PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 02-2012
Profesores: P. Álvarez, A. Cataldo
A. Lüer, G. Paredes

Pauta Interrogación 1

Duración: 3 horas.

Se debe contestar en cuadernillos independientes: ***Pregunta 1 Partes a), b) y c)****;* ***Pregunta 1 Partes d) y e)****;* ***Pregunta 2****; y* ***Pregunta 3****. En cada uno de ellos debe colocar su nombre y número de lista asignado.* ***Si no cumple con las instrucciones se le descontarán automáticamente 5 puntos.*** *Está prohibido el uso de calculadoras y de celulares de cualquier tipo.*

Pregunta 1 (20 puntos)

a) (**4 puntos**) Responda brevemente cada una de las siguientes preguntas.

i) (**2 puntos**) ¿Es posible modelar de diferente forma un mismo problema? ¿qué implicancias puede tener de ser esto posible?

ii) (**2 puntos**) Explique en qué contextos es pertinente usar variables continuas en un problema de planificación de la producción, y en cuáles éstas deben ser enteras.

Respuesta:

i) Sí, lo que importa es que los modelos sean equivalentes entre sí. Las diferencias pueden radicar en la definición de las variables, restricciones y/o función objetivo, sin embargo lo que importa es que los modelos formulados lleguen a la misma solución óptima. En el caso de programación lineal, un modelo con más variables/restricciones requerirá un esfuerzo computacional mayor. (Por otra parte, en programación entera, esto no siempre es así ya que la velocidad de los algoritmos en este caso depende tanto de la estructura que tenga el modelo resultante como de su tamaño).

ii) (**2 puntos**) Es razonable que las variables de producción del problema sean enteras si el producto en cuestión es indivisible. Por otra parte, si el producto puede producirse en cualquier cantidad, es pertinente que las variables de producción sean continuas.

b) (**4 puntos**) Suponga que usted es el ganador de un minuto libre en el supermercado para llevar lo que quiera, con la condición de que puede llevar sólo un pack de cada tipo de producto en la canastilla. La canastilla tiene una capacidad de 5,5 kg.

Dado que está en un sector limitado del supermercado, tiene sólo 4 packs disponibles para llevar: Shampoo, Gel, Pasta de Dientes, Desodorante. El precio de un Pack de Shampoo, Gel, Pasta de Dientes y Desodorante son: \$15.000, \$14.000, \$12.000 y \$18.000, y tiene un peso de 3; 2; 2; 2 kg respectivamente.

i) (**1 punto**) Plantee el modelo que represente la situación en cuestión.

ii) (**2 puntos**) Encuentre la solución óptima para el problema continuo.

iii) (**1 punto**) ¿Es posible aproximar la solución encontrada en ii) al problema entero?

Respuesta:

i) Definiendo x_i como la decisión de comprar o no un pack del artículo i, con $i = 1, \ldots, 4$, el modelo queda:

$$\begin{aligned} &\text{máx } 15x_1 + 14x_2 + 12x_3 + 18x_4 \\ &s.a : 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 5{,}5 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

ii) Si determinamos la razón beneficio/peso para cada producto, entonces tenemos $15/3 = 5$; $14/2 = 7$; $12/2 = 6$ y $18/2 = 9$. En base a esto, la solución óptima del problema continuo es: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0{,}75$ y $x_4 = 1$, obteniéndose un total de 41 miles de pesos.

iii) Si se aproxima la solución del problema continuo al entero inferior, esto es $x_3 = 0$, entonces $Z_{entero} = 32$ miles de pesos. Si se aproxima al entero superior la solución no es válida.

Por inspección visual se puede apreciar que la solución $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 1$ da un total de 33 miles de pesos, que es mejor que la que se podría obtener por aproximación. Entonces, se deduce que no es posible aproximar la solución del problema continuo al problema entero, dado que en un caso (aproximación a entero inferior) se obtiene una solución entera sub-óptima, mientras que si se aproxima al entero superior, la solución no es válida.

c) (**4 puntos**) El producto de dos variables binarias $x_1 \cdot x_2$ es un término no lineal y por tanto no se puede utilizar directamente en el modelado de un problema de programación lineal. Es por esto que se le propone expresar ese producto en términos de restricciones lineales, sustituyendo el producto por el siguiente conjunto de restricciones lineales que considera la incorporación de una variable binaria auxiliar:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \Rightarrow &\begin{cases} y \leq x_1 \\ y \leq x_2 \\ y \geq x_1 + x_2 - 1 \end{cases} \\ x_1, x_2, y \in &\{0, 1\} \end{aligned}$$

Justifique si la sustitución propuesta es válida.

Respuesta: Para verificar si la sustitución es válida analicemos caso a caso.

- ◇ Caso 1: $x_1 = 0$ y $x_2 = 0 \Rightarrow y \leq 0$; $y \leq 0$; $y \geq -1 \Rightarrow = 0$.
- ◇ Caso 2: $x_1 = 0$ y $x_2 = 1 \Rightarrow y \leq 0$; $y \leq 1$; $y \geq 0 \Rightarrow = 0$.
- ◇ Caso 3: $x_1 = 1$ y $x_2 = 0 \Rightarrow y \leq 1$; $y \leq 0$; $y \geq 0 \Rightarrow = 0$.
- ◇ Caso 4: $x_1 = 1$ y $x_2 = 1 \Rightarrow y \leq 1$; $y \leq 1$; $y \geq 1 \Rightarrow = 1$.

d) (**4 puntos**) Suponga que posee un furgón amarillo para transportar escolares, y desea conocer cuál es la ruta de distancia mínima que debe seguir para transportar a todos los niños(as). El recorrido comienza en su Hogar y termina en la Escuela. Suponga que existe suficiente capacidad en el vehículo para transportar todos los niños(as) a la escuela en un único viaje. Considere que debe pasar a buscar a cada niño(a) a su hogar. En la Figura 1 se muestra la ubicación (en coordenadas) de su Hogar, la Escuela y de los Escolares.

i) (**2 puntos**) ¿A qué problema clásico de Programación Lineal Entera se parece este problema? ¿Qué diferencias existen entre este problema y el problema clásico que ha mencionado?

ii) (**2 puntos**) ¿Cuántas soluciones debería evaluar si quisiera resolver el problema de la Figura 1 por enumeración exhaustiva?

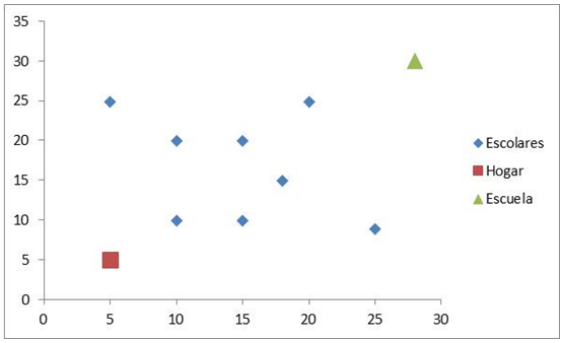


Figura 1: Ubicación geográfica de la escuela y Hogares.

Respuesta:

i) El problema planteado se parece al problema del vendedor viajero, dado que se debe recorrer todos los puntos una sola vez, con la única diferencia que el punto origen es distinto al punto de destino, y el recorrido, por lo tanto, es en una dirección desde su Hogar a la Escuela.

ii) El problema considera 10 nodos, de los cuales 2 están fijos (Escuela, Hogar). Entonces se deberían evaluar $(n-2)! = 8!$ soluciones si se desea resolver el problema por enumeración exhaustiva.

e) (**4 puntos**) Considere una empresa que cuenta con M camiones y que conoce el conjunto R que contiene todas las rutas que puede hacer un camión cualquiera durante un día. Asuma además que se tiene información respecto a las rutas que están relacionadas con una ruta r cualquiera ($r \in R$) en el subconjunto de rutas $V_r \subseteq R$, y que se tiene la siguiente restricción:

$$\left(\sum_{g \in V_r} x_g\right) - x_r \geq 0 \;\; \forall r \in R.$$

donde la variable x_r indica si algún camión realizará la ruta r durante el día de hoy.

i) (**2 puntos**) Indique claramente que representa la restricción descrita anteriormente.

ii) (**2 puntos**) Se conoce también la variable y_r^m que indica si el camión m realizará durante este día un viaje a través de la ruta r. Construya las restricciones que permiten relacionar correctamente esta nueva variable con la variable x_r.

Respuesta:

i) La restricción asegura que si se selecciona la ruta r para algún camión durante el día de hoy, se deberá escoger también al menos una de las rutas relacionadas a ésta para al menos un camión.

ii) En este caso la restricción queda:

$$x_r \leq \sum_{m=1}^{M} y_r^m \leq M \cdot x_r \;\; \forall r \in R.$$

Pregunta 2 (20 puntos)

Usted ha recibido una llamada desde la Asociación Nacional de Fútbol Profesional (ANFP) para que les ayude a solucionar el siguiente problema. Pronto se jugará la final del campeonato nacional, a la que asistirán las barras de los N equipos participantes. Dada la rivalidad entre las barras, se ha dividido el estadio en N zonas, donde la zona $k \in \{1, \ldots, N\}$ tiene A_k asientos disponibles. La idea es que cada equipo quede asignado a una de estas zonas, donde se conoce, para cada zona k (con $k \in \{1, \ldots, N\}$), el conjunto de zonas vecinas V_k. La ANFP cree que si se coloca a la barra del equipo j (con $j \in \{1, \ldots, N\}$) en una zona vecina a la barra del equipo i (con $i \in \{1, \ldots, N : i \neq j\}$) se tendrá un número de heridos igual a M_{ji} personas. Por otra parte, la venta de entradas se hará en la sede de cada equipo y se venderá solamente a los socios de dicho club, sabiendo que d_j socios del equipo j (con $j \in \{1, \ldots, N\}$) comprarán entrada para el partido. Obviamente, la cantidad de entradas que se venderán en cada sede dependerá de la cantidad de asientos disponibles en la zona que sea asignada esa barra. Por lo tanto, es posible que queden socios sin entradas. Cada socio del club j (con $j \in \{1, \ldots, N\}$) que queda sin entradas genera un perjuicio igual al de $B_j > 0$ personas heridas en el estadio.

a) (**10 puntos**) Con la información, construya un modelo de programación lineal entera mixta que permita determinar la mejor asignación de las zonas, de manera que la cantidad de heridos en el partido sea mínima.

Se le ha pedido resolver otro problema, considerando la misma información de la parte a). La administración del estadio cuenta con presupuesto para la instalación de p cámaras de vigilancia para instalarlas en el centro de cada una de las zonas en las que se encuentra dividido el estadio. Debido a su capacidad de enfoque, al localizar una cámara en la zona k (con $k \in \{1, \ldots, N\}$), también se pueden vigilar las zonas vecinas.

b) (**10 puntos**) Considerando la nueva situación, formule un modelo de programación lineal entera que determina la mejor ubicación de las cámaras, para maximizar la cantidad de asientos vigilados por las cámaras.

Respuesta:

a) **Variables de decisión**

$$x_{jk}: \begin{cases} 1, & \text{si la barra del club } j \text{ se asigna a la zona } k. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$y_{ji}: \begin{cases} 1, & \text{si la barra del club } j \text{ es asignada a una zona vecina a la barra del club } i, i > j. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

α_j : número de socios del club j que quedan sin entrada, dada la capacidad de la zona asignada a su club.

Restricciones

R1) Todas las barras son asignadas a una zona.

$$\sum_{k=1}^{N} x_{jk} = 1, \ \forall j = 1, \ldots, N$$

R2) A cada zona se le debe asignar una única barra.

$$\sum_{j=1}^{N} x_{jk} = 1,\ \forall k = 1, \ldots, N$$

R3) Capacidad de la zona asignada a cada barra y la cantidad de socios que quedarán sin asiento.

$$\sum_{k=1}^{N} A_k x_{jk} \geq d_j - \alpha_j,\ \forall j = 1, \ldots, N$$

R4) Hacer que la variable y_{ji} tome el valor 1 ó 0 cuando corresponda.

$$\left(x_{jk} + \sum_{m \in V_k} x_{im} \right) - 1 \leq y_{ji},\ \forall j = 1, \ldots, N,\ i = 1, \ldots, N : i > j,\ k = 1, \ldots, N$$

R5) Naturaleza de las variables.

$$x_{jk} \in \{0, 1\},\ \forall j = 1, \ldots, N,\ k = 1, \ldots, N$$

$$y_{ji} \in \{0, 1\},\ \forall j = 1, \ldots, N,\ i = 1, \ldots, N : i > j$$

$$\alpha_j \geq 0,\ \forall j = 1, \ldots, N$$

Función objetivo

Minimizar la cantidad de heridos.

$$\text{mín} \sum_{k=1}^{N} B_j \alpha_j + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1:i>j}^{N} M_{ji} y_{ji}$$

b) **Variables de decisión**

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{si se localiza una cámara en la zona } i. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$z_k = \begin{cases} 1, & \text{si la zona } k \text{ es cubierta por al menos una cámara.} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Restricciones

R1) Cantidad de cámaras.

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = p$$

R2) Restricción de cobertura.

$$\sum_{i \in V_k} y_i \geq z_k,\ \forall k \in \{1, \ldots, N\}$$

R3) Naturaleza de las variables.

$$y_i \in \{0, 1\},\ \forall i \in \{1, \ldots, N\}$$

$$z_k \in \{0, 1\},\ \forall k \in \{1, \ldots, N\}$$

Función objetivo

Maximizar la cantidad de asientos vigilados.

$$\text{máx} \sum_{k=1}^{N} A_k z_k$$

Pregunta 3 (20 puntos)

Halej ha decidido emprender un viaje que le permita comprar y leer la mayor cantidad de libros posibles. Para estos efectos ha confeccionado una lista con los L libros que desea leer. Cada uno de estos libros se encuentra solamente en algunas N ciudades del país, siendo $M_i \subset L$ el subconjunto de los libros que se encuentra a la venta en la ciudad i (con $i = 1, \ldots, N$). Como algunos de estos libros son parte de una trilogía, Halej ha construido el subconjunto $W^l \subset L$, subconjunto que contiene los libros que están relacionados como trilogía con el libro l (con $l = 1, \ldots, L$), y ha decidido que de comprar un libro de una trilogía comprará la trilogía completa. El precio de compra del libro l (con $l = 1, \ldots, L$) en la ciudad i (con $j = 1, \ldots, N$) es C_i^l unidades monetarias (precio que existe solamente para los libros disponibles en cada ciudad). La compra de cada libro le reporta una satisfacción lectora a Halej, siendo B^l las unidades de satisfacción lectora que percibe Halej por la compra del libro l (con $l = 1, \ldots, L$).

Para realizar este viaje, Halej ha confeccionado un total de R rutas posibles, de las cuales escogerá una para esta travesía literaria. Cada ruta comienza y termina en el hogar de Halej, e indica las ciudades que serán visitadas indicando el orden en que lo serán. Esta información se encuentra en los parámetros binarios A_{ij}^r que toma valor 1 si la ciudad i (con $i = 1, \ldots, N$) es visitada justo antes de la ciudad j (con $j = 1, \ldots, N : j \neq i$) en la ruta r (con $r = 1, \ldots, R$) y E_{ij}^r que toma valor 1 si la ciudad i (con $i = 1, \ldots, N$) es visitada antes (no necesariamente justo antes) de la ciudad j (con $j = 1, \ldots, N : j \neq i$) en la ruta r (con $r = 1, \ldots, R$). Además, se conoce el tiempo de desplazamiento, en minutos, entre todas las ciudades (el hogar de Halej es la ciudad 1 y también se pueden comprar libros) siendo T_{ij} el tiempo que toma al bus (único medio de transporte aceptado por Halej) ir desde la ciudad i (con $i = 1, \ldots, N$) a la ciudad j (con $j = 1, \ldots, N : j \neq i$). El costo del pasaje en bus desde la ciudad i (con $i = 1, \ldots, N$) a la ciudad j (con $j = 1, \ldots, N : j \neq i$) es P_{ij} unidades monetarias.

Como Halej reconoce su pasión por la lectura, destinará el tiempo de desplazamiento entre cada par de ciudades para leer un libro. Esto quiere decir que en cada tramo del viaje escogerá uno de los libros -excepto los que sean parte de una trilogía- y deberá leerlo completamente antes de que termine ese tramo del viaje. Él sabe que leer el libro l (con $l = 1, \ldots, L$) durante el viaje le reportará una satisfacción lectora de H^l unidades (obviamente una segunda lectura del mismo libro no traerá satisfacción alguna para Halej) y que le tomará t^l minutos.

Dada la información anterior, formule un modelo de programación lineal que le permita a Halej maximizar la satisfacción lectora que puede obtener con un presupuesto de P unidades monetarias.

Respuesta:

Variables de decisión

$$x_i^l = \begin{cases} 1, & \text{si compra el libro } l \text{ en la ciudad } i. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$y_{ij}^l = \begin{cases} 1, & \text{si leerá el libro } l \text{ en el viaje entre la ciudad } i \text{ y la ciudad } j : i \neq j. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\alpha^r = \begin{cases} 1, & \text{si escoge la ruta } r. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Restricciones

R1) Comprar a lo más una vez cada libro.

$$\sum_{i \in N} x_i^l \leq 1, \ \forall l \in L.$$

R2) No comprar un libro en una ciudad donde no se encuentra.

$$x_i^l = 0, \ \forall i \in N, \ \forall l \notin M_i.$$

R3) Condición de compra de trilogías.

$$\sum_{i \in N} x_i^l = \sum_{i \in N} x_i^\theta, \ \forall l \in L, \ \theta \in W^l.$$

R4) Escoger una única ruta para el viaje literario.

$$\sum_{r \in R} \alpha^r = 1$$

R5) Comprar libros en ciudades que sean visitadas por la ruta escogida.

$$x_i^l \leq \sum_{r \in R} \alpha^r \sum_{j \in N: j \neq i} A_{ij}^r, \ \forall i \in N, \ \forall l \in L.$$

R6) Escoger un libro para leer en trayecto siempre que ese trayecto pertenezca a la ruta escogida.

$$\sum_{l \in L} y_{ij}^l = \sum_{r \in R} A_{ij}^r \alpha^r, \ \forall i \in N, \ \forall l \in L.$$

R7) Escoger un libro para leer en trayecto siempre que la duración del trayecto lo permita.

$$t^l y_{ij}^l \leq T_{ij}, \ \forall i \in N, \ \forall j \in N : i \neq j, \ \forall l \in L.$$

R8) Escoger un libro para leer en trayecto siempre que ya haya sido comprado en alguna ciudad anterior durante el viaje.

$$y_{ij}^l \leq \sum_{r \in R} \sum_{k \in N: E_{kj}^r = 1} x_k^l, \ \forall i \in N, \ \forall j \in N : j \neq i, \ \forall l \in L.$$

R9) No leer libros de las trilogías durante el viaje.

$$y_{ij}^l = 0, \ \forall i \in N, \ \forall j \in N : j \neq i, \ \forall l \in W^l.$$

R10) Respetar el presupuesto disponible.

$$\sum_{i \in N: i \neq j} \sum_{j \in N} P_{ij} \sum_{r \in R} A_{ij}^r \alpha^r + \sum_{i \in N} \sum_{l \in L} C_i^l x_i^l \leq P$$

R11) Leer a lo más un libro en cada tramo.

$$\sum_{l \in L} y_{ij}^{l} \leq 1 \ \forall i \in N, \ \forall j \in N : j \neq i.$$

R12) Se lee cada libro a lo más una vez durante el viaje.

$$\sum_{i \in N : i \neq j} \sum_{j \in N} y_{ij}^{l} \leq 1 \ \forall j \in L.$$

R13) Naturaleza de las variables.

$$x_{i}^{l} \in \{0,1\}, \ \forall i \in N, \ \forall l \in L.$$

$$y_{ij}^{l} \in \{0,1\}, \ \forall i \in N, \ \forall j \in N : j \neq i, \ \forall l \in L.$$

$$\alpha^{r} \in \{0,1\}, \ \forall r \in R.$$

Función objetivo

Maximizar la satisfacción lectora.

$$\text{máx} \left(\sum_{l \in L} H^{l} \sum_{i \in N : i \neq j} \sum_{j \in N} y_{ij}^{l} \right) + \left(\sum_{l \in L} B^{l} \sum_{i \in I} x_{i}^{l} \right)$$