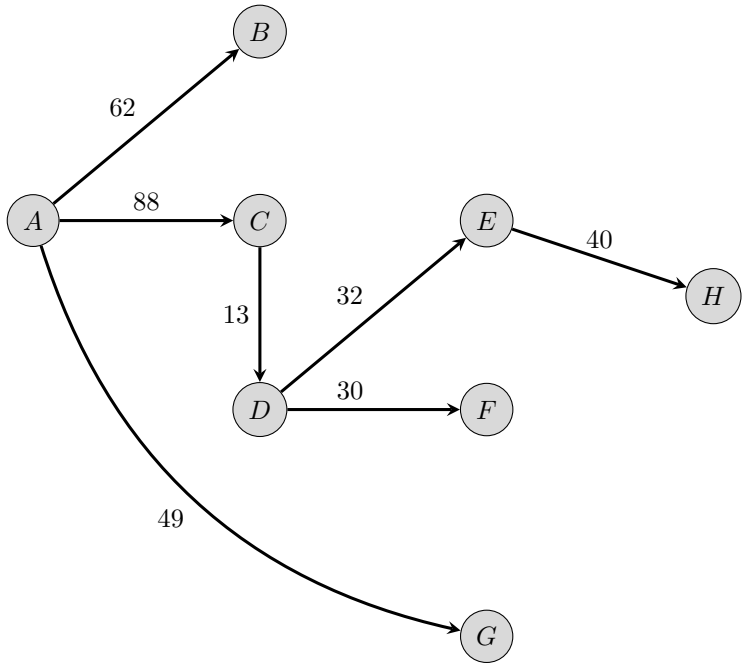
c) *i*) El grafo que describe las distancias del país Pelton es



ii) La tabla con las iteraciones del Algoritmo de Dijkstra corresponde a

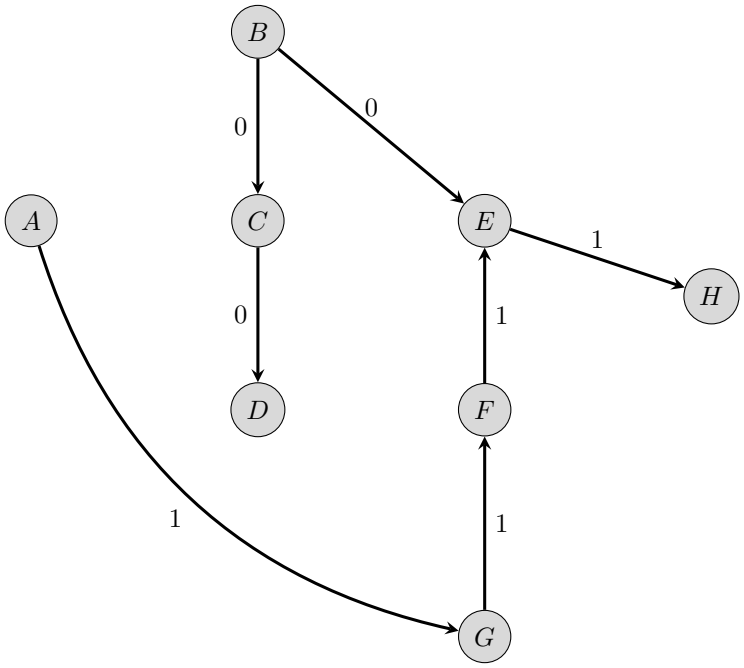
Nodo	Inicio	It 1	It 2	It 3	It 4	It 5	It 6	It 7	It 8
A	$(0,-)$	-	-	-	-	-	-	-	-
B	$(\infty,-)$	$(62,A)$	$(62,A)$	-	-	-	-	-	-
C	$(\infty,-)$	$(88,A)$	$(88,A)$	$(88,A)$	-	-	-	-	-
D	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(101,C)$	-	-	-	-
E	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(137,B)$	$(134,C)$	$(133,D)$	$(133,D)$	-	-
F	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(132,G)$	$(132,G)$	$(132,G)$	$(131,D)$	-	-	-
G	$(\infty,-)$	$(49,A)$	-	-	-	-	-	-	-
H	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(176,F)$	$(173,E)$	-
	-	A	G	B	C	D	F	E	H

Con lo que el árbol de rutas mínimas queda:



A partir de esto, se obtiene que la ruta mínima para llegar desde la ciudad A a la ciudad H es $A-C-D-E-H$ con una distancia mínima de 173.

iii) Para resolver este problema utilizando Simplex en redes es necesario adecuar el grafo a uno de flujo a costo mínimo. Para esto, agregamos una oferta de 1 en el nodo A y una demanda de -1 en el nodo H. Se pide realizar una iteración del algoritmo partiendo de la base formada por los flujos $f_{AG}=1, f_{GF}=1, f_{FE}=1$ y $f_{EH}=1$. Sin embargo, es necesario agregar otros flujos a la base para poder realizar el algoritmo, ya que se requiere que un árbol básico corresponda a un árbol generador. Así, se escogerán arbitrariamente los flujos $f_{BC}=0$, $f_{BE}=0$ y $f_{CD}=0$ como variables básicas. Con esto, se obtiene el árbol básico:



De esta forma, se calculan los valores de las variables duales mediante el sistema:

$$c_{AG} = \pi_A - \pi_G = 49$$
$$c_{CD} = \pi_C - \pi_D = 13$$
$$c_{BC} = \pi_B - \pi_C = 48$$
$$c_{BE} = \pi_B - \pi_E = 75$$
$$c_{FE} = \pi_F - \pi_E = 5$$
$$c_{GF} = \pi_G - \pi_F = 83$$
$$c_{EH} = \pi_E - \pi_H = 40$$

Escogiendo la variable $\pi_H = 0$ obtenemos los valores de las variables duales:

$$\pi_A = 177, \pi_B = 115, \pi_C = 67, \pi_D = 54, \pi_E = 40, \pi_F = 45, \pi_G = 128$$

Comprobamos si estamos en el óptimo calculando los costos reducidos asociados a las variables no básicas

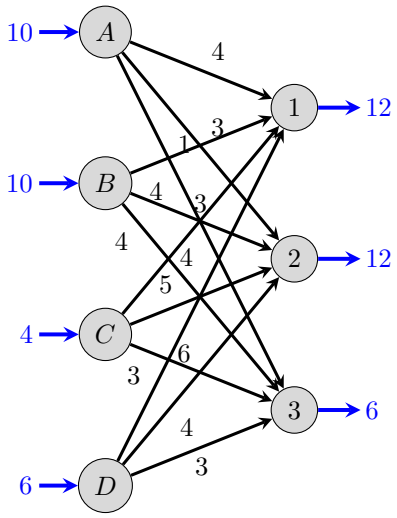
$$\bar{c}_{AC} = c_{AC} - \pi_A + \pi_C = 88 - 177 + 67 = -22 < 0$$
$$\bar{c}_{AB} = c_{AB} - \pi_A + \pi_B = 62 - 177 + 115 = 0$$
$$\bar{c}_{CE} = c_{CE} - \pi_C + \pi_E = 46 - 67 + 40 = 19$$
$$\bar{c}_{DE} = c_{DE} - \pi_D + \pi_E = 32 - 54 + 40 = 18$$
$$\bar{c}_{FH} = c_{FH} - \pi_F + \pi_H = 45 - 45 + 0 = 0$$
$$\bar{c}_{DF} = c_{DF} - \pi_D + \pi_F = 30 - 54 + 45 = 21$$

Como $\bar{c}_{AC} < 0$, no estamos en el óptimo y f_{AC} debe entrar a la base.

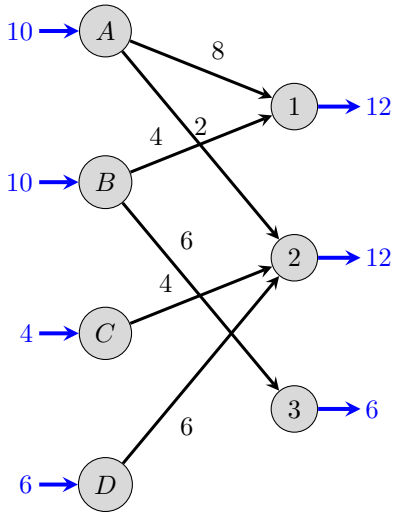
d) No siempre se puede utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar la ruta más corta desde el nodo s a cualquier otro, ya que este algoritmo no funciona cuando existe uno o más arcos con costos negativos. Esto ocurre ya que al priorizar siempre el nodo de menor distancia, se podrían dejar de considerar arcos "futuros"que disminuyeran la distancia total al tener costo negativo. En estos casos, se puede utilizar

el algoritmo de Bellman-Ford. Este algoritmo permite resolver problemas de ruta más corta con costos negativos y además, puede encontrar ciclos negativos en el grafo. Este algoritmo parte de un nodo específico y relaja todos los arcos $N-1$ veces, con N número de nodos del problema. De esta forma, este toma más tiempo en encontrar el camino óptimo que el algoritmo de Dijkstra, pero es capaz de resolver problemas cuando se presentan pesos negativos.

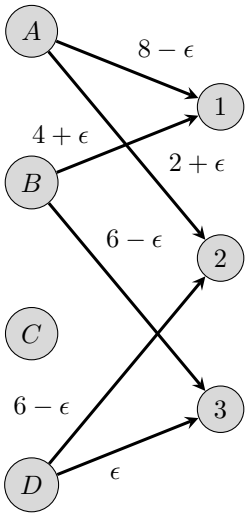
e) *i)* El grafo representado por la matriz de incidencia nodo arco es



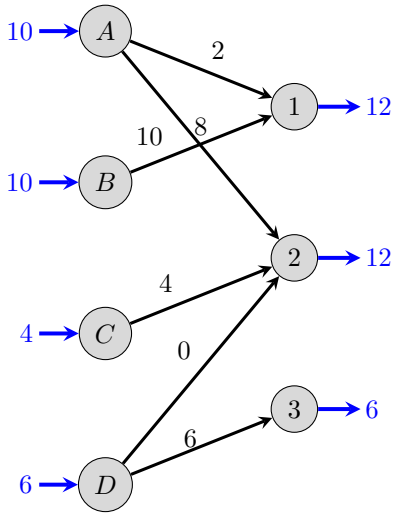
ii) El grafo que representa la solución básica entregada es



Sabemos que entra la variable x_{D3} a la base. Para encontrar la variable que debe salir de la sala se forma el siguiente ciclo:



Con lo que $\epsilon = 6$. Dado esto, podrán salir de la base tanto la variable x_{B3} como x_{D2}. Arbitrariamente, sacaremos al arco $B3$ de la base. De esta forma, se obtiene la siguiente distribución de flujos:



iii) En primer lugar, utilizando los costos reducidos de las variables básicas buscamos los valores de las variables duales

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (\pi_i - \pi_j)$$

Para variables básicas tenemos que

$$\bar{c}_{ij} = 0$$

$$c_{ij} = \pi_i - \pi_j$$

Luego, se obtiene el sistema

$$c_{A1} = \pi_A - \pi_1 = 4$$

$$c_{A2} = \pi_A - \pi_2 = 3$$

$$c_{B1} = \pi_B - \pi_1 = 1$$

$$c_{C2} = \pi_C - \pi_2 = 5$$

$$c_{D2} = \pi_D - \pi_2 = 4$$

$$c_{D3} = \pi_D - \pi_3 = 3$$

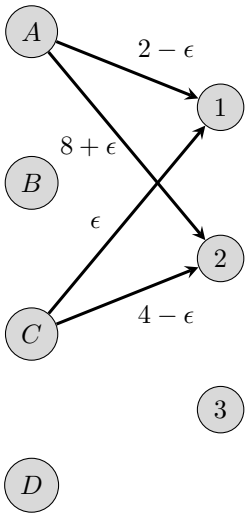
Escogemos $\pi_1 = 0$, con lo que obtenemos los valores de las variables duales:

$$\pi_1 = 0, \pi_A = 4, \pi_B = 1, \pi_C = 6, \pi_D = 5, \pi_2 = 1, \pi_3 = 2$$

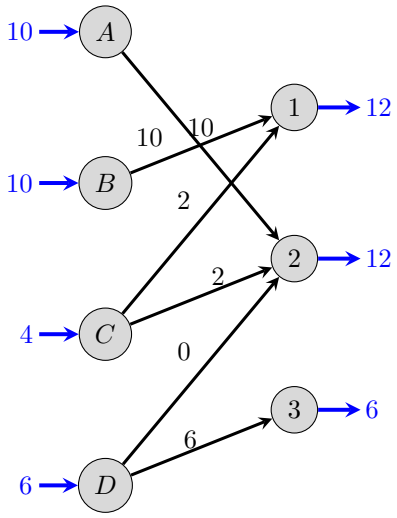
Para comprobar si estamos en el óptimo, calculamos los costos reducidos asociados a las variables no básicas:

$$\bar{c}_{A3} = c_{A3} - (\pi_A - \pi_3) = 3 - 4 + 2 = 1$$
$$\bar{c}_{B2} = c_{B2} - (\pi_B - \pi_2) = 4 - 1 + 1 = 4$$
$$\bar{c}_{B3} = c_{B3} - (\pi_B - \pi_3) = 4 - 1 + 2 = 5$$
$$\bar{c}_{C1} = c_{C1} - (\pi_C - \pi_1) = 4 - 6 + 0 = -2 < 0$$
$$\bar{c}_{C3} = c_{C3} - (\pi_C - \pi_3) = 6 - 6 + 2 = 2$$
$$\bar{c}_{D1} = c_{D1} - (\pi_D - \pi_1) = 3 - 5 + 0 = -2 < 0$$

Como tenemos dos costos reducidos negativos, tenemos que seguir iterando. Escogemos a la variable x_{C1} para que entre a la base. Para encontrar la variable que sale, se forma el siguiente ciclo:



Observando el grafo anterior, notamos que $\epsilon = 2$, por lo que sale el arco $A1$ de la base. Con esto, se obtiene la distribución de flujos para la siguiente iteración:



Considerando los costos reducidos de las variables básicas, se obtiene el sistema:

$$c_{C1} = \pi_C - \pi_1 = 4$$
$$c_{A2} = \pi_A - \pi_2 = 3$$
$$c_{B1} = \pi_B - \pi_1 = 1$$
$$c_{C2} = \pi_C - \pi_2 = 5$$
$$c_{D2} = \pi_D - \pi_2 = 4$$
$$c_{D3} = \pi_D - \pi_3 = 3$$

Escogemos $\pi_2 = 0$, con lo que obtenemos los valores de las variables duales:

$$\pi_2 = 0, \pi_A = 3, \pi_B = 2, \pi_C = 5, \pi_D = 4, \pi_1 = 1, \pi_3 = 1$$

Para comprobar si estamos en el óptimo, calculamos los costos reducidos asociados a las variables no básicas:

$$\bar{c}_{A3} = c_{A3} - (\pi_A - \pi_3) = 3 - 3 + 1 = 1$$
$$\bar{c}_{B2} = c_{B2} - (\pi_B - \pi_2) = 4 - 2 + 0 = 2$$
$$\bar{c}_{B3} = c_{B3} - (\pi_B - \pi_3) = 4 - 2 + 1 = 3$$
$$\bar{c}_{A1} = c_{A1} - (\pi_A - \pi_1) = 4 - 3 + 1 = 2$$
$$\bar{c}_{C3} = c_{C3} - (\pi_C - \pi_3) = 6 - 5 + 1 = 2$$
$$\bar{c}_{D1} = c_{D1} - (\pi_D - \pi_1) = 3 - 4 + 1 = 0$$

Como todos los costos reducidos son ≥ 0, nos encontramos en el óptimo del problema, con un valor óptimo correspondiente a 76.

Problema 3. (17 puntos)

a) (7 puntos) Considere el siguiente problema de optimización no lineal restricto:

$$P) \qquad \text{mín} \quad x_1 - x_2$$
$$s.a.$$
$$\begin{aligned} (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 &\leq 2 \\ x_1 &\leq 1+\sqrt{2} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

i) (2 puntos) Analice la regularidad del dominio

ii) (4 puntos) Plantee las condiciones de KKT y encuentra la solución óptima

iii) (1 puntos) Suponga que el lado derecho de la primera restricción aumenta en un valor δ marginal, ¿cuánto cambiaría el valor óptimo de la función objetivo?

b) (5.5 puntos) Considere el siguiente problema de optimización no lineal irrestricto:

$$P) \qquad \text{mín} \quad x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y$$

i) (4 puntos) Resuelva el problema utilizando el método del Gradiente y el método de Newton básico (sin minimización unidimensional), partiendo del punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$. ¿Cuál converge más rápido? ¿Por qué?
Nota: Resuelva hasta obtener una convergencia de al menos $\|x_{k+1} - x_k\| \leq 20\,\%$

ii) (1.5 puntos) Encuentre una expresión general para la iteración k del método del Gradiente.

c) (4.5 puntos) Justificando rigurosamente, determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) (1.5 puntos) Asumiendo condiciones de regularidad en todo el dominio de un problema se asegura la optimalidad para cualquier punto que cumpla las condiciones de KKT en este problema

ii) (1.5 puntos) Si es que se llega a una convergencia del 0 % entre las soluciones sucesivas del método del gradiente, entonces se puede asegurar que se está en un óptimo local

iii) (1.5 puntos) En un problema de optimización, el valor del multiplicador de Lagrange correspondiente a cierta restricción indica cuánto cambiará la función objetivo por un cambio marginal en el lado derecha de dicha restricción

Solución Problema 3.

a) *i*) El dominio del problema es el siguiente:

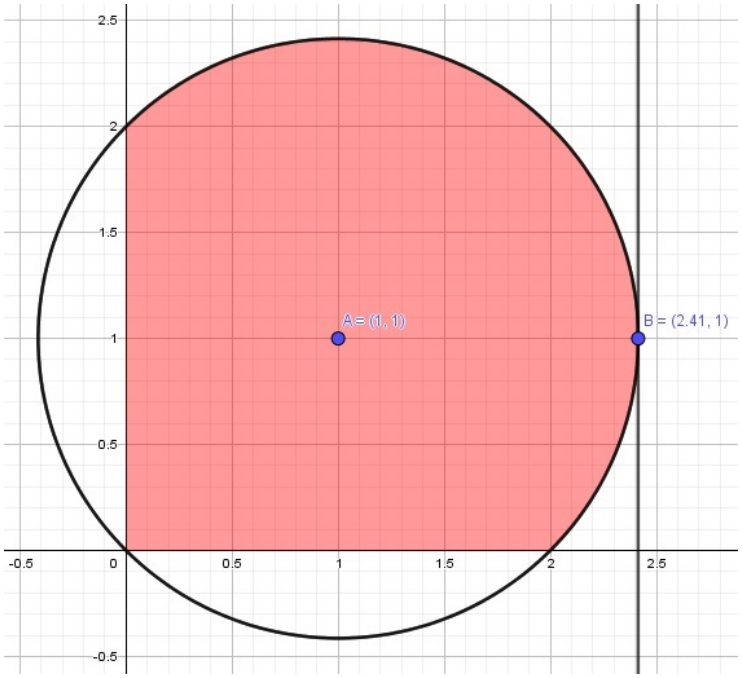


Figura 1: Dominio 3.a)

Para analizar la regularidad del dominio debe calcularse el jacobiano de las restricciones:

$$J = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 & 2x_2 - 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las filas 2 y 3 son LD, sin embargo, no existe ningún punto en que la restricción 2 y la restricción $x_1 \geq 0$ estén activas en conjunto, por lo que la regularidad del dominio no se ve comprometida por estas restricciones.

Con respecto a la fila 1 será LD con otras filas para: $2x_1 - 2 = 0$ y $2x_2 - 2 = 0$. La primera condición se cumple si $x_1 = 1$, y como la restricción 1 debe estar activa $x_2 = 1 \pm \sqrt{2}$. En ninguno de los dos puntos hay más restricciones activas, por lo que el dominio es regular para estos valores. La segunda condición se cumple si $x_2 = 1$ y $x_1 = 1 \pm \sqrt{2}$. En el caso del punto $(1, 1 \pm \sqrt{2})$ la restricción 1 y 2 son LD y están activas, por lo tanto, es el único punto no regular del dominio. En otras palabras, no se puede asegurar que en ese punto se cumplan las condiciones de KKT. En el gráfico se puede ver que este punto corresponde al punto B), en el que efectivamente están ambas restricciones activas.

ii) El Lagrangeano del problema es el siguiente:

$$L(x,\lambda) = x_1 - x_2 + \lambda_1\left((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - 2\right) + \lambda_2\left(x_1 - 1 - \sqrt{2}\right)$$

Y las condiciones de KKT quedarán:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \geq 0 \rightarrow 1 + 2\lambda_1(x_1-1) + \lambda_2 \geq 0 \tag{6}$$
$$x_1\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow x_1\left(1 + 2\lambda_1(x_1-1) + \lambda_2\right) = 0 \tag{7}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} \geq 0 \rightarrow -1 + 2\lambda_1(x_2-1) \geq 0 \tag{8}$$
$$x_2\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow x_2(-1 + 2\lambda_1(x_2-1)) = 0 \tag{9}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \leq 0 \rightarrow (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - 2 \leq 0 \tag{10}$$
$$\lambda_1\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \rightarrow \lambda_1\left((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - 2\right) = 0 \tag{11}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \leq 0 \rightarrow x_1 - 1 - \sqrt{2} \leq 0 \tag{12}$$
$$\lambda_2\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \rightarrow \lambda_2\left(x_1 - 1 - \sqrt{2}\right) = 0 \tag{13}$$
$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \tag{14}$$

Supongamos que $x_1 = x_2 = 0$. En este caso, $\lambda_2 = 0$ por (8), pero $\lambda_1 \leq -\frac{1}{2}$ por (3), lo que es imposible por (9). Tomando $x_1 = 0$ y $x > 0$, necesariamente $\lambda_2 = 0$ por (8). Además, $2\lambda_1(x_2-1) = 1$ por (4), por lo tanto, $\lambda_1 > 0$ y $x_2 = 2$ por (6). Luego, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.
Finalmente, se puede comprobar que el punto $X^* = (x_1, x_2) = (0, 2)$ y $(\lambda_1, \lambda_2) = (\frac{1}{2}, 0)$ satisface todas las condiciones de KKT y que además es un punto regular. Notando esto más el hecho que el dominio es no vacío y que la función objetivo y el dominio son convexos, se concluye que X^* es el óptimo de P)

iii) El cambio en la función objetivo por una variación marginal en el lado derecho de la restricción 1, se puede estimar como su respectivo multiplicador de Lagrange. Es decir, el cambio será $\lambda_1\delta = \frac{\delta}{2}$.

b) *i*) Primero calculamos el gradiente de la función objetivo para todo el dominio:
$\nabla f(x,y) = (2x - 2y, 4y - 2x - 2)$

Evaluando en $(x_0, y_0) = (0, 0)$ el gradiente es $\nabla f(x_0, y_0) = (0, -2)$.
Con lo que $(x_1, y_1) = (0, 0) - \lambda_1(0, -2) = (0, 2\lambda_1)$
Resolviendo el problema:

$$\text{mín} \qquad 8\lambda_1^2 - 4\lambda_1$$

Se encuentra $\lambda_1 = \frac{1}{4}$. Finalmente, $(x_1, y_1) = (0, \frac{1}{2})$. La convergencia es: $\|X_1 - X_0\| = 0.5 > 0.2$, por lo que se debe seguir iterando.
Evaluando en $(x_1, y_1) = (0, \frac{1}{2})$ el gradiente es $\nabla f(x_1, y_1) = (-1, 0)$.
Con lo que $(x_2, y_2) = (0, \frac{1}{2}) - \lambda_2(-1, 0) = (\lambda_2, \frac{1}{2})$
Resolviendo el problema:

$$\text{mín} \qquad -\lambda_2 - 1 + \lambda_2^2 + \frac{1}{2}$$

Se encuentra $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Finalmente, $(x_2, y_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La convergencia es: $\|X_2 - X_1\| = 0.25 > 0.2$, por lo que se debe seguir iterando.

Evaluando en $(x_2, y_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ el gradiente es $\nabla f(x_2, y_2) = (0, -1)$.
Con lo que $(x_3, y_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - \lambda_3(0, -1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \lambda_3)$
Resolviendo el problema:

$$\text{mín} \qquad 2\lambda_3^2 - \lambda_3 - \frac{3}{4}$$

Se encuentra $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. Finalmente, $(x_3, y_3) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. La convergencia es: $\|X_3 - X_2\| = 0.25 > 0.2$, por lo que se debe seguir iterando.
Siguiendo de esta forma: $(x_4, y_4) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}), (x_5, y_5) = (\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$ y se llega a la convergencia esperada: $\|X_5 - X_4\| = 0.125 < 0.2$.
Ahora, para resolver con el método de Newton, se deben plantear las siguientes ecuaciones:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [H_{f(x)}]^{-1} \nabla f(x^{(k)})$$

En este caso,la primera iteración quedará (partiendo del origen):

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2x^{(0)} - 2y^{(0)} \\ 4y^{(0)} - 2x^{(0)} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De las ecuaciones, se puede ver que independiente del valor de x e y el resultado siempre será $(1, 1)$, por lo tanto, se ha llegado al óptimo.
Claramente, el método de Newton converge más rápidamente (en menos iteraciones), pues en una iteración se llega al óptimo. Esto se debe a que el método de Newton en problemas cuadráticos siempre llega al óptimo en sólo una iteración porque tiene convergencia cuadrática.

ii) Generalizando se obtienen las siguientes expresiones. Si k es par,

$$\bar{x}_k = \left(\frac{2^{\frac{k}{2}} - 1}{2^{\frac{k}{2}}}, \frac{2^{\frac{k}{2}} - 1}{2^{\frac{k}{2}}} \right)$$

Si k es impar,

$$\bar{x}_k = \left(\frac{2^{\frac{k-1}{2}} - 1}{2^{\frac{k-1}{2}}}, \frac{2^{\frac{k+1}{2}} - 1}{2^{\frac{k+1}{2}}} \right)$$

c) i) Esta afirmación es falsa. Basta tomar como contraejemplo cualquier problema no convexo que tenga dos óptimos locales: $P = \{\text{mín} -x^2 : x \geq -1, x \leq 2\}$. Se puede comprobar que los puntos $x = -1$ y $x = 2$ cumplen las condiciones de KKT, sin embargo, sólo $x = 2$ es el óptimo del problema.

ii) Esta afirmación es verdadera. Si es que se llega a una convergencia del 0 % en la iteración $k + 1$, significa que $x_k = x_{k-1}$. Ahora, asumiendo un problema de minimización, supongamos que x_k no es óptimo local, esto quiere decir que existe una dirección factible de crecimiento para este punto, en particular, $-\nabla f(x_k) < 0$. Ahora, como la dirección es factible existe $\bar{\lambda} > 0$ tal que $\bar{x}$ es factible con $x_k > \bar{x} = x_k - \bar{\lambda} \nabla f(x_k) > x_k - \lambda^* \nabla f(x_k)$, pues $\lambda^* = x_{k+1}$ es la solución al problema unidimensional, y se demuestra la contradicción.

iii) Esta afirmación es falsa. Basta tomar como contraejemplo cualquier caso de degenerancia en las soluciones. Por ejemplo, se puede tomar el dominio del problema 3.*a*) con función objetivo máx x_1. Habrán múltiples soluciones de los multiplicadores de Lagrange en el óptimo $(x_1, x_2) = (1 + \sqrt{2}, 1)$, por lo que no necesariamente reflejarán el cambio en la función objetivo para un cambio marginal en el lado derecho de las restricciones.
Dependiendo la justificación, también es posible argumentar que la afirmación es verdadera.

Problema 4. (12 puntos)

Considere el problema de la empresa *Tienda de la Esquina*. Esta empresa funciona en base a un sistema de entrega a domicilio, en que cada cliente hace un pedido de ciertos productos específicos que deben ser repartidos

a su casa dentro de un rango de horas especificado. Por otro lado, la empresa tiene D despachadores que debe repartir en un conjunto S de supermercados. Estos despachadores son los encargados de entregar los pedidos que hacen los clientes dentro de las ventanas de tiempo especificadas. Existen 3 tipos de cliente según su nivel de membresía en *Tienda de la Esquina*; el primero es el conjunto K_1 de clientes, quienes pueden hacer un pedido con cierto rango de horas, pero no se les garantiza que el pedido llegue (queda a decisión de la empresa). El segundo tipo de clientes es el conjunto K_2, que corresponde a aquellos que si hacen un pedido se les garantiza que les va a llegar en cualquier minuto dentro de la ventana especificada, y el tercer tipo de clientes es el conjunto K_3, a los cuales además de garantizarles la llegada del pedido se les intenta entregar lo antes posible (siempre dentro de la ventana de tiempo). Cada cliente $k \in K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$, especifica un pedido de peso q_k kilos y una hora a_k desde la cual puede ser entregado. Por política de la empresa, la hora máxima en que puede ser entregado el pedido del cliente k es $a_k + 2$. En el caso de los clientes $k_1 \in K_1$ existe un beneficio de r_{k_1} por atenderlos, y en el caso de los clientes $k_3 \in K_3$ existe un costo de μ (\$/hr) por cada hora (o fracción) que se entregue después de las a_{k_3} horas. Por último, los clientes $k_3 \in K_3$ especifican que su producto debe ser comprado en el conjunto S_{k_3} de supermercados.

La empresa opera en una ciudad que se puede expresar como un grafo fuertemente conexo con N nodos y que el tiempo de viaje entre el nodo i y el nodo j es t_{ij}. La ubicación de cada cliente $k \in K$ es el nodo j_k, mientras que la ubicación de cada supermercado $s \in S$ es el nodo j_s. Asuma que los clientes y supermercados nunca estarán en el mismo nodo. Con respecto a los despachadores, suponga que la empresa les paga desde que empiezan su trabajo en el supermercado hasta que entregan su último pedido, una tarifa de α (\$/hr). Para fomentar el aumento de despachadores, la empresa se compromete con cada despachador a que sólo tendrá que visitar el supermercado al inicio del horizonte de planificación, es decir, una vez que sale de este a repartir, nunca vuelve a comprar a ningún supermercado. Además, les asegura por contrato que en ningún momento tendrán que cargar más de Q kilos cada uno. Considere que cada despachador se demora h_s horas en el supermercado s por cada kilo de productos que tenga que repartir.

Basándose en la información anterior, formule un modelo de programación lineal mixta que ayude a la empresa a decidir qué clientes atender, qué clientes atenderá cada despechador con su respectiva ruta, y en qué supermercado parte cada despachador, de manera de maximizar las ganancias dentro del horizonte de planificación. Suponga que el día parte en la hora 0, que cada despachador debe atender al menos a un cliente, y que nada impide que un despachador pueda esperar (sin moverse) para entregar un pedido.

Solución Problema 4.

a) Conjuntos:

$$N_S = \bigcup_{s \in S} \{j_s\}\text{: Conjunto de los nodos que corresponden a un supermercado}$$

$$N_K = \bigcup_{k \in K} \{j_k\}\text{: Conjunto de los nodos que corresponden a un cliente}$$

Variables de decisión:

$$x_{ij}^d = \begin{cases} 1 & \text{Si el despachador } d \text{ viaja desde el nodo } i \text{ al nodo } j \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_k^d = \begin{cases} 1 & \text{Si el despachador } d \text{ entrega el pedido al cliente } k \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$z_s^d = \begin{cases} 1 & \text{Si el despachador } d \text{ compra sus pedidos en el supermercado } s \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$T_k^d = \text{Tiempo en que el despachador } d \text{ entrega el pedido al cliente } k.$$

$$T_{MAX}^d = \text{Tiempo en que el despachador } d \text{ termina de trabajar.}$$

Función Objetivo:

$$\text{máx} \quad \sum_{k \in K_1} r_k \sum_{d \in D} y_k^d - \mu \sum_{k \in K_3} \left(\sum_{d \in D} T_k^d - a_k \right) - \alpha \sum_{d \in D} T_{MAX}^d$$

s.a.

(1) Restricción de continuidad (lo que entra, sale):

$$\sum_{d \in D} \sum_{j \in N} x_{ij}^d = \sum_{d \in D} \sum_{j \in N} x_{ji}^d \qquad \forall i \in N$$

(2) Definición de y:

$$\sum_{j \in N} x_{ji_k}^d = y_k^d \qquad \forall k \in K, \forall d \in D$$

(3) Los clientes K_2 y K_3 deben atenderse:

$$\sum_{d \in D} y_k^d = 1 \qquad \forall k \in K_2 \cup K_3$$

(4) No se puede atender más de una vez a los clientes K_1:

$$\sum_{d \in D} y_k^d \leq 1 \qquad \forall k \in K_1$$

(5) Definición de z (también se obliga a que el despachador salga del supermercado):

$$\sum_{j \in N_k} x_{i_s j}^d = z_s^d \qquad \forall s \in S$$

(6) Los despachadores parten de un sólo supermercado:

$$\sum_{s \in S} z_s^d = 1 \qquad \forall d \in D$$

(7) Se define como 0 el tiempo de llegada a los supermercados:

$$\sum_{d \in D} \sum_{s \in S} T_s^d = 0$$

(8) Definición de T:

$$T_k^d \geq T_i^d + t_{ij_k} - (1 - x_{ij_k}^d)M \qquad \forall k \in K, \forall i \in N_K, \forall d \in D$$
$$T_k^d \geq \left(\sum_{k \in K} q_k y_k^d \right) h_s - (1 - x_{i_s j_k}^d)M \qquad \forall k \in K, \forall s \in S, \forall d \in D$$

Siendo M un número muy grande.

(9) Ventanas de tiempo:

$$a_k y_k^d \leq T_{i_k}^d \qquad \forall k \in K, \forall d \in D$$
$$(a_k + 2) y_k^d \geq T_{i_k}^d \qquad \forall k \in K, \forall d \in D$$

(10) Carga máxima por despachador:

$$\sum_{k \in K} q_k y_k^d \leq Q \qquad \forall d \in D$$

(11) Definición de T_{MAX}:

$$T_{MAX}^d \geq T_i^d \qquad \forall i \in N, \forall d \in D$$

(12) Naturaleza de las variables:

$$x_{ij}^d \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j \in N, \forall d \in D$$
$$y_k^d \in \{0, 1\} \qquad \forall k \in K, \forall d \in D$$
$$z_s^d \in \{0, 1\} \qquad \forall s \in S, \forall d \in D$$
$$T_i^d, T_{MAX}^d \geq 0 \qquad \forall i \in N, \forall d \in D$$