Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Profesores: Gustavo Angulo, Margarita Castro, Raimundo Cuadrado, Camila Balbontín, Gonzalo Pérez
Ayudante Coordinador de Tareas: Juan Enrique Hurtado

ICS1113 - Optimización
1er semestre del 2025

Tarea 3 ICS1113

Entrega 27/06/2025 a las 23:59 hrs

Reglas:

- El desarrollo y entrega de esta tarea es individual o en pareja (entre dos estudiantes de cualquier sección), por lo que cada individuo o pareja debe entregar sus propias soluciones. No se recomienda repartir la tarea entre los integrantes, pues perjudica el aprendizaje y preparación de la interrogación asociada a esta tarea. Sí está permitido discutir los problemas con profesores y ayudantes del curso. Cualquier actitud deshonesta será calificada con nota 1.0 en la tarea, 1.0 en el curso, más un aviso de dicha actitud a la Dirección de Pregrado de la Escuela de Ingeniería.
- Si se opta por entregar en pareja, se debe inscribir la pareja en Canvas y un solo estudiante (representando a su pareja) debe entregar la tarea en Canvas antes del día 27/06/2025 a las 23:59 horas. Tareas atrasadas serán calificadas con nota 1.0 y no serán corregidas.
- El formato de entrega es un reporte en archivo .pdf (digitalizado o escrito a mano con los nombres de los integrantes) más un archivo opcional. Si opta por una respuesta escrita a mano, entonces debe ser legible o habrá descuentos a criterio del corrector. En el archivo opcional puede adjuntar el .tex o .zip del proyecto Latex o código de GUROBI si corresponde. Se bonificará con 3 décimas a quienes utilicen Latex (y entreguen el .tex además del .pdf) las cuales no son transferibles a otras actividades del curso y no permiten tener nota mayor a 7. Es decir una persona con 6.8 y con bono, obtendrá un 7.
- Se permite el uso de modelos de lenguaje (ejemplo: ChatGPT) como apoyo para el desarrollo de la tarea, siempre que se utilice de manera consciente y comprensiva. El uso de respuestas generadas sin entender su contenido, o bien copiadas textualmente sin la debida citación, constituye una falta a la ética y será sancionado.
  Por ejemplo: se puede usar IA para realizar consultas de contenido, ortografía y dudas de código, pero no se puede pedir a IA que realice la tarea (o una parte de esta) por ustedes.
- Se habilitará un foro en Canvas donde se responderá dudas del enunciado.

Pregunta 1 [20 Puntos]

1. Considere el problema de optimización que fue desarrollado en la tarea 2. Considere $c_1 = 1$ y $\Delta b_1 = 0$ a no ser que se pida lo contrario :

$$\begin{aligned} \text{P) max} \quad & c_1 x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & R1) \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 12 + \Delta b_1 \\ & R2) \quad x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & R3) \quad x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   a) Demuestre, de forma algebraica, los rangos de valores de c_1 y de Δb_1 para mantener la base $B = \{x_1, x_2, e_1^*\}$ óptima.
   Considere e_1^* como la variable de exceso de la segunda restricción.

   b) Suponga que todos los valores del vector del lado derecho son multiplicados por un factor común $\theta > 0$. ¿Cuál es la variación porcentual en el nuevo valor óptimo del problema? Justifique.

   c) Construya el problema dual de P) y resuélvalo usando el teorema de holguras complementarias.

   d) Ahora suponga que el vector del lado derecho es modificado con pequeñas variaciones que no cambian la configuración de la base óptima. En particular, el primer recurso es ponderado por α, el segundo por β y el tercero por γ. Utilizando el concepto de precios sombra, identifique la variación del valor óptimo original con estos cambios.

2. Comente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En el caso de las falsas, entregue un contraejemplo o una descripción perfecta de un caso que contradice la afirmación.

   a) En el teorema de holguras complementarias el producto de dos términos tiene valor cero. No es posible que ambos términos sean cero en la solución óptima, en ninguna de las ecuaciones del teorema.

   b) Al incorporar una nueva restricción en el problema primal, también se agrega una nueva restricción en el problema dual.

   c) Si el primal tiene soluciones múltiples entonces no es posible que el dual tenga también soluciones múltiples.

   d) Si $P) = \{min \quad c^T x; Ax = b\}$ es un problema primal, entonces el dual es infactible.

   e) Si el primal es no acotado, entonces el dual es infactible y viceversa.

   f) El problema dual siempre es equivalente a uno de maximización.

   g) Es posible representar en un mismo gráfico de tres dimensiones el dominio del problema dual y el dominio del problema primal.

   h) Si el dominio de un problema primal es acotado, entonces el dominio del problema dual es no acotado.

3. Considere la siguiente función que se busca minimizar:

$$f(x) = x_1^2 + 4x_1 + 3x_2^2 + 6x_2 \tag{1}$$

   a) Encuentre las condiciones necesarias de primer orden.

   b) Encuentre las condiciones necesarias de segundo orden.

   c) Encuentre las condiciones suficientes de segundo orden.

   d) Concluya entregando la solución óptima del problema y su valor óptimo.

1. Solución

1. Pregunta 1 (8 pts)

(a) (2 pts)Se considera la misma base óptima y desarrollo de la tarea 2. Se considera como costo c_1 para la primera variable, y en forma estándar queda negativo.

$$r_N^\top = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-c_1 & -1 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5/13 & -2/13\\ -1/13 & 3/13\\ 3/13 & 4/13\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{13}c_1 - \frac{1}{13} & -\frac{2}{13}c_1 + \frac{3}{13}\end{bmatrix}$$

Para que los costos reducidos sean no negativos:

$$\frac{5}{13}c_1 - \frac{1}{13} \geq 0$$
$$-\frac{2}{13}c_1 + \frac{3}{13} \geq 0$$

Luego el rango de valores de c_1 son

$$\frac{1}{5} \leq c_1 \leq \frac{3}{2}$$

Para determinar rango de valores de Δb_1 se debe analizar factibilidad de la base actual.

$$x_B = \bar{b} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix}5/13 & 0 & -2/13\\ -1/13 & 0 & 3/13\\ 3/13 & -1 & 4/13\end{bmatrix} \begin{bmatrix}12 + \Delta b_1\\ 2\\ 10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}40/13 + 5\Delta b_1/13\\ 18/13 - \Delta b_1/13\\ 50/13 + 3\Delta b_1/13\end{bmatrix}$$

Y para que esta solución sea factible se debe cumplir que

$$\frac{40}{13} + \frac{5}{13}\Delta b_1 \geq 0$$
$$\frac{18}{13} - \frac{1}{13}\Delta b_1 \geq 0$$
$$\frac{50}{13} + \frac{3}{13}\Delta b_1 \geq 0$$

$$\Delta b_1 \geq -8 \tag{2}$$
$$\Delta b_1 \leq 18 \tag{3}$$
$$\Delta b_1 \geq -\frac{50}{3} \tag{4}$$

Por tanto los rangos de valores de Δb_1 son

$$-8 \leq \Delta b_1 \leq 18$$

(b) (2 pts) Necesariamente el valor óptimo va a ser θ veces el anterior. Esto es debido a que se separa del origen cada una de las restricciones θ veces la distancia anterior, y en particular la solución óptima, que siempre está definida por restricciones. Si el sistema de la base óptima antes estaba definido así:

$$A_b x_b = b \tag{5}$$

Ahora sería:

$$A_b x_b' = \theta b \tag{6}$$

Por lo que necesariamente $x_b' = \theta x_b$, y eso en la función objetivo resulta en un incremento porcentual de $\frac{\theta - 1}{1} \cdot 100\,\%$.

(c) (2 pts) El dual es:

$$\begin{aligned} D)\ \text{mín} \quad & 12y_1 + 2y_2 + 10y_3 \\ \text{s.a.} \quad & R1) \quad 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\ & R2) \quad 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 1 \\ & \quad y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Se plantean las 5 ecuaciones del THC:

$$\begin{aligned} (3y_1 + y_2 + y_3 - 1)x_1 &= 0 \\ (2y_1 + 2y_2 + 5y_3 - 1)x_2 &= 0 \\ (3x_1 + 2x_2 - 12)y_1 &= 0 \\ (x_1 + 2x_2 - 2)y_2 &= 0 \\ (x_1 + 5x_2 - 10)y_3 &= 0 \end{aligned}$$

Y como se conoce el vector x:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ h_1 \\ h_2 \\ e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{40}{13} \\ \frac{18}{13} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{50}{13} \end{bmatrix}$$

Se procede a remplazar en las ecuaciones del THC para obtener este sistema:

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_3 &= 1 \\ 2y_1 + 5y_3 &= 1 \end{aligned}$$

Con $y_2 = 0$.

Luego la solución del dual es:

$$\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} \\ 0 \\ \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

Y evaluado en la f.o. dual resulta en $\frac{58}{13}$, claramente el mismo valor que el problema primal, debido al teorema de dualidad fuerte.

(d) (2 pts) Debido a que se ponderan los recursos(y no se suman para usar directo el concepto de precio sombra), el cambio es:

$$\Delta v^* = \frac{4}{13}12(\alpha - 1) + \frac{1}{13}10(\gamma - 1) \tag{7}$$

2. Pregunta 2 (8 pts) 1 pto por pregunta. No hay puntaje parcial.

a) F. Si es posible. Este caso ocurre cuando hay degenerancia.

b) F. Se agrega una variable en el problema dual.

c) F. Sí puede darse ese caso, pero implicaría que además ambos tienen soluciones múltiples.

d) F. Se podría dar el caso de A= 1, b = 1, c = 1, cuyo dual es factible ya que $y = 1$ pertenece al dominio dual.

e) V. En caso de que el alumno considere el viceversa como el contrarecíproco de la afirmación, debe justificar que ambos podrían ser infactibles.

f) V.

g) F. No es posible porque son diferentes variables en cada problema.

h) F. Se podría dar el caso de A= 1, b = 1, c = 1, cuyo dual es factible ya que $y = 1$ pertenece al dominio dual.

3. Pregunta 3 (4 pts) 1 pto por inciso.

   a) El gradiente

   $$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 4 \\ 6x_2 + 6 \end{bmatrix}$$

   Se debe igualar a cero. Esa es la condición necesaria de primer orden. Eso ocurre para el punto $x = (-2, -1)$.

   b) El Hessiano

   $$H_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

   debe ser semidefinido positivo. Esa es la restricción que agrega la condición necesaria de segundo orden.Eso ocurre para el punto $x = (-2, -1)$.

   c) La condición suficiente de segundo orden indica que si $\nabla f(x^*) = 0$ y $H_f(x^*)$ es DP, entonces x^* es mínimo local de $f(x)$. Eso ocurre para el punto $x = (-2, -1)$. Es más, es DP para todo el dominio.

   d) El punto $x = (-2, -1)$ cumple con las condiciones suficientes de segundo orden para ser un mínimo local. Además, es global debido a que el Hessiano es DP para todo el dominio. El valor óptimo es $v^* = -7$.

Problema 2 [20 Puntos]

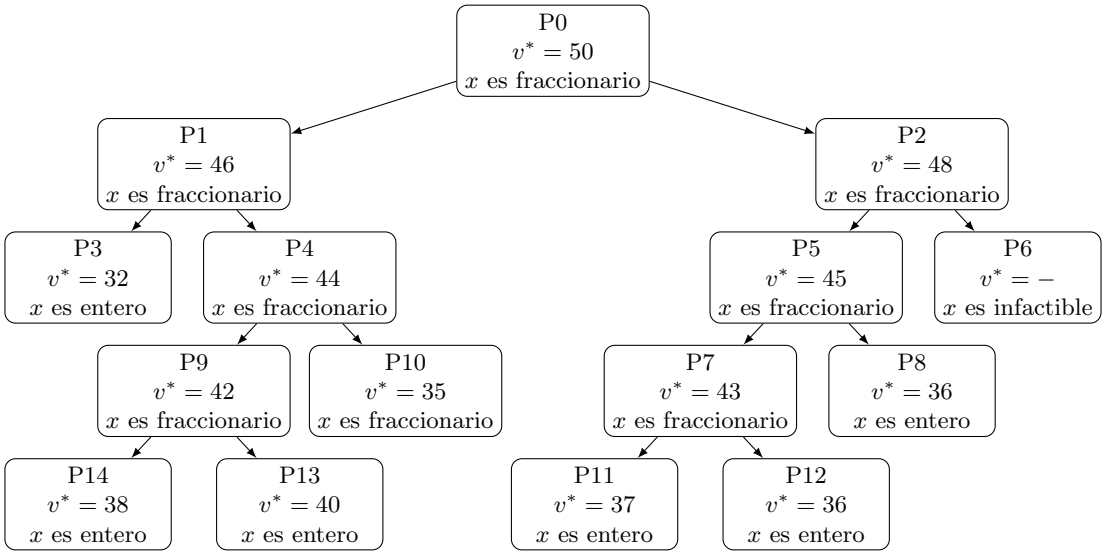
1. Considere el siguiente conjunto de puntos $W := \{(1,1);(2,5);(3,3);(4,3)\}$. Construya el conjunto de restricciones que definen la envoltura convexa de W.

2. Considere el siguiente modelo de programación lineal entera:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 2x_1 - x_2 && (8)\\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \geq 3 && (9)\\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 20 && (10)\\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^0_+ && (11) \end{aligned}$$

   Encuentre todos los valores de α y β tales que el corte $x_1 + \alpha x_2 \leq \beta$ no elimine ninguna solución factible y, al resolver el problema relajado mediante el algoritmo simplex, se obtenga una solución entera.

3. Considere el siguiente árbol de una ejecución ya terminada del algoritmo Branch & Bound sobre un problema lineal entero. El orden de solución de las relajaciones lineales de los nodos fue $P0, P1, P2, ...PN$.



   a) Indique si se está maximizando o minimizando. Explique.

   b) Elabore una tabla donde cada fila represente cada subproblema y que tenga las siguientes columnas: (1) el número del nodo, (2) valor incumbente inmediatamente después de resolver la relajación lineal del nodo, (3) la mejor cota (aquella cota que no sea igual al valor incumbente) y (4) el gap. Si algunos de estos valores no existen todavía, entonces debe incluir el $+\infty$ o el $-\infty$ cuando corresponda. Considere el gap = ‖incumbente - mejor cota‖/incumbente.

   c) Este árbol se exploró utilizando la estrategia Breadth First Search (BFS). Indique una posible secuencia de exploración de nodos utilizando la estrategia Depht First Search (DFS) hasta encontrar la solución óptima.

4. Considere los siguientes ejercicios relacionados a los cortes de Gomory:

   a) Sea $P) = \{min \quad c^T x; Ax = b; x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$. En la solución óptima de la relajación de P, al menos 1 variable x_k es positiva y fraccional. Se pide demostrar la validez de un corte de Gomory, paso por paso:

      1) Escriba el problema en forma estándar. En las restricciones despeje las variables básicas, asumiendo que conoce la base óptima de la relajación lineal.
      2) En la restricción en que está presente x_k, demuestre la deducción de un corte de Gomory.

b) Sea el siguiente problema lineal entero:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{máx } x_1 + 2x_2 \\ & \text{s. a. } 2x_1 + 5x_2 \leq 16 \\ & \quad 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Resuelva el problema por medio de agregar cortes de Gomory y grafíque cada restricción nueva junto al dominio del problema.

Solución

1

(2 pts)
Las restricciones solicitadas son:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad x_1 + x_2 \leq 7 \\ &\text{(b)} \quad x_2 - 4x_1 \leq -3 \\ &\text{(c)} \quad 3x_2 - 2x_1 \geq 1 \end{aligned} \tag{12}$$

No es necesario adjuntar una imagen de cómo se vería el gráfico, pero este sería así:

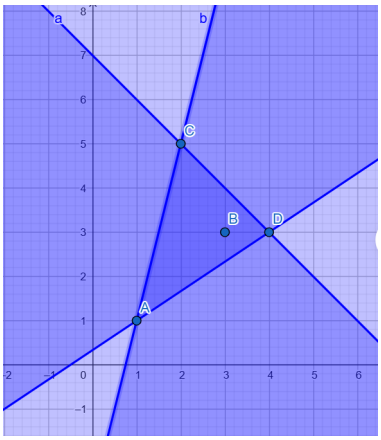


Figura 1: Envoltura convexa

2

(4 pts) 2 pts por cada límite del intervalo correcto. Al graficar, se observa que la solución óptima del problema entero es $x = (2, 1)$

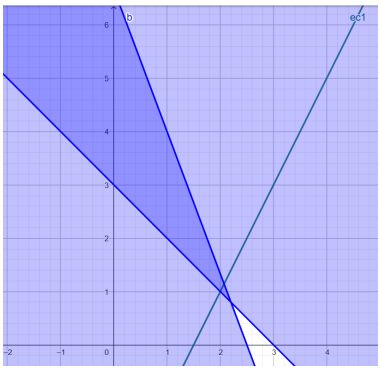


Figura 2: curva de nivel en el problema

por lo que debemos introducir un corte que:

- Pase por el punto $x = (2, 1)$.
- No corte ninguna solución entera factible del dominio.
- Tenga una inclinación que logre que el punto $x = (2, 1)$ sea óptimo.
- Que tenga esta forma: $x_1 + \alpha x_2 \leq \beta$.

El primer punto establece la relación entre α y β. Se tiene $2 + \alpha = \beta$.

Se tiene 3 casos posibles estudiar:

- $\alpha > 0$ debe darse siempre que esa restricción no corte al punto $x = (1, 4)$ que es el punto entero más extremo que este corte podría cortar. En el caso extremo lo toca, por lo que $1 + 4\alpha = \beta$ y entonces $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$. Luego el rango de valores para este segmento es: $(\alpha, \beta) = (k, k + 2) \quad \forall k \leq \frac{1}{3}$
- $\alpha = 0$, En este caso particular se cumple lo pedido, por lo que $(\alpha, \beta) = (0, 2)$
- $\alpha < 0$ Se debe escoger un valor de α que logre que la solución óptima sea el punto $x = (2, 1)$ y que no lo sea el nuevo vértice que se generará entre este corte y la restricción $8x_1 + 3x_2 \leq 20$. Para esto basta tener una pendiente mayor a la función objetivo por lo que, en el caso extremo $\alpha = \frac{-1}{2}$.Luego el rango de valores para este segmento es: $(\alpha, \beta) = (k, k + 2) \quad 0 > k > \frac{-1}{2}$

Por lo que finalmente:

$$\{(\alpha, \beta) \mid \beta = \alpha + 2, \ \frac{-1}{2} < \alpha \leq \tfrac{1}{3}\} \tag{13}$$

3

(8 pts)

(a) (1 pto) Es de maximización porque el árbol disminuye en valor a medida que crece.

(b) (5 pts) Se elabora la tabla pedida: Se otorga puntaje proporcional al logro de la tabla.

Número de Nodo	Incumbente	Mejor Cota	Gap
0	$-\infty$	50	$+\infty$
1	$-\infty$	50	$+\infty$
2	$-\infty$	48	$+\infty$
3	32	48	0,5
4	32	48	0,5
5	32	48	0.5
6	32	45	0.406
7	32	45	0.406
8	36	44	0.222
9	36	44	0.222
10	36	43	0.1944
11	37	43	0.1621
12	37	42	0.1351
13	40	42	0.05
14	40	40	0

Cuadro 1: Tabla para el problema de minimización.

(c) (2pts) Acá lo importante es hacer la exploración con prioridad en la profundización y seguir las reglas de Branch&Bound. Pueden darse casos en que se explore en profundidad, pero que no se sigan las reglas de Branch&Bound. Cualquier camino es válido mientras siga las reglas.

Una posible exploración inválida de DFS es la siguiente: $P_0, P_1, P_3, P_4, P_{10}, P_9, P_{14}, P_{13}, P_2, P_5, P_7, P_{11}, P_{12}, P_8, P_6$
Es inválida, debido a que, siguiendo las reglas de Branch&Bound, el nodo 10 se debiese ramificar. Esto es puesto que en ese momento no se conocía un incumbente mayor a 35, como sí ocurrió en el caso de BFS.

Una posible exploración de DFS:
$P_0, P_1, P_3, P_4, P_9, P_{14}, P_{13}, P_{10}, P_2, P_5, P_7, P_{11}, P_{12}, P_8, P_6$

Otra posible exploración de DFS:
$P_0, P_2, P_6, P_5, P_8, P_7, P_{12}, P_{11}, P_1, P_4, P_{10}, P_9, P_{13}, P_{14}, P_3$
Hay otras, cualquiera es válida mientras realice DFS.

4

(6 pts)

(a) (I) (1 pto)El problema en forma estándar es el siguiente: $P) = \{\text{mín} \quad c^T x;\ Ax = b;\ x \geq 0\}$.
Sea B la base óptima. Al despejar lo pedido se presenta así: $x_B + B^{-1}A_N x_N = B^{-1}b$.

(II) (2 pts) Se escribe la k-ésima fila de la ecuación anterior:

$$x_k = b_k - \sum_{j \in N} a_{kj} x_j$$

En la k-ésima fila de la ecuación anterior, se separan las componentes enteras de las fraccionarias:

$$x_k = \lfloor b_k \rfloor - \sum_{j \in N} \lfloor a_{kj} \rfloor x_j + (b_k - \lfloor b_k \rfloor) - \sum_{j \in N} (a_{kj} - \lfloor a_{kj} \rfloor) x_j$$

Sea $\Theta = (b_k - \lfloor b_k \rfloor) - \sum_{j \in N} (a_{kj} - \lfloor a_{kj} \rfloor) x_j$ la parte derecha de la ecuación anterior. Hay que notar que todos los otros términos de la ecuación anterior que no son Θ) deben ser enteros. Esto porque son variables enteras multiplicadas por números enteros ($\lfloor a_{kj} \rfloor$) por lo que dan enteros. Además, x_k debe ser entera.

Lo anterior fuerza a que Θ sea entero. Se observa que $(b_k - \lfloor b_k \rfloor) < 1$ y que las variables x_j no pueden ser negativas, pero están restando al término $(b_k - \lfloor b_k \rfloor) < 1$ en el interior de Θ. Por lo anterior, $\Theta \leq 0$. Luego se puede forzar el siguiente corte:

$$\sum_{j \in N} (a_{kj} - \lfloor a_{kj} \rfloor) x_j \geq b_k - \lfloor b_k \rfloor$$

Esta desigualdad es válida para todos los enteros factibles y queda demostrado lo pedido

(b) (3 pts) Se construye el problema en su forma estándar, forzando la relajación lineal:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{mín} \ -x_1 - 2x_2 \\ & \text{s. a.} \ 2x_1 + 5x_2 + h_1 = 16 \\ & \quad 6x_1 + 5x_2 \quad + h_2 = 30 \\ & \quad x_1, x_2, h_1, h_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Se observa que la base óptima de la relajación lineal es $B = [x_1, x_2]$ por medio de solución gráfica.

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se completan algunos elementos de

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \end{bmatrix}, \quad \bar{A_N} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

Se escribe el corte de Gomory asociados a la primera variable.

$$\sum_{j \in N} (a_{kj} - \lfloor a_{kj} \rfloor) x_j \geq b_k - \lfloor b_k \rfloor$$

$$(\frac{-1}{4} - \lfloor \frac{-1}{4} \rfloor) h_1 + (\frac{1}{4} - \lfloor \frac{1}{4} \rfloor) h_2 \geq \frac{7}{2} - \lfloor \frac{7}{2} \rfloor$$

$$(\frac{-1}{4} + 1) h_1 + (\frac{1}{4} - 0) h_2 \geq \frac{1}{2}$$

$$3h_1 + h_2 \geq 2$$

Ese corte se puede escribir en términos de las variables del problema original, reemplazando las restricciones de forma estándar:

$$3h_1 + h_2 \geq 2$$

$$3(16 - (2x_1 + 5x_2) + (30 - (6x_1 + 5x_2)) \geq 2$$

$$78 - 12x_1 - 20x_2 \geq 2$$

Se grafica el problema con esa nueva restricción:



Figura 3: Nueva restricción

Con eso se puede verificar por solución gráfica que el punto óptimo es $x = (3, 2)$ y su valor óptimo es $v^* = 7$.

Problema 3 [20 Puntos]

Para alimentar a sus codornices al menor costo, la empresa Yema debe elaborar una mezcla de exactamente 1000 kg (una tonelada) utilizando un conjunto J de cereales. Cada cereal $j \in J$ tiene un costo por kilogramo c_j y contiene proporciones masa–masa $a_{i,j}$ del nutriente esencial $i \in I$. El veterinario establece que en la mezcla final, la masa total del nutriente i debe quedar entre b_i kg y l_i kg. Por ejemplo, si $b_i = 150$, al menos 150 kg del nutriente i deben estar presentes en la mezcla final. El problema consiste en determinar la cantidad en kilogramos x_j de cada cereal que se debe utilizar, de forma que se cumplan todas las restricciones nutricionales y se minimice el costo total. El problema de programación lineal propuesto es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & \sum_{j \in J} c_j \, x_j \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{j \in J} x_j = 1000, \\
& \sum_{j \in J} a_{i,j} \, x_j \geq b_i \qquad \forall i \in I, \\
& \sum_{j \in J} a_{i,j} \, x_j \leq l_i \qquad \forall i \in I, \\
& x_j \geq 0 \qquad \forall j \in J.
\end{aligned}
$$

Nota: Dentro de los archivos entregados, se encuentra un archivo llamado `pregunta3.py` que incluye un instancia de este problema. Debe modificar y subir ese archivo respondiendo las siguientes preguntas. Para cada una de ellas, debe imprimir los resultados ordenados como tablas en la consola e imprimir cualquier explicación necesaria de los mismos. El nombre del archivo debe ser modificado incluyendo el número de grupo `pregunta3-XXX.py` o apellido.

(a) (4 pts) Obtenga la solución óptima y el valor óptimo para la instancia del problema adjunta.

(b) (4 pts) Obtenga los costos reducidos de las variables en el óptimo. ¿Cumplen con el criterio de optimalidad? ¿Por qué?

(c) (4 pts) Obtenga el rango de valores en los que pueden estar las cantidades mínimas y máximas de cada nutriente $i \in I$ de la dieta de forma que la base encontrada en (a) siga siendo óptima.

(d) (4 pts) ¿En cuánto cambia el valor de la función objetivo si la cantidad mínima de proteínas disminuye en 3 unidades? Utilice el valor de las variables duales para responder esta pregunta.

(e) (4 pts) La empresa Yema le indica que los sacos de cereal vienen de a 5 kilos a partir de ahora (mismo \$/kg), por lo que decide cambiar su modelo para que solo pueda ordenar cantidades enteras sacos. Cree un nuevo modelo, con los cambios necesarios para lograr su objetivo. Compare el valor objetivo de este problema con el encontrado en (a). ¿En qué porcentaje aumenta o disminuye el valor objetivo respecto al problema original?