PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113-Optimización
Semestre: 2021-1
Profesores: G. Angulo, R. Cuadrado, J. González, S. Vásquez, F. Verastegui

Solución Tarea 4

Fecha de entrega: viernes 4 de junio - 12:00:00

Problema 1.

a) Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & c^T x & & \\ s.a & Ax & \geq & c \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica. Demuestre que si $\bar{x}$ satisface $A\bar{x} = c$ y $\bar{x} \geq 0$, entonces $\bar{x}$ es una solución óptima.

b) Considere el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lrcl} \text{opt} & c^T x & & \\ s.a & Ax & \leq & pb + d \end{array}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, d \in \mathbb{R}^m$ y $p \in \mathbb{R}$. La función opt es una incógnita, que puede ser mín o máx. Si sabe que el valor óptimo para $p = 1$ es 0, para $p = 2$ es 1.5 y para $p = 3$ es 5, ¿qué es opt? ¿Por qué?

Solución Problema 1.

a) Sean P) el problema original y D) su dual.

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & c^T y & & \\ s.a & Ay & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

y sea $\bar{y}$ tal que:

$$\begin{aligned} A\bar{y} &= c && /cA^{-1}(\cdot) \\ c\bar{y} &= cA^{-1}c \end{aligned}$$

Por enunciado tenemos que:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= c && /cA^{-1}(\cdot) \\ c\bar{x} &= cA^{-1}c \\ c\bar{x} &= c\bar{y} \end{aligned}$$

Como $\bar{y}$ es factible en D), por dualidad débil se tiene que:

$$\begin{aligned} c\bar{y} &\leq cx && \forall x \text{factible en } P) \\ c\bar{x} &\leq cx && \forall x \text{ factible en } P) \end{aligned}$$

Así, se tiene que $\bar{x}$ es óptimo de P).

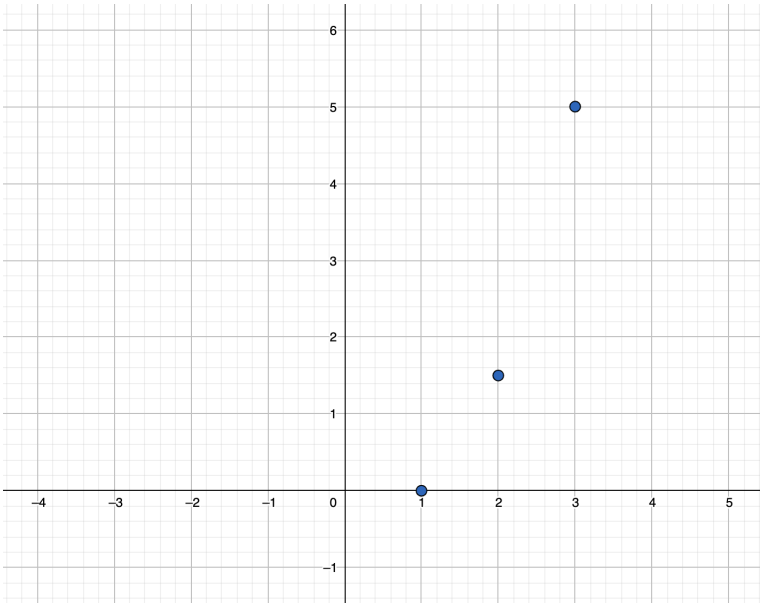
b) Sea $z^* = \text{opt}\{c^T x : Ax \leq pb + d\}$ el valor de la función objetivo. Sabemos que:

$$\begin{aligned} z^*(p) &= \text{opt}\{c^T x : Ax \leq pb + d\} \\ &= \neg\text{opt}\{(pb + d)^T y : A^T y = c, y \stackrel{?}{=} 0\} \qquad \text{(Por teorema fuerte de dualidad)} \\ &= \neg\text{opt}\{(pb + d)^T v : v \in V\} \end{aligned}$$

Donde $\stackrel{?}{=}$ representa que todavía no podemos determinar la naturaleza de las variables duales y V es el conjunto de vértices del dominio dual.

Si $\neg\text{opt} = \text{mín}$, entonces $z^*(p)$ es el mínimo de funciones lineales sobre p. Esto implica que $z^*(p)$ es una función cóncava. Análogamente, si $\neg\text{opt} = \text{máx}$, entonces $z^*(p)$ es una función convexa.

Graficando los 3 puntos que nos dan en el enunciado obtenemos que $z^*(p)$ es una función convexa con respecto a p. Luego, $\neg\text{opt} = \text{máx}$ y por lo tanto opt tiene que ser mín.



Problema 2.

Una estudiante ha decidido ocupar sus conocimientos de optimización para decidir qué porcentaje de su tiempo debe destinar a las n actividades que realiza, con el objetivo de maximizar el beneficio que obtiene por estas. Para esto, ordenó todas las actividades según sus preferencias personales y decidió que en cada actividad ocupará más tiempo que el que ocupa en las actividades que valora menos. Luego valorizó el beneficio (considerado en $c^T > 0$) que obtiene al realizar cada actividad y planteó el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lrcll} \text{máx} & c^T x & & & \\ s.a: & \sum_{i=1}^{n} x_i & = & 1 & (y_1) \\ & x_i & \leq & x_{i+1} \quad \forall i \in \{1,\ldots,n-1\} & (y_2,\ldots,y_n) \\ & x_i & \geq & 0 \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\} & \end{array}$$

donde x_i representa la proporción del tiempo que dedicará a la actividad i, con $i \in \{1,\ldots,n\}$.

a) Encuentre el dual de este problema

b) Demuestre que si y es un vector dual factible, entonces $y_1 \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i$

c) Si se cumple que $c_1 \geq \text{máx}_{i\neq 1}\, c_i$, es posible demostrar que el óptimo primal es $x_i^* = \frac{1}{n} \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\}$. Demuestre usando el Teorema de Dualidad Fuerte que si se cumple esto último, entonces $y_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i$.

d) La estudiante usó este modelo para determinar cómo usar su tiempo durante este semestre. Sus actividades, en orden de preferencia (partiendo por la menos preferida), son estudiar ($i = 1$), compartir con amigos ($i = 2$), hacer deporte ($i = 3$) y trabajar ($i = 4$). Considere entonces la instancia del problema dada por:

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & & \\ s.a & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 0 \\ & x_2 - x_3 & \leq & 0 \\ & x_3 - x_4 & \leq & 0 \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Utilizando Python + Gurobi obtenga la solución óptima de este problema. Recuerde incluir *screenshots* de su código

e) Utilizando Python + Gurobi obtenga el valor de las variables duales y responda: ¿En cuánto cambiaría el valor de la función objetivo si la estudiante dispone de un 10 % de tiempo adicional? Recuerde incluir *screenshots* de su código.

Hint: Se recomienda revisar este **link**. En esta página se muestra cómo obtener las variables duales asociadas a una restricción.

Solución Problema 2.

a) El problema puede reescribirse como:

$$(\mathcal{P}_n) \begin{cases} \text{máx} & c^T x & & & \\ s.a & \sum_{i=1}^{n} x_i & = & 1 & \\ & x_i - x_{i+1} & \leq & 0 & \forall i \in \{1,\ldots,n-1\} \\ & x & \geq & 0 & \end{cases}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trasponiendo la matriz A y considerando los vectores b y c, formulamos el problema dual:

$$(\mathcal{D}_n) \begin{cases} \text{máx} & y_1 & & & \\ s.a & & & & \\ & y_1 + y_2 & \geq c_1 & & \\ & y_1 - y_2 + y_3 & \geq c_2 & & \\ & y_1 - y_3 + y_4 & \geq c_3 & & \\ & \vdots & \vdots & & \\ & y_1 - y_{n-1} + y_n & \geq c_{n-1} & & \\ & y_1 - y_n & \geq c_n & & \\ & y_i & \geq 0 & \forall i \in \{2, \dots, n\} \end{cases}$$

b) Sumando todas las restricciones del dual obtenemos que:

$$ny_1 \geq \sum_{i=1}^{n} c_i$$

$$y_1 \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_i$$

c) Si $x_i^* = \frac{1}{n} \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$ es solución factible, entonces se tiene que ambos problemas (primal y dual) son finitos, factibles y que $c^T x^* = b^T y^*$. Lo último es equivalente a:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i^*$$

Reemplazando x^* y b obtenemos que:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} c_i = y_1^*$$

.

d) El *script* necesario para resolver el problema es el siguiente:

```
n = 4
N = range(1, n+1)
c = {1: 4,
     2: 3,
     3: 2,
     4: 1}

m = Model()
x = m.addVars(N, lb=0, vtype=GRB.CONTINUOUS)
m.setObjective(sum(c[i]*x[i] for i in N))
constr1 = m.addConstr(sum(x[i] for i in N) == 1)
m.addConstrs(x[i] <= x[i+1] for i in (1, 2, 3))
m.optimize()
```

La solución óptima es $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.25$ y el valor óptimo es 2.5.

e) Para saber cuánto cambia el valor de la función objetivo al aumentar el lado derecho de la primera restricción de 1 a 1.1 debemos obtener la variable dual asociada a la primera restricción en el óptimo. Para obtener este valor, debemos agregar la siguiente linea de código.

```
print(constr1.Pi)
```

El valor de y_1^* arrojado por Gurobi es 2.5. Luego, el impacto en la función objetivo es:

$$\Delta z = y_1^* \Delta b_1 = 2.5 \times 0.1 = 0.25$$