PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2022

Interrogación 02

Duración total: 120 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. **Sólo se aceptarán preguntas de enunciado**. Si la pregunta no es de enunciado o una aclaración de este, no se le dará respuesta alguna.
5. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
6. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** 1/5 **de una respuesta correcta**.
7. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).
8. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y será calificado con la nota mínima. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

   Adulterar el acta de asistencia

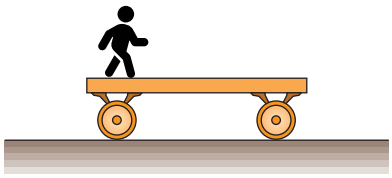
   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Problema 1 [0.5 punto]

Una persona está en un carro que rueda sin roce. El carro pesa 20 kg y la persona 80 kg. Si la persona comienza a moverse hacia la derecha con una velocidad de 2 m/s respecto al carro, determine la velocidad absoluta con que se mueve el carro.



a) otro valor

b) 0,5 m/s hacia la derecha

c) 0,2 m/s hacia la izquierda

d) 0,8 m/s hacia la izquierda

e) 0,4 m/s hacia la izquierda

Solución

La fuerza que pone en movimiento a la persona (y por ende al carro) es una fuerza de tipo "interna", lo que significa que se conserva el momentum lineal del sistema.

Considerando la masa del carro $m_c = 20\,\text{kg}$ y la masa de la persona $m_p = 80\,\text{kg}$, con el eje x positivo hacia la derecha, se tiene que:

$$m_p\, v_{p1} + m_c\, v_{c1} = m_p\, v_{p2} + m_c\, v_{c2}$$
$$0 + 0 = 80\, v_{p2} + 20\, v_{c2}$$

Por otro lado, se sabe que la persona se mueve con velocidad 2 m/s respecto al carro. Es decir:

$$v_{p/c} = v_{p2} - v_{c2} = 2$$

Con ello, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

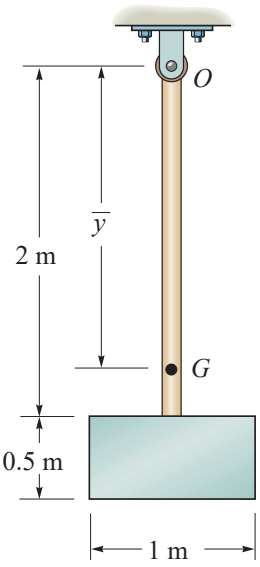
$$\left.\begin{array}{l} 80\, v_{p2} + 20\, v_{c2} = 0 \\ v_{p2} - v_{c2} = 2 \end{array}\right\}$$

La solución del sistema es:

$$v_{p2} = \frac{2}{5} = 0{,}4\ \text{m/s} \qquad\qquad v_{c2} = -\frac{8}{5} = -1{,}6\ \text{m/s}$$

Es decir, el carro se mueve con velocidad (absoluta) de 1,6 m/s hacia la izquierda.

Problema 2 [0.5 puntos]



Un péndulo consiste de una barra de masa $m_b = 2\,\text{kg}$ y una placa rectangular de masa $m_p = 3\,\text{kg}$.

Determine la ubicación $\overline{y}$ del centro de masa medido desde el pivote O (como muestra la Figura).

a) $\overline{y} = \dfrac{7}{4}\ \text{m}$

b) $\overline{y} = \dfrac{23}{10}\ \text{m}$

c) $\overline{y} = \dfrac{19}{10}\ \text{m}$

d) $\overline{y} = \dfrac{3}{2}\ \text{m}$

e) $\overline{y} = \dfrac{57}{32}\ \text{m}$

Solución

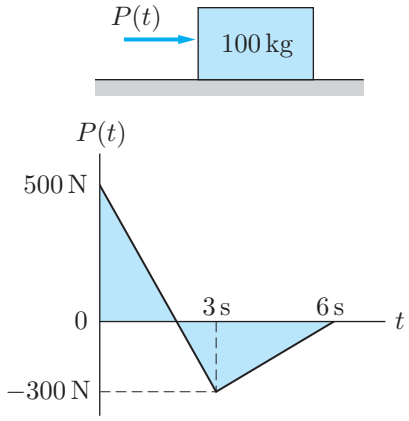
El centro de masa del objeto compuesto se ubica en:

$$\overline{y} = \frac{m_b\,\overline{y}_b + m_p\,\overline{y}_p}{m_b + m_p} = \frac{(2)\,(1) + (3)\left(2 + \frac{1}{4}\right)}{2+3} = \frac{2 + \frac{27}{4}}{5} = \left(\frac{35}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\rightarrow \qquad \overline{y} = \frac{7}{4}\ \text{m}$$

Problema 3 [0.5 puntos]

Un bloque de 100 kg se encuentra en reposo en una superficie sin roce como muestra la figura. En $t = 0$ se comienza aplicar una fuerza $P(t)$ como se muestra en el gráfico. Determine la velocidad $v(3)$ que alcanza el bloque en $t = 3\,\text{s}$.



a) $v(3\,\text{s}) = 3{,}0\ \text{m/s}$

b) $v(3\,\text{s}) = -1{,}5\ \text{m/s}$

c) $v(3\,\text{s}) = -4{,}5\ \text{m/s}$

d) $v(3\,\text{s}) = 6{,}0\ \text{m/s}$

e) $v(3\,\text{s}) = 1{,}5\ \text{m/s}$

Solución

El principio de impulso–momentum establece que $m\,v_1 + \int f\,\text{d}t = m\,v_2$. En este caso el bloque comienza del reposo, i.e. $v_1 = 0$, con lo que:

$$(m)\,(0) + \int_0^{3\,\text{s}} f\,\text{d}t = (m)\,(v_{t=3\,\text{s}})$$

, donde la integral es el área de un trapecio con base $b = 3\,\text{s}$, y con alturas $h_1 = 500\,\text{N}$ y $h_2 = -300\,\text{N}$. Es decir:

$$0 + \frac{1}{2}\,[500 + (-300)]\,(3\,\text{s}) = (m)\,(v_{t=3s})$$

$$300 = (m)\,(v_{t=3\,\text{s}})$$

Finalmente, despejando la velocidad $v(3)$ se obtiene:

$$v(3) = \frac{300}{100} = 3{,}0\ \text{m/s}$$

Problema 4 [0.5 puntos]

El cohete de tres etapas Saturn V envió a los astronautas del programa Apolo a aterrizar en la Luna en seis misiones diferentes. Durante la primera etapa el cohete es impulsado por cinco enormes motores que queman un hidrocarburo similar al queroseno. El cohete completamente cargado tiene una masa total de $3 \cdot 10^6\,\text{kg}$, de los cuales $2/3$ corresponden al combustible de la primera etapa, que es quemado en los primeros $200\,\text{s}$ de vuelo a una tasa constante. Si el cohete expulsa el combustible quemado a una rapidez constante, relativa al cohete, de $3500\,\text{m/s}$. ¿Cuál es la aceleración del cohete al inicio de la primera etapa?
Nota: Asuma que el cohete parte del reposo, tiene trayectoria vertical, y además $g = 10\,\text{m/s}^2$.

a) $\frac{5}{3}\,\text{m/s}^2$

b) $2\,\text{m/s}^2$

c) $\frac{6{,}5}{3}\,\text{m/s}^2$

d) $\frac{3}{5}\,\text{m/s}^2$

e) 0

Solución
La rapidez con que se quema el combustible es constante:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \dot{m} = \left(\frac{2}{3}\right)\,\frac{3 \cdot 10^6\,\text{kg}}{200\,\text{s}} = 10^4\,\text{kg/s}$$

Sobre el cohete sólo actúa la fuerza gravitatoria (peso del cohete) como fuerza externa en el eje z:

$$\sum f = -mg$$

La ecuación de masa variable para el cohete en la situación descrita es:

$$\sum f = m\,\dot{v} - v_{\text{esc}}\,\dot{m}$$
$$-mg = m\,\dot{v} - v_{\text{esc}}\,\dot{m}$$

, de donde podemos despejar la aceleración del cohete:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{-m(t)\;g + v_{\text{esc}}\,\dot{m}}{m(t)}$$

La velocidad a la que el cohete expulsa el combustible quemado es: $v_{\text{esc}} = -3500\,\text{m/s}$. Al inicio de la etapa $m_0 = m(t=0) = 3 \cdot 10^6\,\text{kg}$, por lo tanto, la aceleración del cohete es:

$$a(t=0) = \frac{-\left(3 \cdot 10^6\right)(10) + (3500)\left(10^4\right)}{3 \cdot 10^6} = \frac{5}{3}\,\text{m/s}^2$$

Problema 5 [0.5 puntos]

Un bloque de masa $m_b = M$ se deja caer desde una altura h sobre una plataforma de masa $m_p = 3M$ que está unida a un resorte de constante k. La plataforma y el resorte están en reposo antes de la colisión. Si el coeficiente de restitución asociado al choque es $e = 1/2$, la rapidez (magnitud de velocidad) del bloque justo después de la colisión es:

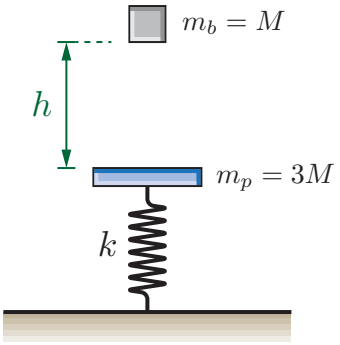
a) $\frac{1}{8}\sqrt{2\,g\,h}$

b) $\frac{3}{4}\sqrt{g\,h}$

c) $\sqrt{2\,g\,h}$

d) $\frac{3}{8}\sqrt{2g\,h}$

e) $\frac{2\,g\,h}{8}$



Solución

La rapidez del bloque justo antes del impacto se puede obtener con el principio de conservación de energía:

$$\begin{aligned} T_1 + V_{g1} &= T_2 + V_{g2} \\ 0 + Mg\,h &= \frac{1}{2}\,M\,v_{b1}^2 \\ v_{b1} &= -\sqrt{2\,g\,h} \qquad \text{(negativo: hacia abajo)} \end{aligned}$$

La velocidad del bloque justo después del choque se obtiene con el principio de conservación del momentum y coeficiente de restitución (ecuaciones de una colisión):

$$\begin{aligned} M\,v_{b1} + 3\,M\,v_{p1} &= M\,v_{b2} + 3\,M\,v_{p2} \\ e = \frac{v_{p2} - v_{b2}}{v_{b1} - v_{p1}} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como la plataforma está en reposo antes del choque, $v_{p1} = 0$, y con ello:

$$\left.\begin{array}{l} M\,v_{b1} = M\,v_{b2} + 3\,M\,v_{p2} \\ v_{p2} - v_{b2} = \frac{v_{b1}}{2} \end{array}\right\}$$

La solución del sistema es:

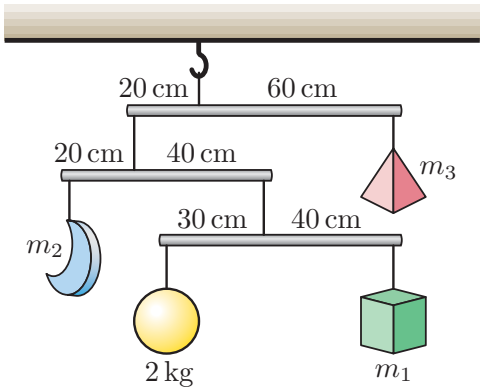
$$v_{b2} = -\frac{v_{b1}}{8} \qquad\qquad v_{p2} = \frac{3\,v_{b1}}{8}$$

Finalmente, la velocidad v_{b2} que se obtiene sustituyendo el valor de v_{b1} es:

$$v_{b2} = \frac{\sqrt{2\,g\,h}}{8} \qquad \text{(positivo: hacia arriba)}$$

Problema 6 [0.5 puntos]

La figura muestra un juguete móvil de cuna que consta de cuatro objetos que cuelgan de tres barras de masa despreciable. Encuentre el valor de m_3 si el sistema está en equilibrio (i.e. no acelera).



a) $\frac{7}{2}$ kg

b) $\frac{7}{4}$ kg

c) $\frac{63}{4}$ kg

d) 63 kg

e) $\frac{33}{12}$ kg

Solución

Para que el sistema esté en equilibrio se debe cumplir que $\sum \mathbf{m}_z = 0$ en todos los balancines. El peso de cada objeto es el que genera el momento el torno al punto donde se cuelga cada balancín.

El balancín inferior tiene colgando a la esfera y al cubo, los que ejercen un momento sobre el punto donde se cuelga el balancín. Es decir, para el balancín inferior se tiene que:

$$\sum \mathbf{m}_z^{\text{inferior}} = +(2\,g)\,(0{,}3) - (m_1\,g)\,(0{,}4) = 0$$

, donde se obtiene que $m_1 = 3/2\,\text{kg}$.

El balancín intermedio tiene colgando a la luna y al balancín inferior. Es decir, para el balancín intermedio se tiene que:

$$\sum \mathbf{m}_z^{\text{medio}} = +(m_2\,g)\,(0{,}2) - \left(2\,g + \frac{3}{2}\,g\right)(0{,}4) = 0$$

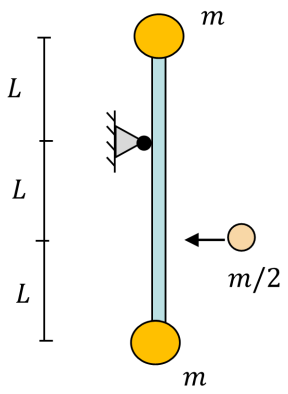
, donde se obtiene que $m_2 = 7\,\text{kg}$.

El balancín superior tiene colgando al balancín intermedio y al tetrahedro. Es decir, para el balancín superior se tiene que:

$$\sum \mathbf{m}_z^{\text{superior}} = +\left(2\,g + \frac{3}{2}\,g + 7\,g\right)(0{,}2) - (m_3\,g)\,(0{,}6) = 0$$

, donde se obtiene que $m_3 = 7/2\,\text{kg}$.

Problema 7 [0.5 puntos]



Una partícula de masa $m/2$ impacta una barra con una rapidez v. La barra es rígida, tiene masa despreciable, y conecta dos esferas de masa m en sus extremos. El coeficiente de restitución del impacto es $e = 1/2$. Determine la velocidad horizontal final de la partícula después del impacto.

Hint: Recuerde que el coeficiente de restitución corresponde a la razón entre la velocidad relativa de alejamiento y la velocidad relativa de acercamiento.

a) $v_f = \dfrac{4}{11}\, v$

b) $v_f = \dfrac{4}{7}\, v$

c) $v_f = \dfrac{2}{11}\, v$

d) $v_f = \dfrac{2}{7}\, v$

e) $v_f = \dfrac{2}{5}\, v$

Solución

Las fuerzas de la colisión genera momentos iguales pero contrarios con lo que no hay impulso angular sobre el pivote y por ello se conserva el momentum angular. Inicialmente sólo la partícula de masa $m/2$ tiene velocidad. Después de ocurrida la colisión la partícula y las dos masas de los extremos de la barra tendrán velocidad. Es decir:

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$
$$-\left(\frac{m}{2}\, v\right)(L) = \left(\frac{m}{2}\, v_f\right)(L) - \left(m\, L\, \dot{\theta}\right)(L) - \left(m\, 2L\, \dot{\theta}\right)(2L)$$

, donde se ha asumido que la partícula rebota hacia la derecha y que la barra queda girando en sentido horario. El coeficiente de restitución resulta en:

$$e = \frac{\text{velocidad relativa de separación}}{\text{velocidad relativa de acercamiento}} = \frac{v_f - \left(-L\, \dot{\theta}\right)}{v} = 0{,}5$$
$$v_f + L\, \dot{\theta} = \frac{1}{2}\, v$$

Con ello, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{m\, v\, L}{2} &= \frac{m\, v_f\, L}{2} - 5\, m\, L^2\, \dot{\theta} \\ v_f + L\, \dot{\theta} &= \frac{1}{2}\, v \end{aligned}\right\}$$

La solución del sistema es:

$$v_f = \frac{4\, v}{11} \qquad\qquad \dot{\theta} = \frac{3\, v}{22\, L} \quad \text{(sentido horario)}$$

Es decir, la partícula rebota con rapidez $4v/11$ hacia la derecha.

Problema 8 [0.5 puntos]

Un bote de masa 400 kg se mueve con rapidez $v = 10\,\mathrm{m/s}$ cuando apaga su motor. La magnitud de la fuerza de roce viscoso hidrodinámico en newtons es $40\,v^2$, donde v es la magnitud de la velocidad en m/s. Determine la distancia que ha recorrido el bote desde que apaga su motor hasta el instante en que su rapidez es de tan solo $v = 1\,\mathrm{m/s}$.



a) $\Delta u = 10\,\log 10$ m

b) $\Delta u = 9$ m

c) $\Delta u = 10\,\log 9$ m

d) $\Delta u = 9\,\log 10$ m

e) $\Delta u = 10$ m

Solución

Utilizando la 2da ley de Newton sobre el bote, se obtiene:

$$\sum f = m\,\ddot{u} - 40\,v^2 \qquad\qquad = m\,\dot{v} - \frac{1}{10}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{v^2}$$

Cuya solución es:

$$\frac{1}{10}\,t = \frac{1}{v} + C_1$$
$$v = \frac{10}{t + C_1}$$

Con la condición inicial $v_0 = 10$ se obtiene $C_1 = 1$ y con ello:

$$v(t) = \frac{10}{1 + t}$$

Consideraremos que $u_0 = 0$ en $t = 0$, y resolviendo la EDO una vez más se obtiene:

$$u = 10\,\log(1 + t) + C_2$$

Con la condición inicial $u_0 = 0$ se obtiene $C_2 = 0$ y con ello:

$$u(t) = 10\,\log(1 + t)$$

El instante de tiempo $t^\star$ en que la rapidez es $1\,\mathrm{m/s}$ es:

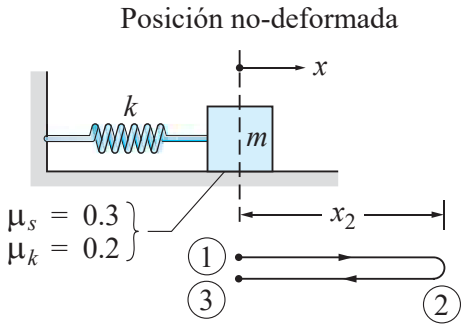
$$v(t^\star) = \frac{10}{1 + t^\star} = 1 \qquad \longrightarrow \qquad t^\star = 9\,\mathrm{s}$$

Reemplazando en la ecuación de posición y calculando el desplazamiento:

$$\Delta u = u(t^\star) - u(0)$$
$$\Delta u = 10\,\log(1 + 9) - 0 = 10\,\log(10)$$

, en metros.

Problema de Desarrollo 1 [1 punto]



Un bloque de masa $m = 4\,\text{kg}$ está en una superficie horizontal con roce y unido a un resorte de rigidez $k = 5\,{}^{\text{N}}/_{\text{m}}$. Los coeficientes de fricción estático y dinámico son $\mu_s = 0{,}3$ y $\mu_k = 0{,}2$, respectivamente. El resorte está en su largo natural cuando $x = 0$. Asuma que $g = 10\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$. El bloque se lanza con velocidad $v_1 = 2\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}}$ hacia la derecha.

Se pide determinar:

a) La distancia x_2 que recorre antes de detenerse por primera vez (punto 2 en la figura) considerando el roce con la superficie. **[0.5 puntos]**

b) El tiempo que tarda en volver a la posición de origen (trayecto de $1 \to 3$ en la figura) si se desprecia el roce con la superficie. **[0.25 puntos]**

c) El tiempo que tarda en volver a la posición de origen (trayecto de $1 \to 3$ en la figura) si se desprecia el roce con la superficie y el oscilador está amortiguado con un factor de amortiguamiento crítico $\zeta = 1/3$. **[0.25 puntos]**

Hint: Recuerde que la respuesta de un sistema sub-amortiguado es:

$$x(t) = e^{-\zeta\,\omega_n\,t}\,[\,A_1\,\cos(\omega_d\,t) + A_2\,\sin(\omega_d\,t)\,] \qquad \text{con} \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Solución

La fuerza de roce es:

$$f_r = \mu_k\,N = \mu_k\,mg = \left(\frac{2}{10}\right)(4)\,(10) = 8$$

Usando la ecuación de energía entre las posiciones inicial y final:

$$T_1 + V_1 + U_{12}^{\star} = T_2 + V_2$$
$$\frac{1}{2}\,m\,(v_1)^2 + 0 + (-f_r)\,(x_2) = 0 + \frac{1}{2}\,k\,(x_2)^2$$
$$\frac{1}{2}\,(4)\,(2^2) + (-8)\,(x_2) = \frac{1}{2}\,(5)\,(x_2)^2$$
$$5\,x_2^2 + 16\,x_2 - 16 = 0$$

Ecuación que tiene por solución $x_2 = \left\{-4\,,\,\frac{4}{5}\right\}$, donde nos interesa la solución positiva. Es decir:

$$x_2 = \frac{4}{5}\ \text{m}$$

La frecuencia natural circular y periodo del oscilador son, respectivamente:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$$
$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{4\pi}{\sqrt{5}}\ \text{s}$$

El tiempo que el oscilador tarda entre los puntos $1 \to 3$ es la mitad de una oscilación. Es decir:

$$\Delta t_{1\to 3} = \frac{T_n}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\ \text{s}$$

Un oscilador amortiguado oscila con frecuencia natural circular amortiguada igual a:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$$

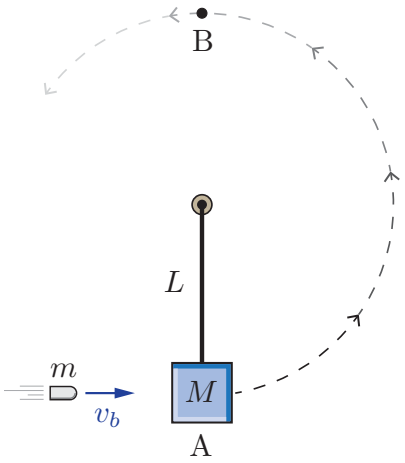
El periodo natural amortiguado es:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{6\pi}{\sqrt{10}}\ \text{s}$$

El tiempo que el oscilador amortiguado tarda entre los puntos $1 \to 3$ es la mitad de una oscilación. Es decir:

$$\Delta t_{1\to 3} = \frac{T_d}{2} = \frac{3\pi}{\sqrt{10}}\ \text{s}$$

Problema de Desarrollo 2 [1 punto]



Se dispara un proyectil de masa m a un péndulo balístico de masa M y largo L. El proyectil queda embebido dentro del péndulo.

Se pide determinar:

a) La velocidad mínima del proyectil para que el péndulo de una vuelta completa si el péndulo está conectado por una cuerda ideal. **[0.5 puntos]**

b) La velocidad mínima del proyectil para que el péndulo de una vuelta completa si el péndulo está conectado por una barra rígida de masa despreciable. **[0.5 puntos]**

Solución

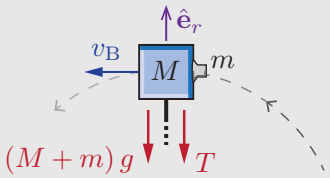
El momentum se conserva y la velocidad de ambas masas es igual después de la colisión al ser un choque perfectamente plástico (i.e. $e = 0$). Es decir:

$$m\,v_b = m\,v_\text{A} + M\,v_\text{A}$$
$$v_\text{A} = \frac{m}{m+M}\,v_b$$

, donde v_A es la velocidad del conjunto en el punto A (el punto más bajo del péndulo).

Fijando el datum ($z = 0$) en el punto más bajo del péndulo y utilizando el principio de conservación de energía, se puede determinar la velocidad en el punto B (punto más alto del péndulo con $z_\text{B} = 2L$):

$$T_1 + V_{g1} = T_2 + V_{g2}$$
$$\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{m+M}\,v_b\right)^2 + 0 = \frac{1}{2}(M+m)\,v_\text{B}^2 + (M+m)\,g\,(2L)$$
$$v_\text{B}^2 = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 v_b^2 - 4gL$$



Un DCL del conjunto en el punto más alto de la trayectoria circular permite aplicar la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton en el sentido radial y así obtener:

$$-(M+m)\,g - T = (M+m)\left(-L\,\dot{\theta}^2\right) = (M+m)\left(\frac{-v_\text{B}^2}{L}\right)$$

La tensión en la cuerda T debe ser positiva. El caso crítico se obtiene cuando $T = 0$ en el punto B. Es decir:

$$-(M+m)\,g + 0 = (M+m)\left(\frac{-v_{\mathrm{B}}^2}{L}\right)$$

$$gL = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 v_b^2 - 4gL$$

$$v_b^2 = \left(\frac{M+m}{m}\right)^2 (5gL)$$

La velocidad mínima de la bala necesaria para lograr dar la vuelta es:

$$v_{\min} = (v_b)_{T=0} = \left(\frac{M+m}{m}\right)\sqrt{5gL}$$

En el caso que se reemplace la cuerda por una barra rígida, entonces no es necesario garantizar que la tensión T sea positiva y bastaría con asegurar que el péndulo llega al punto B. Es decir, se requiere que $v_{\mathrm{B}} > 0$. Utilizando el principio de conservación de energía para el caso crítico en que $v_{\mathrm{B}} = 0$, se tiene que:

$$T_1 + V_{g1} = T_2 + V_{g2}$$

$$\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{m+M}\,v_b\right)^2 + 0 = 0 + (M+m)\,g\,(2L)$$

$$v_b^2 = 4gL\left(\frac{M+m}{m}\right)^2$$

La velocidad mínima de la bala necesaria para lograr dar la vuelta es:

$$v_{\min} > (v_b)_{V_{\mathrm{B}}=0} = 2\left(\frac{M+m}{m}\right)\sqrt{gL}$$