ICS1113 OPTIMIZACION, 2011-1.
INTERROGACION 1.

Instrucciones: La prueba tiene 4 partes que totalizan 100 puntos. Responda en el cuadernillo que se le ha entregado de tal forma de que las partes queden en hojas separadas. Coloque su **nombre, sección y número de lista (no número de alumno)** en cada una de las hojas de los cuadernillos. **Si no se atiene a estas instrucciones se le descontarán 5 puntos del puntaje de la prueba, sin derecho alguno a reclamo posterior.** No usar calculadoras programables ni teléfonos celulares. Dispone de 120 minutos.

Parte 1 (25pts).

a) (15pts) Una nación ubicada en el medio oriente cuenta con grandes reservas de crudo. Los científicos locales han logrado determinar que el estado posee N pozos petroleros de los cuales solo una fracción está siendo explotada. Suponga que de cada pozo $i = 1,..,N$, se puede obtener K_i barriles mensuales. Suponga además que extraer un barril del pozo $i = 1,..,N$ cuesta E_i dólares.
La calidad del petróleo varía a lo largo del país. Suponga dicha calidad conocida y asuma que en cada barril de petróleo extraído del pozo $i = 1,..,N$ hay una capacidad calorífica de B_i BTU (Britsh Thermal Unit).

En este momento el país está decidiendo acerca de su política de abastecimiento energético durante los próximos 24 meses. Los estudios del ministerio de Energía han estimado que la demanda mensual será de D_t GWh (Giga Watt hora), en donde $t = 1,..,24$. Una de las tareas principales del gobierno es satisfacer esa demanda generando la energía en sus centrales térmicas.
En el país hay M plantas termoeléctricas, en donde cada planta $j = 1,..,M$ tiene una potencia de P_j MW. Lo anterior equivale a decir que dicha planta puede generar P_j MWh en una hora. En términos de consumo las plantas están fabricadas con la última tecnología disponible que les permite usar eficientemente el petróleo y funcionar las 24 horas del día. Suponga que tienen un rendimiento de G_j KWh/BTU y que cada KWh cuesta $\$H_j$ dólares, más el costo en combustible.

Suponga que las decisiones se toman de manera centralizada y el objetivo es minimizar el costo percibido por la generación eléctrica en 24 meses. Plantee el modelo de optimización que le permita al ministerio de Energía tomar la decisión óptima de producción. Sea claro declarando variables, restricciones y función objetivo.

SOLUCION:

Sea
X_{ij}^t: *Los Barriles extraidos del pozo 'i'para generar electricidad en la planta termoeléctrica 'j' dura el mes 't'*. Donde i=1,..,N, j=1,..,M y t=1,..,24.
$DiasMes(t)$: Corresponde a los día que posee el mes *'t'*.

$$FO: Min \sum_{t=1}^{24} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} (E_i * X_{ij}^t + H_j * G_j * B_i * X_{ij}^t)$$

Sujeto a:

$$1) \sum_{j=1}^{M} X_{ij}^t \leq K_i \ \forall\, i = 1,..N\,, \forall t = 1,..24$$

$$2) \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} X_{ij}^t * G_j * B_i \geq D_t * 10^6 \ \forall t = 1,..24$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{N} X_{ij}^{t} * G_j * B_i \leq P_j * DiasMes(t) * 24 * 10^3 \ \ \forall\, j = 1,..M\ , \forall t = 1,..24$$

$$4)\ X_{ij}^{t} \geq 0\ , \forall i, j, t$$

b) (5pts) Suponga que, adicionalmente, hay un subconjunto de $PI \subset \{1,..,N\}$ pozos que no han sido explotados. Esto significa que al momento de tomar la decisión de explotación del pozo, existe un costo adicional fijo CF_i incurrido sólo una vez. Explique cómo cambiaría su modelo descrito en a). Puede declarar nuevas variables, restricciones y cambios en la función objetivo. No es necesario que reescriba el modelo.

SOLUCION:

Agregamos la variable binaria Y_i y dos restricciones. El problema nos queda:

$$Y_i \begin{cases} 1\ se\ toma\ la\ decisión\ de\ explotar\ el\ pozo\ i \\ 0\ Si\ no \end{cases}$$

$$FO: Min \sum_{t=1}^{24} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} (E_i * X_{ij}^{t} + H_j * G_j * B_i * X_{ij}^{t}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \subset PI}}^{N} Y_i * CF_i$$

Sujeto a:

$$1) \sum_{j=1}^{M} X_{ij}^{t} \leq K_i\ \forall\, i = 1,..N\ , \forall t = 1,..24$$

$$2) \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} X_{ij}^{t} * G_j * B_i \geq D_t * 10^6\ \forall t = 1,..24$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{N} X_{ij}^{t} * G_j * B_i \leq P_j * DiasMes(t) * 24 * 10^3 \ \ \forall\, j = 1,..M\ , \forall t = 1,..24$$

$$4)\ X_{ij}^{t} \geq 0\ , \forall i, j, t$$

$$5)\ X_{ij}^{t} \leq\ Y_i * G \quad , G\ muy\ grande\ \forall i \subset PI$$

$$6)\ Y_i \in \{0,1\}$$

La restricción 5) también puede ser expresada como: $\sum_{J=1}^{M} \sum_{T=1}^{24} X_{ij}^{t} \leq\ Y_i * G \ \ \forall i$ ó como $\sum_{J=1}^{M} X_{ij}^{t} \leq\ Y_i * G \ \ \forall i, t$ ó como $\sum_{t=1}^{24} X_{ij}^{t} \leq\ Y_i * G \ \ \forall i, j$

NOTA DE CORRECCIÓN: No es necesario reescribir todo el modelo denuevo.

c) (5pts) Suponga ahora, que por razones técnicas, ninguna planta termoeléctrica puede generar menos de Pm_j MWh por hora. Esto es relativamente común, puesto que las turbinas de la planta pueden resultar dañadas a bajas velocidades. De esta manera hay dos opciones durante cada mes: Producir sobre el umbral descrito ó no hacerlo. Explique cómo cambiaría su modelo descrito en a). Puede declarar nuevas variables, restricciones y cambios en la función objetivo. No es necesario que reescriba el modelo.

SOLUCION:

Agregamos la variable binaria Z_j^t, modificamos la restricción 2 y agregamos dos nuevas.

$$Z_j^t: \begin{cases} 1\ si\ se\ produce\ en\ la\ planta\ j\ durante\ el\ periodo\ t. \\ 0\ \ Si\ no \end{cases}$$

$$FO: Min \sum_{t=1}^{24} \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} (E_i * X_{ij}^t + H_j * G_j * B_i * X_{ij}^t)$$

Sujeto a.

$$1) \sum_{j=1}^{M} X_{ij}^t \leq K_i \ \forall\ i = 1,..N\ , \forall t = 1,..24$$

$$2) \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} X_{ij}^t * G_j * B_i \geq D_t * 10^6\ \forall t = 1,..24$$

$$3) \sum_{i=1}^{N} X_{ij}^t * G_j * B_i \leq P_j * DiasMes(t) * 24 * 10^3\ \ \forall\ j = 1,..M\ , \forall t = 1,..24$$

$$4)\ X_{ij}^t \geq 0\ , \forall i, j, t$$

$$5) \sum_{i=1}^{N} X_{ij}^t * G_j * B_i \geq Pm_j * Z_j^t * DiasMes(t) * 24 * 10^3\ \ \forall\ j = 1,..M\ , \forall t = 1,..24$$

$$6)\ \sum_{i=1}^{N} X_{ij}^t * G_j * B_i \leq Z_j^t * G \quad , G\ muy\ grande, \forall j, t$$

NOTA DE CORRECCIÓN: No es necesario reescribir todo el modelo denuevo.

Parte 2 (25pts).

a) (10pts) Considere el siguiente problema no lineal, y escriba un problema equivalente diferenciable:

$$Min \left(\max\left\{ \ln|x+y+1|, x, \sqrt{x^2+y} \right\} \right)$$
$$s.a. \quad |x-2y| \le 10$$
$$y \ge 0$$

HINT: Un problema diferenciable es aquel que tanto el dominio como la función objetivo están formados por funciones diferenciables.

SOLUCION:

Lo primero es cambiar la función objetivo por una diferenciable

$$Min\ \mu$$

Donde

$$\mu = \max\{\ln|x+y+1|, x, \sqrt{x^2+y}\} \qquad \mu \in \Re$$
$$\Rightarrow \mu \ge \ln|x+y+1|$$
$$\mu \ge x$$
$$\mu \ge \sqrt{x^2+y}$$

A su vez se tiene que

$$\mu \ge \ln|x+y+1|$$
$$\Rightarrow e^{\mu} \ge (x+y+1)$$
$$e^{\mu} \ge -(x+y+1)$$

Y también hay que considerar que

$$|x-2y| \le 10$$
$$\Rightarrow x-2y \le 10$$
$$-(x-2y) \le 10$$

Por lo que el problema equivalente pedido es

$$Min\ \mu$$
$$s.a \quad e^{\mu} \ge (x+y+1)$$
$$e^{\mu} \ge -(x+y+1)$$
$$\mu \ge x$$
$$\mu \ge \sqrt{x^2+y}$$
$$10 \ge x-2y$$
$$10 \ge -x+2y$$
$$0 \le y$$
$$\mu \in \Re$$

b) (15pts) Resuelva gráficamente el siguiente problema de optimización. Sea explícito al entregar la solución y el valor óptimo.

$$
\begin{aligned}
Min \quad & \frac{1}{2}x + y \\
s.a. \quad & y - sen(x) \geq 0 \\
& x \leq \frac{3}{2}\pi \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

SOLUCION:

Se tiene que las curvas de nivel tienen la forma

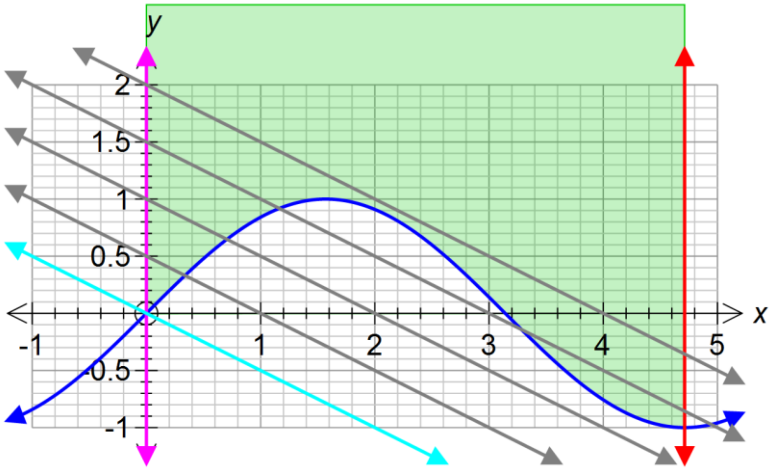
$$C = \frac{1}{2}x + y$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{2}x + K$$

donde K es una constante.
Por otro lado las curvas de restricciones son

$$
\begin{aligned}
& y \geq sen(x) \\
& x \leq \frac{3}{2}\pi \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Graficamos y se obtiene



De donde se calcula que el mínimo está dado por

$$x^* = 0$$

$$y^* = 0$$

$$\Rightarrow z^* = 0$$

Parte 3 (25pts).

a) Demuestre que los siguientes problemas admiten solución **(9pts c/u):**

$$\begin{aligned} Min \quad & y^2 - 10y + x^2 - 15x \\ s.a. \quad & x + y \le 10 \\ & x - 2y \le 10 \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Min \quad & x^2 + y^2 - 2x \\ s.a. \quad & y \le 3 \\ & |xy| \le 4 \end{aligned}$$

SOLUCION:

Para el caso 1, demostremos existencia a través de la extensión del Teorema Bolzano-Weierstrass:

- **(2pts)** En primer lugar, debemos ver que la función objetivo es continua en todo $\mathbb{R}$ (y por lo tanto también en el dominio), pues un polinomio lo es.
- **(2pts)** Ω es cerrado (contiene los bordes).
- **(2pts)** Ω es no vacío (basta con mencionar un punto factible).
- **(2pts)** Luego, debemos demostrar que si:

$$\|\mathbf{x}\| \to \infty \implies y^2 - 10y + x^2 - 15x \to \infty$$

Hay varias formas válidas para demostrar lo anterior (se puede usar cualquier forma válida), una de ellas es completando cuadrados:

$$y^2 - 10y + x^2 - 15x = (y-5)^2 + (x-7{,}5)^2 - 25 - 56{,}25$$

Lo que claramente crece sin cota si $\|\mathbf{x}\| \to \infty$

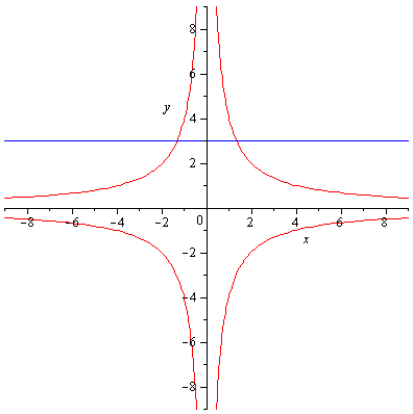
(1pto) Luego, se cumplen las 4 condiciones de la Extensión del Teorema Bolzano-Weierstrass, por lo que el problema tiene solución óptima.

Para el caso 2:

- **(2pts)** En primer lugar, debemos ver que la función objetivo es continua en todo $\mathbb{R}$ (y por lo tanto también en el dominio), pues un polinomio lo es.
- **(2pts)** Ω es cerrado (contiene los bordes).
- **(2pts)** Ω es no vacío (basta con mencionar un punto factible).
- **(2pts)** Luego, debemos demostrar que si:

$$\|\mathbf{x}\| \to \infty \implies x^2 + y^2 - 2x \to \infty$$

Grafiquemos el dominio:
Sea Ψ el dominio del problema.



Hay 3 puntos de escape: $(\infty, 0)$, $(-\infty, 0)$, $(0, -\infty)$, en cada uno de los puntos la función objetivo tiende a infinito. Luego, se cumplen las 4 condiciones de la Extensión del Teorema Bolzano-Weierstrass, por lo que el problema tiene solución óptima. **(1pto)**

NOTA DE CORRECCIÓN 1: En vez del límite se puede demostrar que la función objetivo está acotada inferiormente en el dominio.
NOTA DE CORRECCIÓN 2: Se acepta toda clase de criterios gráficos y lógicos mientras el argumento sea sólido y explicite las condiciones de Bolzano Weierstrass.

b) (7pts) ¿Es cada uno de los problemas de la parte a) convexo? ¿Por qué?

SOLUCION:

Para demostrar que el problema es convexo, hay que demostrar que tanto el dominio como la función objetivo sean convexas **(2pts).**
Para el caso 1: El dominio es convexo, ya que es lineal (con sólo decir esto basta, también con demostración gráfica o por definición de convexidad). La función objetivo es claramente convexa, pues es un paraboloide estrictamente convexo en $\mathbb{R}^2$ (con sólo decir esto basta, también con demostración gráfica, por definición de función convexa ó con Hessianos). Por lo tanto es un problema convexo. **(2,5pts por el análisis)**
Para el caso 2: El dominio es claramente no convexo (ver gráfico), pues una combinación convexa de dos puntos dentro del dominio puede quedar fuera de este. Luego el problema no es convexo. **(2,5pts por el análisis, demostración por definición también es válida).**

Parte 4 (25pts).

Responda brevemente cada una de las afirmaciones indicando si es verdadera o falsa. Entregue un argumento sólido que justifique la respuesta en ambos casos **(5pts c/u)**.

SOLUCION:

i) "Un buen modelo debe absorber la mayoría de las características de un problema real."

Falso, un buen modelo debe absorber sólo las características más relevantes e influyentes que determinan el comportamiento del sistema frente a un objetivo específico. Características adicionales a estas son irrelevantes y aumentan la complejidad del modelo.
NOTA DE CORRECCIÓN: Si dice que es verdadera y la argumenta con una justificación similar está correcta.

ii) "Para indicar que no existe solución óptima, basta con verificar que una de las condiciones de Bolzano-Weierstrass no se cumpla."

Falso, el teorema de B-W identifica condiciones suficientes para existencia de optimalidad, pero no condiciones necesarias.
NOTA DE CORRECCIÓN: Un contraejemplo también es válido.

iii) "Si se demuestra que el óptimo local es global, entonces la solución es única."

Falso, un óptimo global puede no ser estricto, en ese caso el problema tendría múltiples soluciones.
NOTA DE CORRECCIÓN: Un contraejemplo también es válido

iv) "Si se resuelve el problema: $Min: f(X)$; $s.a.\ X \in \Omega$ y existe la solución óptima, entonces es seguro que el problema: $Min: f(X)$; $s.a.\ X \in \Delta$, con $\Omega \subset \Delta$ tendrá un menor valor óptimo."

Falso, el tener un conjunto de soluciones factibles con más elementos no asegura que el valor óptimo mejore. Esto se debe a que las soluciones factibles adicionales podrían ser perfectamente todas peores a la solución óptima actual en valor óptimo. Así el valor óptimo permanecería invariante.
NOTA DE CORRECCIÓN: Un contraejemplo también es válido.

v) "En una fábrica, maximizar el número de unidades producidas por unidad monetaria es equivalente a minimizar el costo monetario asociado a cada unidad. Del mismo modo maximizar las utilidades de la fábrica es igual a minimizar sus costos si el ingreso percibido es constante."

Verdadero. El primer caso es una equivalencia de recíprocos con valores positivos (Ver clase de equivalencias). Para el segundo se utilizan dos equivalencias. Sabiendo que las utilidades son iguales a los ingresos menos los costos y que el ingreso es constante, esto es equivalente a maximizar los costos en negativo. Por otra parte esto último es equivalente a minimizar costos.
NOTA DE CORRECCIÓN: Usar formulaciones matemática para demostrar esto también es válido.