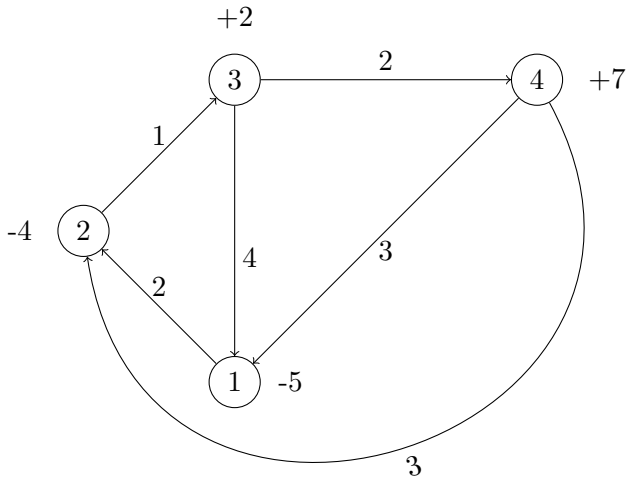
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Curso: ICS1113 - Optimización
Semestre: 2023 - 1
Profesores: G. Angulo - R. Cuadrado - G. Méndez - G. Pérez

Interrogación 2
Duración: 150 minutos.

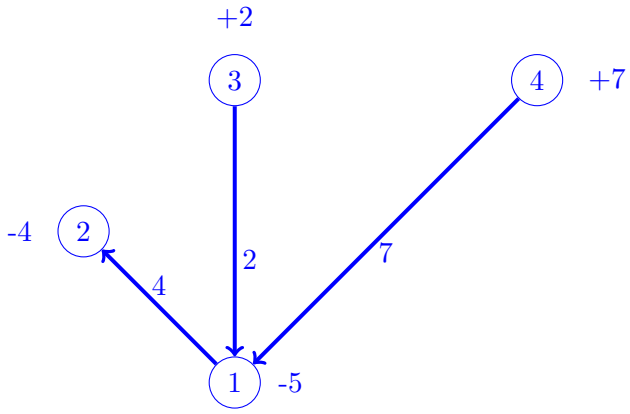
Pregunta 1 (20 puntos)

(a) **(10 puntos)** Considere la siguiente red en donde se indican demandas generalizadas para cada nodo y los costos de cada arco. Usando el algoritmo de Simplex para redes encuentre la solución óptima del problema de flujo a costo mínimo asociado a esta red. Comience aplicando el algoritmo desde la base $B = \{(1,2),(3,1),(4,1)\}$.



Solución:

Primero calculamos los flujos asociados al árbol-base inicial propuesto. Despejamos o resolvemos el sistema de ecuaciones asociado a las conservaciones de flujo obteniendo los siguientes flujos: $x_{1,2} = 4, x_{3,1} = 2, x_{4,1} = 7$.



Luego, podemos calcular el valor de las variables duales fijando la variable $\pi_1 = 0$ y despejando del sistema de ecuaciones obtenido al considerar que los costos reducidos de las variables básicas son iguales a cero:

$r_{3,1} = 0 = c_{3,1} - \pi_3 + \pi_1 = 4 - \pi_3 + \pi_1 = 4 - \pi_3 + 0 \Rightarrow \pi_3 = 4.$

$r_{1,2} = 0 = c_{1,2} - \pi_1 + \pi_2 = 2 - \pi_1 + \pi_2 = 2 - 0 + \pi_2 \Rightarrow \pi_2 = -2.$

$r_{4,1} = 0 = c_{4,1} - \pi_4 + \pi_1 = 3 - \pi_4 + \pi_1 = 3 - \pi_4 + 0 \Rightarrow \pi_4 = 3.$

Entonces, tenemos:

$\pi_1 = 0, \pi_2 = -2, \pi_3 = 4, \pi_4 = 3.$

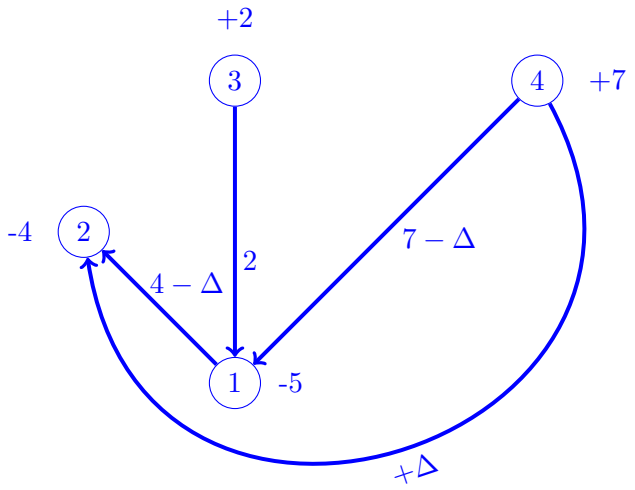
Ahora, podemos calcular los costos reducidos para los arcos que no están en la base:

$r_{2,3} = c_{2,3} - \pi_2 + \pi_3 = 1 - -2 + 4 = 7.$

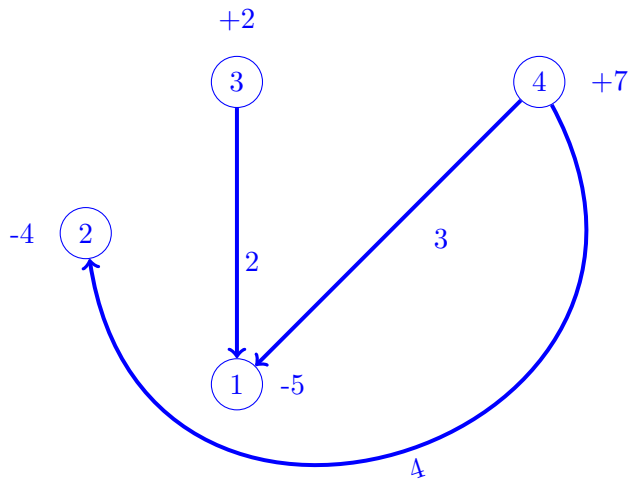
$r_{3,4} = c_{3,4} - \pi_3 + \pi_4 = 2 - \pi_3 + \pi_4 = 2 - 4 + 3 = 1$

$r_{4,2} = c_{4,2} - \pi_4 + \pi_2 = 3 - 3 + -2 = -2.$

Vemos que el costo reducido asociado al arco $(4, 2)$ es negativo por lo que tenemos incentivo a subir el valor de la variable $x_{4,2}$. Revisando el criterio de salida, vemos que a lo más podemos aumentar el valor del flujo desde el nodo 4 al nodo 2 en cuatro unidades. En este caso la variable asociada al arco $(1, 2)$ sale de la base.



La nueva base es $\{(4,2),(3,1),(4,1)\}$. Actualizamos los flujos, y calculamos nuevamente el valor de las variables duales:



Ahora $x_{4,2} = 4$, $x_{3,1} = 2$ y $x_{4,1} = 3$.

Fijamos nuevamente el valor de π_1 igual a 0.

$r_{3,1} = 0 = c_{3,1} - \pi_3 + \pi_1 = 4 - \pi_3 + \pi_1 = 4 - \pi_3 + 0 \Rightarrow \pi_3 = 4.$

$r_{4,1} = 0 = c_{4,1} - \pi_4 + \pi_1 = 3 - \pi_4 + \pi_1 = 3 - \pi_4 + 0 \Rightarrow \pi_4 = 3.$

$r_{4,2} = 0 = c_{4,2} - \pi_4 + \pi_2 = 3 - \pi_4 + \pi_2 = 3 - 3 + \pi_2 \Rightarrow \pi_2 = 0.$

Ahora calculamos nuevamente el valor de los costos reducidos:

$r_{2,3} = c_{2,3} - \pi_2 + \pi_3 = 1 - 0 + 4 = 5.$

$r_{3,4} = c_{3,4} - \pi_3 + \pi_4 = 2 - \pi_3 + \pi_4 = 2 - 4 + 3 = 1$

$r_{1,2} = c_{1,2} - \pi_1 + \pi_2 = 2 - 0 + 0 = 2.$

Vemos que todos los costos reducidos son no negativos por lo que hemos llegado a la solución óptima.

Distribución del puntaje:

- ◇ 2 puntos por calcular los flujos asociados a la base inicial entregada.
- ◇ 1 punto por calcular el valor de las variables duales.
- ◇ 1 punto por calcular los costos reducidos.
- ◇ 1 punto por identificar la variable de entrada.
- ◇ 2 puntos por aplicar el criterio de salida y actualizar los flujos cambiando de base.
- ◇ 1 punto por actualizar el valor de las variables duales.
- ◇ 1 punto por calcular los costos reducidos en la segunda iteración.
- ◇ 1 punto por identificar la solución óptima obtenida.
  No era necesario detallar el valor de la función objetivo.

(b) **(10 puntos)** Considere que usted debe planificar la producción y distribución de productos frente a una demanda de varias tiendas de sus clientes para los próximos T periodos. Usted dispone de m fábricas que pueden producir productos en cada periodo t. Cada fábrica i puede producir a lo más $s_{i,t}$ unidades de productos en el periodo t. El costo de fabricar una unidad de producto en la fábrica i en el periodo t viene dado por el parámetro $f_{i,t}$. Por otro lado, considere que, una vez producidos, lo productos deben ser inmediatamente transportados a una bodega que funciona como centro de distribución desde la cual los productos deben ser transportados posteriormente a cada una de las n tiendas que presentan demanda por estos productos. Usted estima que cada tienda j demanda $d_{j,t}$ unidades de producto en el periodo t.

El costo de transportar una unidad de producto desde la fábrica i al centro de distribución en el periodo t viene dado por el parámetro $c_{i,t}$. Por otro lado, el costo de transportar una unidad de producto desde el centro de distribución a la tienda j en el periodo t está dado por el parámetro $r_{j,t}$. Aunque usted no puede almacenar los productos directamente en las fábricas, sí puede almacenar productos de un periodo a otro en el centro de distribución. El costo de almacenamiento de una unidad de producto del periodo t al periodo siguiente viene dado por el parámetro a_t.

Considerando la información entregada, dibuje una red que pueda representar este sistema como un problema de flujo a costo mínimo que le permita planificar la producción y distribución de sus productos dentro del horizonte de planificación T de forma de satisfacer la demanda. Asuma que el problema es factible y que en particular se cumple que $\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{m} s_{i,t} > \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n} d_{j,t}$.

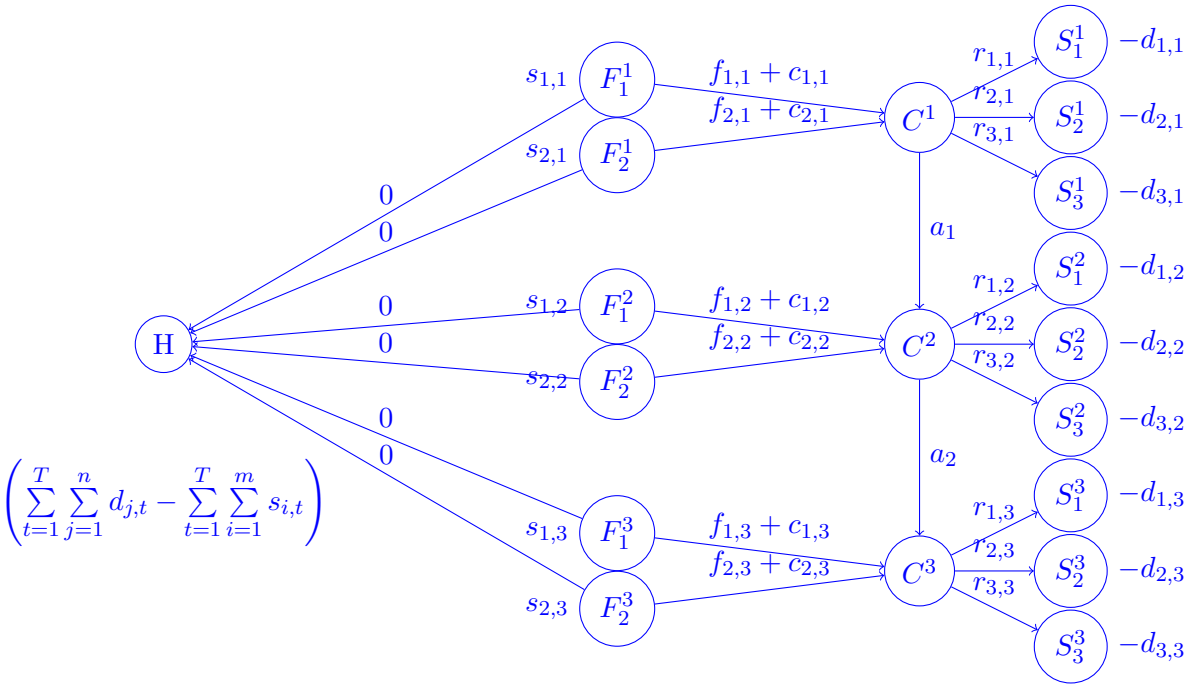
Puede asumir que $m = 2$, $n = 3$ y $T = 3$ para dibujar su red. Indique en la red claramente los valores para las demandas generalizadas que defina en cada nodo, los costos de los arcos considerados y lo que representa cada flujo en el problema.

Solución:

Para la corrección se asume que términos "al lado" de un nodo corresonden a demandas generalizadas y "al lado" o sobre un arco corresponden a costos y capacidad (si se usa capacidad).

Se asume que el inventario inicial y final en la bodega es cero. En caso de haber agregado una demanda generalizada asociada a esos inventarios también se considera correcto (si están agregados correctamente).

Un posible enfoque de solución:



En la red dibujada los nodos F_i^t representan las 2 fábricas en cada uno de los 3 periodos.

Los nodos S_j^t representan las 3 tiendas en cada uno de los 3 periodos.

Los nodos C^t representan el centro de distribución en cada uno de los 3 periodos.

El nodo H es un nodo virtual que agregamos para balancear la red dado que se indica que se tiene más oferta que demanda (ahí llegan las holguras que se tiene en cada periodo con respecto a la capacidad de producción de cada fábrica).

El flujo asociado a los arcos que unen a las fábricas con el centro de distribución representa la cantidad de unidades que se fabrican en cada fábrica y que se transportan (todos los productos deben ser inmediatamente transportados después de haber sido fabricados) al centro de distribución en cada periodo. Su costo está dado por la suma del costo de producir una unidad de producto $f_{i,t}$ y el costo de transportarlo a la bodega $c_{i,t}$.

Los arcos que unen los nodos del centro de distribución representan la posibilidad de almacenar productos de un periodo a otro. Su costo es a_t (el costo de almacenamiento por unidad de producto).

Los arcos que unen los nodos "bodega" con los nodos "tienda" están asociados al transporte de los productos desde la bodega a cada tienda y tienen un costo $r_{j,t}$.

Los arcos que unen a las fábricas con el nodo virtual H están asociados a la cantidad de productos que se podría producir en cada periodo pero que no se produce (la diferencia entre lo planificado y lo que se podía producir).

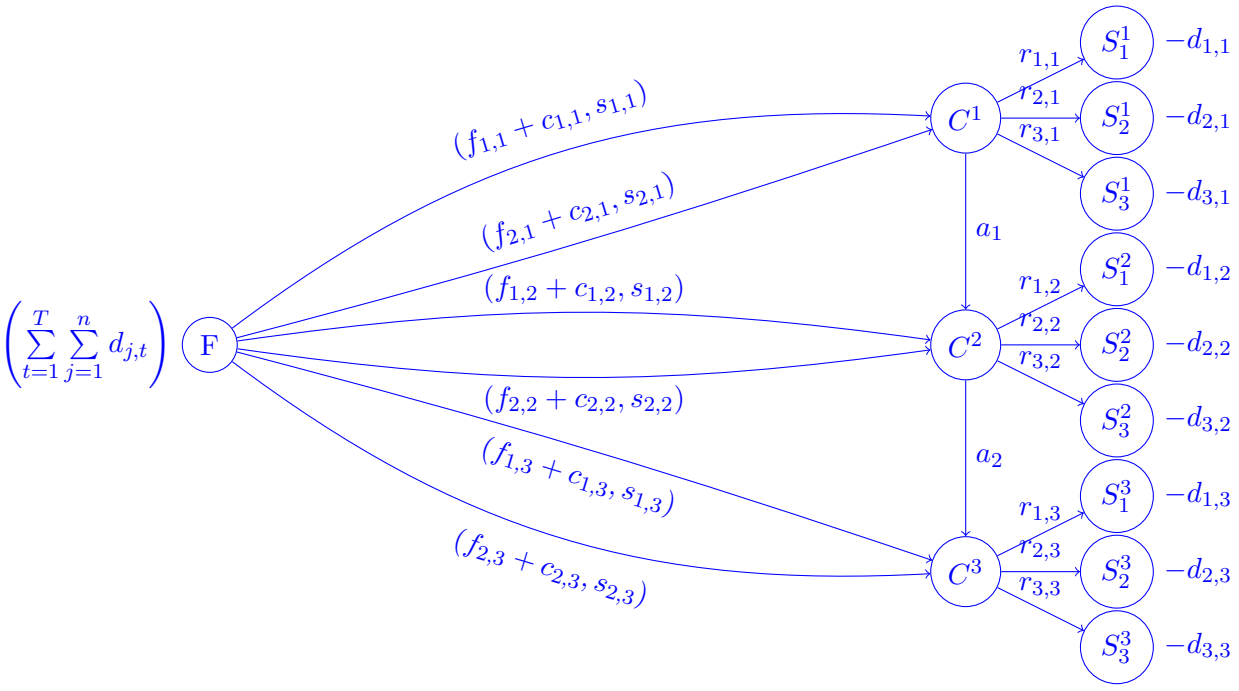
Al lado de cada nodo se indica su demanda generalizada asociada. Notar que la demanda generalizada del nodo H se define de manera que la red quede balanceada y que los costos de los arcos que conectan con ese nodo son 0 (el costo de no producir una unidad es 0). Por otro lado, la demanda generalizada de los nodos "bodega" (C^t) es 0.

Distribución del puntaje:

- ◇ 3 puntos por balancear la red agregando el nodo y arcos virtuales.
- ◇ 1 punto por dibujar los nodos fábrica con sus demandas generalizadas.

- ◇ 1 punto por dibujar los nodos tienda con sus demandas generalizadas.
- ◇ 1 punto por dibujar los nodos bodega con sus demandas generalizadas.
- ◇ 1 punto por dibujar los arcos que conectan las fábricas y la bodega indicando sus costos.
- ◇ 1 punto por dibujar los arcos que conectan a los nodos bodega en cada periodo indicando sus costos.
- ◇ 1 punto por dibujar los arcos que conectan la bodega con las tiendas en cada periodo indicando sus costos.
- ◇ 1 punto por precisar el costo de los arcos virtuales agregados para balancer la red.

Otro posible enfoque de solución:



En este caso, se puede plantear una red balanceada en donde se definen capacidades para los arcos que representan la producción y transporte de productos desde las fábricas a la bodega en cada periodo. En cada arco se define $(costo, capacidad)$. El nodo F representa las fábricas y los flujos de los arcos que van desde ese nodo a la bodega en cada periodo (a los nodos "bodega") representan la producción y transporte de productos desde cada una de las fábricas hasta la bodega. El resto de la red es similar a lo presentado en la primera alternativa de solución.

Distribución del puntaje:

- ◇ 2 puntos por dibujar el nodo de las fábricas especificando su demanda generalizada.
- ◇ 1 punto por definir los arcos de producción/transporte desde el nodo F.
- ◇ 1 punto por definir los costos de los arcos de producción/transporte desde el nodo F.
- ◇ 2 puntos por definir las capacidades de los arcos de producción/transporte desde el nodo F.
- ◇ 1 punto por dibujar los nodos tienda con sus demandas generalizadas.
- ◇ 1 punto por dibujar los nodos bodega con sus demandas generalizadas.

- ◇ 1 punto por dibujar los arcos que conectan a los nodos bodega en cada periodo indicando sus costos.
- ◇ 1 punto por dibujar los arcos que conectan la bodega con las tiendas en cada periodo indicando sus costos.

Pregunta 2 (20 puntos)

(a) **(8 puntos)** Se presenta el siguiente problema de optimización lineal:

$$\begin{aligned}(P) = \max \quad & 10x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & (x_1, x_2) \in D\end{aligned}$$

donde $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + x_2 \leq 30, 2x_1 + x_2 \leq 40\}$.

Sea $(x_1^*, x_2^*) = (20, 0)$ la única solución óptima (i.e., $f(x^*) > f(x)\ \forall x \in D : x \neq x^*$).

Suponga que se agrega una nueva restricción $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ (donde los parámetros a_1, a_2 y b son valores reales) tal que $D' = D \cap \{a_1x_1 + a_2x_2 \leq b\} \neq \emptyset$, obteniendo el nuevo problema:

$$\begin{aligned}(P') = \max \quad & 10x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & (x_1, x_2) \in D'.\end{aligned}$$

Responda cada una de las siguientes afirmaciones, justificando con un ejemplo si es verdadera o con una demostración en caso de ser falsa:

(i) **(4 puntos)** Si $(x_1^*, x_2^*) = (20, 0)$ satisface la restricción $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$, el problema (P') podría tener múltiples soluciones óptimas. **Solución:** FALSO. La definición de solución óptima única es $f(x^*) > f(x)\ \forall x \in D : x \neq x^*$. Como $(x_1^*, x_2^*) = (20, 0)$ es factible en D', se cumple en particular que $f(x^*) > f(x)\ \forall x \in D' : x \neq x^*$.

(ii) **(4 puntos)** Si $(x_1^*, x_2^*) = (20, 0)$ satisface la restricción $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$, el dual del problema (P') podría tener múltiples soluciones óptimas. **Solución:** VERDADERO. Basta tomar la restricción $x_1 \leq 20$, la cual hace que el vértice $(x_1^*, x_2^*) = (20, 0)$ esté sobredeterminado en el problema (P'). Es decir $(x_1^*, x_2^*) = (20, 0)$ es solución óptima degenerada, lo que implica múltiples soluciones óptimas en el problema dual.

(b) **(12 puntos)** Considere el siguiente problema de optimización lineal

$$\begin{aligned}\text{mín} \quad & ax_1 + bx_2 \\ \text{s.a.} \quad & 5x_1 - 3x_2 \geq c \\ & 3x_1 - 4x_2 \leq d \\ & x_1 \geq 0.\end{aligned}$$

Sabiendo que $a+b+c+d = 31$, encuentre la solución óptima y los valores de los parámetros a, b, c y d para que el problema dual tenga como solución óptima a (5,-10) y valor de la función objetivo igual a $5c$.

Solución: El problema dual asociado es:

$$
\begin{aligned}
\text{máx } & cy_1 + dy_2 \\
\text{s.a. } & 5y_1 + 3y_2 \leq a \\
& -3y_1 - 4y_2 = b \\
& y_1 \geq 0 \\
& y_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

Luego, si (5,-10) es solución óptima del problema dual, podemos aplicar THC obteniendo que:
$5x_1 - 3x_2 - c = 0$
$3x_1 - 4x_2 - d = 0$

Despejando obtenemos que: $x_1 = \frac{4c-3d}{11}$ y $x_2 = \frac{3c-5d}{11}$

Por otra parte, como (5,-10) es solución óptima dual, también debe ser dual factible, por lo que tenemos que:
$5y_1 + 3y_2 \leq a$
$-3y_1 - 4y_2 = b$

Reemplazando obtenemos que $a \geq -5$ y $b = 25$.

Ahora, sabiendo que el problema dual es acotado con valor igual a $5c$, y usando el teorema fuerte de la dualidad tenemos que:
$ax_1 + bx_2 = cy_1 + dy_2 = 5c$

Reemplazando en el punto (5,-10) obtenemos que $5c - 10d = 5c$, por lo que $d = 0$.
A su vez utilizando la función objetivo del primal y reemplazando por el valor de x_1 y x_2
$a\frac{4c-3d}{11} + 25\frac{3c-5d}{11} = 5c$, reemplazando los valores de $b = 25$ y $d = 0$ obtenemos
$a\frac{4c}{11} + b\frac{3c}{11} = 5c$
$4a + 75 = 55$
$a = -5$

Reemplazando los valores de a, b y d obtenemos que:
$a + b + c + d = 31$
$c = 11$

Por lo que $x_1 = \frac{4c-3d}{11} = 4$ y $x_2 = \frac{3c-5d}{11} = 3$, teniendo como valor de la funcion objetivo igual a $5c = 55$

Pregunta 3 (20 puntos)

(a) **(14 puntos)** Considere $S = \{x \in \{0,1\}^6 : \ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 7x_6 \leq 7\}$.

(i) **(2 puntos)** Explique por qué $C = \{1,4\}$ es un cubrimiento y determine la desigualdad de cubrimiento asociada.

Solución: La suma de los coeficientes asociados a las variables en C excede 7, por lo que C es cubrimiento. La desigualdad correspondiente es $x_1 + x_4 \leq 1$.

(ii) **(3 puntos)** Explique por qué la desigualdad $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1$ es válida para S. ¿Es una desigualdad de cubrimiento? Justifique.

Solución: Sea $C' = \{1, 4, 5, 6\}$. Notemos que la suma de los coeficientes asociados a cualquier par de variables en C' excede 7. Luego, a lo más una de ellas puede tomar el valor 1, es decir, $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1$. Por otro lado, esta desigualdad no es de cubrimiento, puesto que en tal caso el lado derecho sería igual a 3.

(iii) **(3 puntos)** Si pudiese agregar solamente una de las dos desigualdades anteriores, ¿cuál elegiría? Justifique.

Solución: Para $x \geq 0$, la desigualdad $x_1 + x_4 \leq 1$ es implicada por $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1$. Luego, la segunda es preferible puesto que restringe más la relajación lineal de S que la primera.

Suponga ahora que desea maximizar una función lineal sobre S mediante branch-and-bound. Al resolver la relajación lineal (P_0), obtiene como solución óptima el vector $x^0 = (1, 0, 0, \frac{4}{5}, 0, 0)$. Sean (P_1) y (P_2) los problemas obtenidos al ramificar (P_0).

(iv) **(3 puntos)** Indique explícitamente las restricciones correspondientes a (P_0), junto a las restricciones adicionales asociadas a (P_1) y (P_2). ¿Cómo se comparan los valores óptimos de estos tres problemas?

Solución: Las restricciones correspondientes a (P_0) son $3x_1+4x_2+4x_3+5x_4+6x_5+7x_6 \leq 7$ y $0 \leq x_j \leq 1$ para $j = 1 \ldots, 6$. Las restricciones adicionales asociadas a (P_1) y (P_2) son $x_4 \leq 0$ y $x_4 \geq 1$, respectivamente. Como el problema es de maximización, tenemos $v(P_1) \leq v(P_0)$ y $v(P_2) \leq v(P_0)$. Por otro lado, $v(P_1)$ y $v(P_2)$ son incomparables en general.

(v) **(3 puntos)** Explique por qué una de las ramas admite solamente una solución entera e identifique dicho vector.

Solución: La región factible asocida a (P_2) es $Q_2 = \{x \in [0,1]^6 : \ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_5 + 7x_6 \leq 2, \ x_4 = 1\}$. Luego, solamente x_4 puede tomar el valor 1, y por lo tanto la única solución entera en esta rama es $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$.

(b) **(6 puntos)** Considere el modelo

$$\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij} \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i \in I} y_{ij} = 1 \quad \forall j \in J \quad (*) \\
& y_{ij} \leq x_i \quad \forall i \in I, \ j \in J \\
& x \in \{0,1\}^I \\
& y \in \{0,1\}^{I \times J}.
\end{aligned}$$

Llamemos `i2m` al modelo de Gurobi asociado.

(i) **(2 puntos)** Indique cómo agregar las variables y.

Solución: `y = i2m.addVars(I, J, vtype = GRB.BINARY)`

(ii) **(2 puntos)** Indique cómo agregar el conjunto de restricciones $(*)$.

Solución: `r = i2m.addConstrs(sum(y[i, j] for i in I) == 1 for j in J)`

(iii) **(2 puntos)** Habiendo resuelto el problema, indique cómo imprimir el valor de la primera parte de la función objetivo.

Solución: `print(sum(f[i]*x[i].x for i in I))`

Tabla de dualidad:

Minimización	Maximización
Variables	Restricciones
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
Irrestrictas	$=$
Restricciones	Variables
$\leq$	≤ 0
$\geq$	≥ 0
$=$	Irrestrictas