Capítulo 6

Impulso & Momentum

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Toda fuerza que actúa por algún intervalo de tiempo producirá un *impulso*. Los impulsos tienen la capacidad de cambiar el momentum de una partícula u objeto[1], que es una medida vectorial proporcional a la masa y la velocidad del objeto[2].

El caso de una fuerza de magnitud considerable que actúa por un periodo muy breve de tiempo, no es sencillo de analizar utilizando la ley de Newton o bien el principio de trabajo y energía. El cuerpo experimentará una considerable aceleración que podría cambiar su velocidad casi de forma instantánea. Debido a ello, el principio de impulso y momentum es útil para analizar la dinámica de colisiones, golpes, capturas, y fragmentaciones.

Existen dos términos que fonéticamente y en escritura son muy similares: *momentum* y *momento*. El momentum es la magnitud física $m\mathbf{v}$; mientras que el momento es una fuerza que tiende a producir un giro. En ciertos textos y cursos suelen llamar *torque* al momento (fuerza), y utilizan indistintamente momento o momentum para referirse a $m\mathbf{v}$. Dependiendo si el texto (o curso) es más afín con la ingeniería o la física, se podría utilizar una u otra convención:

Término	**Ingeniería**	**Física**
$\mathbf{L} = m\mathbf{v}$	Momentum	Momento/Momentum
Fuerza que produce giro	Momento	Torque

Este curso es más afín con ingeniería, por lo que utilizará *momentum* y *momento* según corresponda y evitando confundirlos. No obstante, se debe tener conciencia que otras personas y textos podrían llamar indistintamente *momentum* o *momento* a la misma magnitud física lo que puede crear confusión.

6.1. Impulso y momentum lineal

La 2$^{\text{da}}$ ley de Newton (Ecuación (3.1)) se tiene que:

$$\sum_i \mathbf{f}_i = m\,\ddot{\mathbf{u}} = m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\mathbf{u}}\right) = m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{v}\right)$$

Integrando la ecuación entre tiempos t_1 y t_2, y llamando $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}\left(t_1\right)$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}\left(t_2\right)$, se tiene:

$$\sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_i \,\mathrm{d}t = m \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} \mathrm{d}\mathbf{v}$$

[1] Análogo a cómo el trabajo cambia la energía cinética de una partícula u objeto.

[2] En el caso de energía cinética la proporcionalidad es a la masa y al cuadrado de la velocidad. Sería más apropiado decir que es proporcional al cuadrado de la norma del vector de velocidad.

Es decir, el principio de impulso y momentum dice:

$$\sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_i \, \mathrm{d}t = m\,\mathbf{v}_2 - m\,\mathbf{v}_1 \tag{6.1}$$

, donde $m\,\mathbf{v} = \mathbf{L}$ = es el *momentum lineal*;
$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \, \mathrm{d}t = \mathbf{I}$ = es el *impulso lineal* de la fuerza $\mathbf{f}$ en el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2.

La Ecuación (6.1) se puede reescribir como:

$$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{L} \tag{6.2}$$

, que en el caso cuando $\Delta t \to 0$ resulta en:

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} = \sum \mathbf{f}} \tag{6.3}$$

La Ecuación (6.1) es una ecuación vectorial. Es decir, nos entrega una ecuación escalar por cada eje coordenado[3]. Además, debido a que la masa es un escalar positivo, el momentum lineal $\mathbf{L}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$. La unidad de impulso y momentum es $^{\mathrm{kg\cdot m}}/_{\mathrm{s}}$, que es lo mismo que $\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$.

La Ecuación (6.1) se suele utilizar para conocer la velocidad final $\mathbf{v}_2$ de una partícula u objeto si se conocen las fuerzas que actúan en función del tiempo:

$$\boxed{m\,\mathbf{v}_1 + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_i \, \mathrm{d}t = m\,\mathbf{v}_2} \tag{6.4}$$

En el caso cartesiano, por ejemplo, esto resulta en 3 ecuaciones:

$$m\,v_{1x} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{ix} \, \mathrm{d}t = m\,v_{2x}$$
$$m\,v_{1y} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{iy} \, \mathrm{d}t = m\,v_{2y}$$
$$m\,v_{1z} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{iz} \, \mathrm{d}t = m\,v_{2z}$$

En la aplicación del principio de impulso y mometum se recomienda hacer una extensión del DCL llamada *diagrama de impulso y momentum*, donde 3 dibujos se hacen acordes a la Ecuación (6.4), Un ejemplo de *diagrama de impulso y momentum* se muestra en la Figura 6.1.

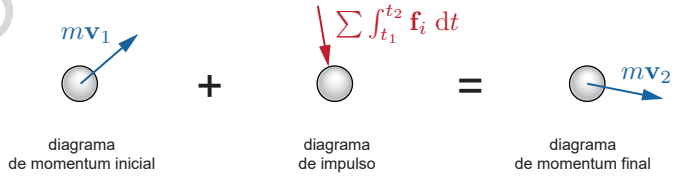


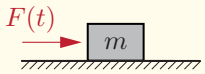
Figura 6.1: Ejemplo de un diagrama de impulso y momentum.

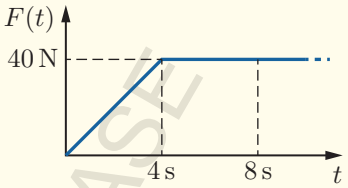
[3] A diferencia del principio de trabajo y energía.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

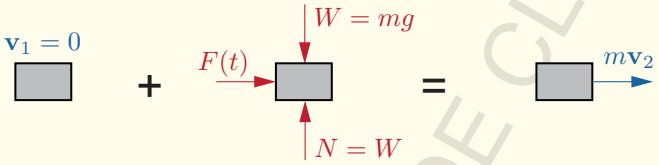
Ejemplo

Una caja de masa $m = 10\,\text{kg}$ se encuentra inicialmente en reposo. Sobre la caja se aplica una fuerza $F(t) = \min(10\,t\,,\,40)$ N. El roce entre la caja y la superficie es despreciable, i.e. $\mu = 0$. Determine la velocidad en $t = 8\,\text{s}$.





El primer paso consiste en hacer un diagrama de impulso y momentum:



Con ello, se puede formular el principio de impulso y momentum para la dirección horizontal (eje x), donde la fuerza neta es $\mathbf{f}_x = F(t)$:

$$m\,v_{1x} + \int_{t=0}^{t=8\,\text{s}} F(t)\;\text{d}t = m\,v_{2x}$$

La integral del impulso se puede calcular de forma gráfica con facilidad:

$$\int_{t=0}^{t=8\,\text{s}} F(t)\;\text{d}t = A_{\triangle} + A_{\square} = \frac{1}{2}\,(4\,\text{s})\,(40\,\text{N}) + (4\,\text{s})\,(40\,\text{N}) = 240\,\text{N}\cdot\text{s}$$

Finalmente, se puede despejar la velocidad $v_{2x} = v\,(8)$ de la ecuación:

$$0 + 240\,\text{N}\cdot\text{s} = m\,v_{2x}$$

$$v_{2x} = \frac{240\,\text{N}\cdot\text{s}}{10\,\text{kg}} = 24\,\text{m/s}$$

Ejemplo

Repita el problema anterior pero considerando un roce con coeficientes $\mu_s = \mu_k = 0{,}2$ y asumiendo que $g = 10\,\text{m/s}^2$.

La fuerza de roce máxima es:

$$(f_r)_{\text{max}} = \mu\,N = \left(\frac{1}{5}\right)(10)\,(10) = 20\,\text{N}$$

Es importante comprender que la fuerza de roce aumentará en respuesta a $F(t)$ hasta su valor máximo de 20 N. El punto límite ocurre para un tiempo $t^\star$ tal que:

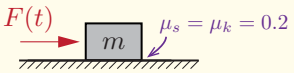
$$\begin{aligned}\mathbf{f}_x = F(t^\star) - (f_r)_{\text{max}} &= 0\\ 10\,t - 20\,\text{N} &= 0\\ t^\star &= 2\,\text{s}\end{aligned}$$

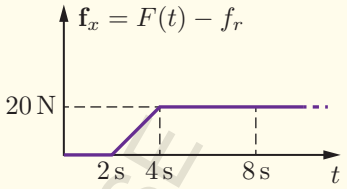
Es decir, la fuerza neta $\mathbf{f}_x$ deja de ser nula en el instante $t^\star = 2\,\text{s}$, tras lo cual crece linealmente hasta llegar a:

$$(\mathbf{f}_x)_{\text{max}} = F(t = 4\,\text{s}) - (f_r)_{\text{max}} = 20\,\text{N}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Finalmente, la fuerza neta horizontal para el problema con roce queda descrito como muestra la siguiente Figura:





El impulso generado por la fuerza neta hasta $t = 8\,\mathrm{s}$ es:

$$\int_{t=0}^{t=8\,\mathrm{s}} \mathbf{f}_x \,\mathrm{d}t = A_{\triangle} + A_{\square} = \frac{1}{2}\,(2\,\mathrm{s})\,(20\,\mathrm{N}) + (4\,\mathrm{s})\,(20\,\mathrm{N}) = 100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$$

Finalmente, se puede despejar la velocidad $v_{2x} = v\,(8)$ de la ecuación:

$$0 + 100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s} = m\,v_{2x}$$

$$v_{2x} = \frac{100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}}{10\,\mathrm{kg}} = 10\,\mathrm{m/s}$$

Ejemplo

Basado en Bedford & Fowler 5th ed, Example 16.2



Un motociclista recorre una pista circular de radio $R = 570\,\mathrm{m}$. El motociclista comienza desde el reposo y acelera de modo que su fuerza neta tangencial es:

$$\sum \mathbf{f}_t = \sum \mathbf{f}_\theta = 300 - 9\,t \qquad \text{para} \quad t = 0\ldots 30\,\mathrm{s}$$

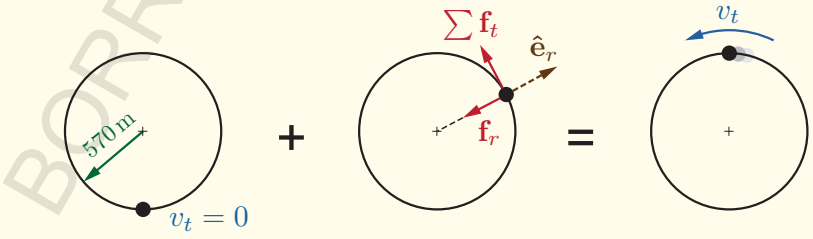
La masa total del motociclista y su moto es $m = 225\,\mathrm{kg}$. Se pide determinar:

a) La magnitud de la velocidad en $t = 30\,\mathrm{s}$.

b) La fuerza neta tangencial promedio entre $t = 0\ldots 30\,\mathrm{s}$.

c) La fuerza radial promedio entre $t = 0\ldots 30\,\mathrm{s}$.

El primer paso consiste en hacer un diagrama un diagrama de impulso y momentum:



La fuerza centrípeta apunta hacia el centro (dirección $-\hat{\mathbf{e}}_r$) y su módulo es igual a:

$$\mathbf{f}_r = m\,a_c = m\frac{(v_t)^2}{R}$$

Usando el principio de impulso–momentum en la dirección θ (que coincide con la tangencial en un

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

movimiento circular), y recordando que comienza su carrera del reposo:

$$\begin{aligned} m\,v_{1t} + \int_{t=0}^{t=30} (300 - 9\,t)\ \mathrm{d}t &= m\,v_{2t} \\ 300\,t - \frac{9}{2}\,t^2\Big|_{t=0}^{t=30} &= m\,v_{2t} \\ 4950\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s} &= (225)\,(v_{2t}) \\ v_{2t} &= 22\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

La fuerza neta tangencial promedio $\overline{\mathbf{f}}_t$ debe producir el mismo impulso:

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=30} \overline{\mathbf{f}}_t\ \mathrm{d}t &= 4950\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s} \\ \overline{\mathbf{f}}_t\,(30-0) &= 4950 \\ \overline{\mathbf{f}}_t &= 165\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Utilizando el principio de impulso–momentum entre instantes $\tau = 0 \ldots t$, donde τ es una variable muda para el tiempo, se obtiene una expresión para la velocidad en función del tiempo t:

$$\begin{aligned} m\,v_{1t} + \int_{tau=0}^{\tau=t} (300 - 9\,\tau)\ \mathrm{d}\tau &= m\,v\,(t) \\ v\,(t) &= \frac{4}{3}\,t - \frac{1}{50}\,t^2 \end{aligned}$$

, con lo que (el módulo de) la fuerza centrípeta es:

$$\mathbf{f}_r = m\frac{(v_t)^2}{R} = \frac{225}{570}\left(\frac{4}{3}\,t - \frac{1}{50}\,t^2\right)^2 = \frac{15}{38}\left(\frac{4}{3}\,t - \frac{1}{50}\,t^2\right)^2$$

El impulso que genera esa fuerza entre $t = 0 \ldots 30$ es:

$$\int_{t=0}^{t=30} \mathbf{f}_r\ \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=30} \frac{15}{38}\left(\frac{4}{3}\,t - \frac{1}{50}\,t^2\right)^2\ \mathrm{d}t = 2820\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$$

Es decir, la fuerza radial promedio es:

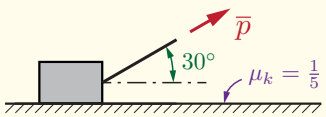
$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=30} \overline{\mathbf{f}}_r\ \mathrm{d}t &= 2820\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s} \\ \overline{\mathbf{f}}_r\,(30-0) &= 2820 \\ \overline{\mathbf{f}}_r &= 94\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

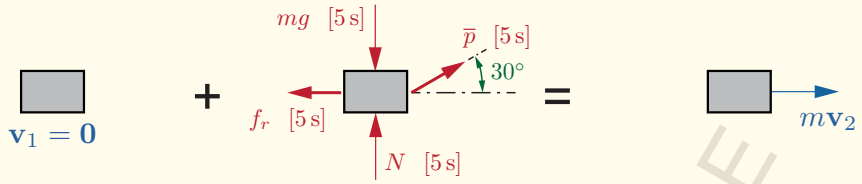
Ejemplo

Basado en Hibbeler 14th ed, Problem 15–10

La caja de masa $m = 50\,\mathrm{kg}$ está siendo tirada por una fuerza constante $\overline{\mathbf{p}}$. El coeficiente de roce dinámico entre la caja y el suelo es $\mu_k = 0{,}2$. La caja comienza desde el reposo y se sabe que alcanza una velocidad de $10\,\mathrm{m/s}$ transcurridos $5\,\mathrm{s}$. Determine la magnitud de $\overline{\mathbf{p}}$.



El primer paso consiste en hacer un diagrama un diagrama de impulso y momentum:



La fuerza normal se puede determinar fácilmente con el equilibrio de fuerzas verticales, pero se obtendrá con la ecuación de impulso–momentum para demostrar su equivalencia:

$$\begin{aligned} m\,v_{1y} + \int_{t=0}^{t=5} (-mg)\ \mathrm{d}t + \int_{t=0}^{t=5} \overline{p}\,\sin(30°)\ \mathrm{d}t + \int_{t=0}^{t=5} N\,\mathrm{d}t &= m\,v_{2y} \\ -mg\,[5-0] + \overline{p}\,\sin(30°)\,[5-0] + N\,[5-0] &= 0 \\ N &= mg - \frac{1}{2}\,\overline{p} \end{aligned}$$

Con ello, la fuerza de roce es:

$$f_r = \mu\,N = \frac{mg}{5} - \frac{1}{10}\,\overline{p}$$

Ahora que se ha determinado la fuerza de roce, se utiliza el principio de impulso–momentum pero en la dirección horizontal:

$$\begin{aligned} m\,v_{1x} + \int_{t=0}^{t=5} (-f_r)\ \mathrm{d}t + \int_{t=0}^{t=5} \overline{p}\,\cos(30°)\ \mathrm{d}t &= m\,v_{2x} \\ \left(\frac{mg}{5} - \frac{\overline{p}}{10}\right)[5-0] + \overline{p}\,\cos(30°)\,[5-0] &= 10\,m \\ mg - \frac{1}{2}\,\overline{p} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\,\overline{p} &= 10\,m \\ \overline{p} &= \frac{2\,m\,(10+g)}{5\sqrt{3}+1} = 205{,}1\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

6.2. Conservación de momentum lineal

Cuando la suma de impulsos externos actuando sobre un sistema es cero; el momentum inicial y final del sistema no varía. Es decir:

$$\sum m_i\,\mathbf{v}_{i1} = \sum m_i\,\mathbf{v}_{i2} \qquad \text{cuando} \qquad \sum \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \tag{6.5}$$

Esta ecuación representa la *conservación de momentum lineal*. Cuando las partículas colisionan, estas ejercen fuerzas impulsivas entre ellas. Pero estos *impulsos internos* se cancelan ya que ocurren en pares iguales, colineales, pero con sentido opuesto (3ra ley de Newton: acción y reacción).

> Es importante reiterar que para que el momentum lineal se conserve en un sistema sólo es necesario que la suma de fuerzas externas sea cero. El sistema puede tener fuerzas internas producto de la interacción de las partículas o componentes del mismo; e.g. colisiones, fragmentación, separación, entre otros.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

6.3. Colisiones

Utilizando el principio de impulso y momentum antes y después de una colisión (un intervalo breve de tiempo), se pueden distinguir dos tipos de fuerzas:

- **fuerzas impulsivas**: las fuerzas producto del choque son considerables, por lo que pese a actuar en un intervalo breve de tiempo producirán un impulso significativo. Esto causará cambios en el momentum de las partículas del sistema.
- **fuerzas no-impulsivas**: fuerzas que normalmente no son despreciables (e.g. el roce), pero que debido a que actúan por un intervalo muy breve; no producirán un impulso significativo. Es decir, generalmente pueden ser despreciadas en el análisis de la colisión.

Una colisión es un impacto entre dos cuerpos o partículas donde se generan fuerzas de contacto relativamente grandes en un periodo de tiempo breve. Las colisiones son eventos complejos que involucran deformación, calor, sonido, fracturas, y más. Pequeños cambios en las condiciones de la colisión suelen tener gran efecto en los resultados. Es decir, el resultado de un análisis de colisión no debe ser considerado una "verdad absoluta".

Existen dos tipos de colisiones:

- **Impacto central**: Ocurre cuando las velocidades de las partículas son colineales. Las fuerzas de interacción producto de la colisión serán también colineales con la velocidad y el problema puede ser analizado en una sola dimensión, como muestra la Figura 6.2(a).
- **Impacto oblicuo**: La colisión es un problema bidimensional donde las fuerzas de interacción se generan en la dirección normal al plano de contacto; mientras que no hay interacción en las demás direcciones[4], como muestra la Figura 6.2(b).

El análisis de las colisiones será inicialmente derivado para un impacto central, y luego extendido a un impacto oblicuo.

6.3.1. Impacto central

El impacto central se analiza como un problema 1D. Las partículas de la Figura 6.3 tienen inicialmente $v_1 > v_2$ debido a lo cual colisionarán. Cuando ambas partículas entran en contacto comienzan a deformarse y ejercer fuerzas (impulsos) entre ellas: fase de *deformación*. En cierto instante ambas partículas se moverán con la misma velocidad $\overline{v}$. Luego de moverse juntas comienzan a retornar a sus estados originales sin deformar total o parcialmente, durante lo cual continúan ejerciendo fuerzas entre ellas: fase de *recuperación* Finalmente, las partículas tendrán velocidades $v_1' \leq v_2'$.

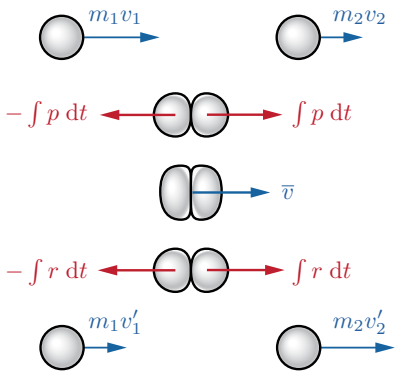
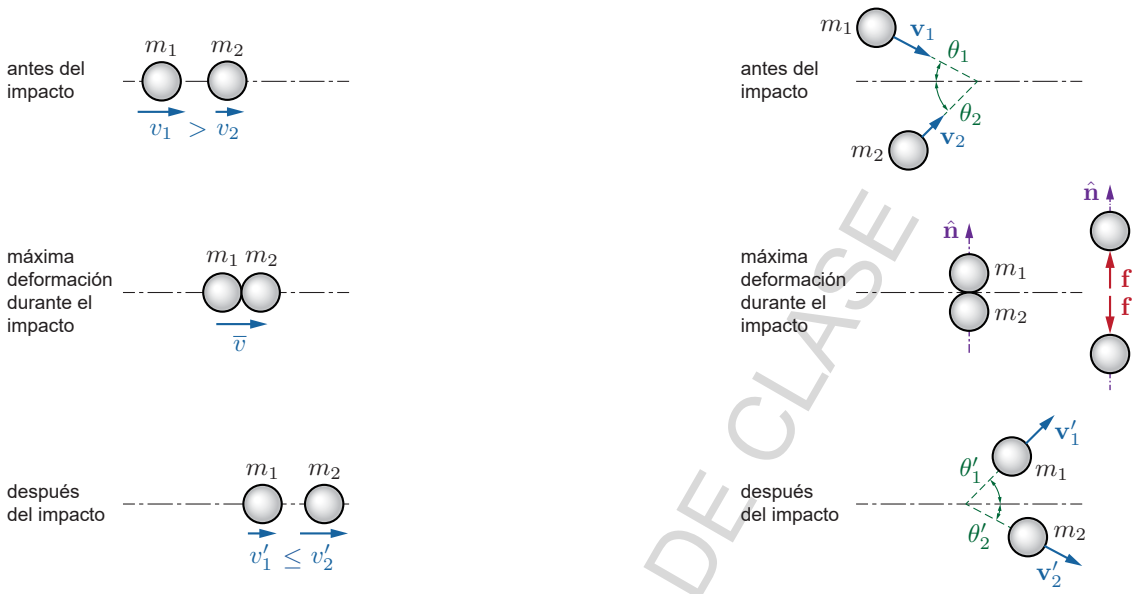


Figura 6.3: Evolución de un impacto central donde se muestran las fuerzas (impulsos) de *deformación* y *recuperación*.

Cuando colisionan dos cuerpos de dimensiones no-despreciables (i.e. no una colisión de partículas), puede ocurrir que se tenga en realidad un *impacto oblicuo* pese a que las velocidades sean colineales. Dependiendo de la forma de los cuerpos, la superficie de contacto podría no ser perpendicular a las velocidades.

[4] La fuerza de roce suele ser no-impulsiva en una colisión

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard



(a) impacto central (b) impacto oblicuo

Figura 6.2: Tipos de colisiones: **(a)** *impacto central*, donde las velocidades y fuerzas de interacción son todas colineales; y **(b)** *impacto oblicuo*, donde las fuerzas de interacción ocurren en la dirección normal al plano de contacto.

> En ciertos casos podría darse que luego de una colisión se tenga que $v_1' > v_2'$. Esto ocurre cuando una partícula *atraviesa* otra; e.g., una bala atravesando un saco de arroz. Este caso especial es frecuentemente olvidado o ignorado por los textos.
>
> El caso en que $v_1' = v_2'$ ocurre cuando las partículas quedan unidas. Esto podría ocurrir si por ejemplo ambas partículas son de plastilina.

Notar que en el diagrama de la Figura 6.3, en ambas fases (deformación y recuperación) los impulsos son iguales pero opuestos. Además, por lo general los impulsos de recuperación $\int r\,\mathrm{d}t$ son menores a los de deformación $\int p\,\mathrm{d}t$: la colisión no es *perfectamente elástica* y hay una pérdida de energía. Al considerar ambas partículas como nuestro sistema de análisis los impulsos generados se cancelan. Esto significa que se debe conservar el momentum del sistema, y con ello:

$$\boxed{m_1\,v_1 + m_2\,v_2 = m_1\,v_1' + m_2\,v_2'} \tag{6.6}$$

6.3.2. Coeficiente de restitución

Considerando la Ecuación (6.6), si conocemos v_1 y v_2 necesitamos una segunda ecuación para obtener v_1' y v_2'. Usando el principio de impulso y momentum para cada partícula por separado, tanto en deformación como en restitución, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} m_1\,v_1 - \int p\,\mathrm{d}t &= m_1\,\overline{v} \\ m_1\,\overline{v} - \int r\,\mathrm{d}t &= m_1\,v_1' \end{aligned}\right\} \quad \longrightarrow \quad e = \frac{\int r\,\mathrm{d}t}{\int p\,\mathrm{d}t} = \frac{\overline{v} - v_1'}{v_1 - \overline{v}}$$

$$\left.\begin{aligned} m_2\,v_2 - \int p\,\mathrm{d}t &= m_2\,\overline{v} \\ m_2\,\overline{v} - \int r\,\mathrm{d}t &= m_2\,v_2' \end{aligned}\right\} \quad \longrightarrow \quad e = \frac{\int r\,\mathrm{d}t}{\int p\,\mathrm{d}t} = \frac{v_2' - \overline{v}}{\overline{v} - v_2}$$

, donde e es el *coeficiente de restitución* y corresponde a la razón entre el impulso de restitución y el de deformación.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Cuando se aplica el principio de impulso y momentum a cada partícula por separado, las fuerzas de la colisión dejan de ser fuerzas internas. Los impulsos de la colisión no tienen un par opuesto, por lo que el momentum analizado para cada partícula por separado, no se conserva.

Eliminando $\overline{v}$ de ambas expresiones para e se obtiene:

$$\begin{aligned} 1^{\text{ra}} \text{ ecuación:} \quad & e\,(v_1 - \overline{v}) = \overline{v} - v_1' \quad \rightarrow \quad e\,v_1 + v_1' = e\,\overline{v} + \overline{v} \\ 2^{\text{da}} \text{ ecuación:} \quad & e\,(\overline{v} - v_2) = v_2' - \overline{v} \quad \rightarrow \quad e\,v_2 + v_2' = e\,\overline{v} + \overline{v} \\ \text{Combinando ambas:} \quad & e\,v_1 + v_1' = e\,v_2 + v_2' \end{aligned}$$

Finalmente, el coeficiente de restitución es:

$$\boxed{e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}} \quad = \frac{\text{vel. relativa separación}}{\text{vel. relativa acercamiento}} \tag{6.7}$$

Es decir, si conocemos el coeficiente de restitución de una colusión; entonces utilizando las Ecuaciones (6.6) y (6.6) podemos determinar v_1' y v_2'. El valor de e define el tipo de colisión:

- **Caso** $e = 1$: Ambas partículas restituyen los mismo que se deforman y el impacto es *perfectamente elástico*.
- **Caso** $e = 0$: Las partículas no restituyen nada, se quedan pegadas, y el impacto es *perfectamente plástico*. Luego de la colisión ambas partículas se mueven con velocidad $\overline{v}$.
- **Caso** $0 < e < 1$: Caso frecuente en la práctica. El valor de e depende de los materiales de las partículas, sus superficies, geometrías, y de la velocidad relativa del impacto.
- **Caso** $e < 0$: Este caso sólo ocurre cuando una partícula atraviesa la otra. Es un caso poco común.

La Figura 6.4 muestra el comportamiento de e con la velocidad relativa de impacto y los materiales de las partículas. Notar que si la velocidad relativa de impacto es baja, las colisiones tienden a comportarse de forma elástica.

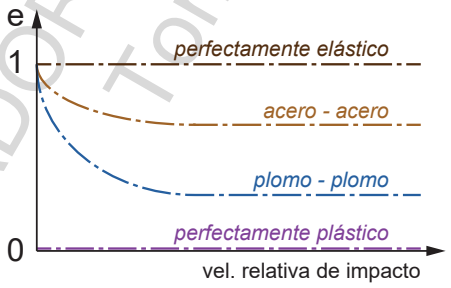


Figura 6.4: Variación del coeficiente de restitución e con la velocidad relativa del impacto y los materiales de las partículas.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Un error frecuente en el análisis de colisiones consiste en utilizar: **(1)** ecuación de conservación de momentum; y **(2)** conservación de energía. Esto es un grave error ya que la energía sólo se conserva cuando el choque es perfectamente elástico, i.e. cuando $e = 1$.

No es recomendable utilizar la ecuación de conservación de energía (incluso) cuando $e = 1$. La ecuación del coeficiente de restitución es lineal respecto a la velocidad. La ecuación de energía cinética en cambio, tiene la velocidad al cuadrado. Es decir, incluso en el caso en que $e = 1$, no es recomendable

utilizar la ecuación de conservación de energía para analizar una colisión.

6.3.3. Impacto oblicuo

En el impacto oblicuo las velocidades iniciales y finales no son paralelas. El plano de contacto es tangente a la colisión, y con ello se descompone el vector de velocidad en componentes normal (n) y tangencial (t) al plano de contacto[5]. Utilizando el diagrama de la Figura 6.5 se tiene:

$$(\mathbf{v}_1)_n = -v_1 \sin\theta_1 \qquad (\mathbf{v}_2)_n = v_2 \sin\theta_2$$
$$(\mathbf{v}_1)_t = v_1 \cos\theta_1 \qquad (\mathbf{v}_2)_t = v_2 \cos\theta_2$$

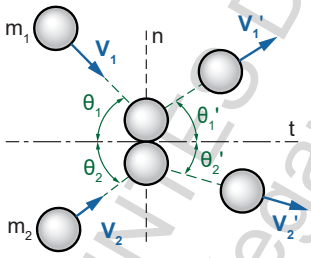


Figura 6.5: Impacto oblicuo. Descomponiendo en los ejes n y t, se tiene un impacto central en el eje n y nada de interacción en el t.

La fuerza de impacto (y por ende el impulso) entre las partículas ocurre en el eje n. Es decir, en el eje n el comportamiento es el de un impacto central y con ello:

$$m_1 (\mathbf{v}_1)_n + m_2 (\mathbf{v}_2)_n = m_1 (\mathbf{v}'_1)_n + m_2 (\mathbf{v}'_2)_n \tag{6.8a}$$
$$e = \frac{(\mathbf{v}'_2)_n - (\mathbf{v}'_1)_n}{(\mathbf{v}_1)_n - (\mathbf{v}_2)_n} \tag{6.8b}$$

Mientras que en el eje t (plano tangente) no hay impulsos, con lo que utilizando el principio de impulso y momentum con cada partícula por separado se tiene:

$$(\mathbf{v}_1)_t = (\mathbf{v}'_1)_t \tag{6.9a}$$
$$(\mathbf{v}_2)_t = (\mathbf{v}'_2)_t \tag{6.9b}$$

Una vez que se ha determinado $(\mathbf{v}'_1)_n$, $(\mathbf{v}'_1)_t$, $(\mathbf{v}'_2)_n$, y $(\mathbf{v}'_2)_t$; se puede obtener θ'_1 y θ'_2 en caso que fueran requeridos.

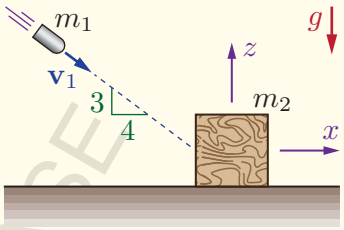
[5]En esta sección se usa t para indicar *tangencial* y no *tiempo*.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Example 2.14

Un bloque de madera de masa m_2 inicialmente en reposo está sobre una superficie sin roce. Una bala de masa m_1 y velocidad $\mathbf{v}_1$ impacta al bloque como muestra la Figura, quedando embebida en el bloque. Se pide determinar:



a) La velocidad del bloque después del impacto.

b) El impulso en x (horizontal) sobre el bloque producto de la interacción.

Como la bala queda embebida en el bloque, el choque es *perfectamente plástico* y con ello:

$$e = \frac{(\mathbf{v}_2')_x - (\mathbf{v}_1')_x}{(\mathbf{v}_1)_x - (\mathbf{v}_2)_x} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad (\mathbf{v}_1')_x = (\mathbf{v}_2')_x = \overline{v}$$

Por otro lado, sabemos que se conserva el momentum del sistema completo en la colisión:

$$\begin{aligned} m_1\,(\mathbf{v}_1)_x &= m_1\,\overline{v} + m_2\,\overline{v} \\ m_1\left(\frac{4}{5}\right)(v_1) &= (m_1 + m_2)\,\overline{v} \qquad \longrightarrow \qquad \overline{v} = \frac{4\,m_1\,v_1}{5\,(m_1 + m_2)} \end{aligned}$$

Utilizando el principio de impulso y momentum sólo sobre el bloque de madera y en la dirección x:

$$(m_2)\,(0) + \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{f})_x \;\mathrm{d}t = m_2\,\overline{v} \qquad \longrightarrow \qquad \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{f})_x \;\mathrm{d}t = \frac{4\,m_1\,m_2\,v_1}{5\,(m_1 + m_2)}$$

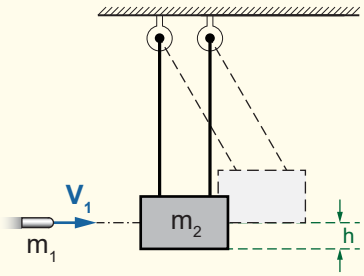
Nota: Podemos también calcular el impulso del bloque sobre la bala en la dirección z (vertical) que hace que la bala se detenga en esa dirección:

$$\begin{aligned} m_1\,(\mathbf{v}_1)_z + \int_{t_1}^{t_2} [F - m_1\,g] \;\mathrm{d}t &= (m_1)\,(0) \\ m_1\left(-\frac{3}{5}\right)(v_1) + \int_{t_1}^{t_2} F \;\mathrm{d}t - m_1\,g\,(t_2 - t_1) &= 0 \\ \int_{t_1}^{t_2} F \;\mathrm{d}t &= \frac{3}{5}\,m_1\,v_1 + m_1\,g\,\Delta t \end{aligned}$$

Debido a que el intervalo de tiempo Δt es pequeño, la fuerza de gravedad no tiene una contribución significativa al impulso en z. Es decir, la fuerza de gravedad es de tipo *no-impulsiva*.

Ejemplo

Una bala de masa m_1 se dispara contra un *péndulo balístico* de masa m_2. La bala queda embebida en el bloque luego del impacto. Se pide determinar:



a) La velocidad del péndulo justo después del impacto.

b) Si la energía cinética del sistema se conserva/reduce/aumenta.

c) La velocidad de la bala si se conoce la altura máxima h del péndulo.

La velocidad del péndulo con la bala $\overline{v}$ será la velocidad tangencial del péndulo después de la colisión.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Basados en el problema anterior, se sabe entonces que:

$$v_\theta = \overline{v} = \frac{m_1\, v_1}{m_1 + m_2}$$

Sólo la bala tiene energía cinética antes de la colisión, por lo que:

$$T_1 = \frac{1}{2}\, m_1\, (v_1)^2$$

La energía cinética después del impacto es:

$$T_2 = \frac{1}{2}\, (m_1 + m_2)\, (\overline{v})^2 = \frac{1}{2}\, (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1\, v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\, m_1\, (v_1)^2\right] \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right]$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

Es decir, $T_2 < T_1$ lo que indica que hay una pérdida de energía.

Concluido el impacto se conservará la energía. En el punto más alto del péndulo se tiene que $v = 0$, lo que significa que en ese instante no hay energía cinética (i.e. $T_3 = 0$). Si consideramos el punto más bajo del péndulo como el datum ($z = 0$), entonces la energía potencial en el punto más alto es:

$$V_3 = V_g = (m_1 + m_2)\, g\, h$$

, con lo que por conservación de energía se tiene:

$$\overbrace{V_2}^{=0} + T_2 = V_3 + T_3$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2\, v_1^2}{m_1 + m_2}\right) = (m_1 + m_2)\, g\, h \qquad \longrightarrow \qquad v_1 = \sqrt{2gh}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)$$

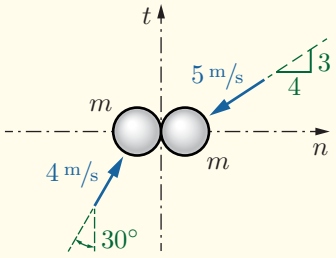
Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Example 2.16

Dos tejos de hockey idénticos chocan como muestra la Figura. Si el coeficiente de restitución es $e = 0{,}8$, se pide determinar:

a) Las velocidades (vectores) después de la colisión.

b) El impulso de la fuerza de interacción si $m = 170\,\text{gr}$.



Los vectores de velocidad iniciales (previo a la colisión) en términos de $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{t}}$ son:

$$\mathbf{v}_1 = 4\, \sin(30°)\, \hat{\mathbf{n}} + 4\, \cos(30°)\, \hat{\mathbf{t}} = 2\, \hat{\mathbf{n}} + 2\sqrt{3}\, \hat{\mathbf{t}}$$

$$\mathbf{v}_2 = 5 \left(-\frac{4}{5}\right) \hat{\mathbf{n}} + 5 \left(-\frac{3}{5}\right) \hat{\mathbf{t}} = -4\, \hat{\mathbf{n}} - 3\, \hat{\mathbf{t}}$$

Inmediatamente sabemos que las componentes en $\hat{\mathbf{t}}$ después de la colisión son:

$$(\mathbf{v}_1')_t = 2\sqrt{3}\,\text{m/s} \qquad\qquad (\mathbf{v}_2')_t = -3\,\text{m/s}$$

En la dirección normal se tiene un impacto central. Es decir, utilizando las ecuaciones de conservación

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

de momentum y de coeficiente de restitución, se tiene:

$$m\,(\mathbf{v}_1)_n + m\,(\mathbf{v}_2)_n = m\,(\mathbf{v}'_1)_n + m\,(\mathbf{v}'_2)_n \qquad e = 0{,}8 = \frac{(\mathbf{v}'_2)_n - (\mathbf{v}'_1)_n}{(\mathbf{v}_1)_n - (\mathbf{v}_2)_n}$$
$$2 = (\mathbf{v}'_1)_n + (\mathbf{v}'_2)_n \qquad (6)\,(0{,}8) = (\mathbf{v}'_2)_n - (\mathbf{v}'_1)_n$$

La solución del sistema de ecuaciones resulta en:

$$(\mathbf{v}'_1)_n = -3{,}4\,\text{m/s} \qquad (\mathbf{v}'_2)_n = 1{,}4\,\text{m/s}$$

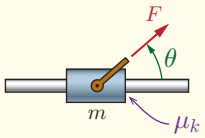
Finalmente, las velocidades de los tejos después de colisionar son:

$$\mathbf{v}'_1 = -3{,}4\,\hat{\mathbf{n}} + 2\sqrt{3}\,\hat{\mathbf{t}}$$
$$\mathbf{v}'_2 = 1{,}4\,\hat{\mathbf{n}} - 3\,\hat{\mathbf{t}}$$

Ejemplo

Basado en Meriam 9th ed, Problem 3/155

El buje (collar) de masa m desliza por un eje rugoso ($\mu_k > 0$) bajo la acción de una fuerza de mangnitud F constante, con $F < mg$ pero dirección variable. El ángulo de la fuerza es $\theta\,(t) = k\,t$, donde k es una constante. El buje comienza con velocidad v_1 cuando $\theta = 0$. Se pide determinar:



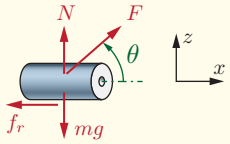
a) La velocidad v_2 cuando $\theta = 90°$.

b) El valor de F para que $v_1 = v_2$ si v_2 es la velocidad cuando $\theta = 90°$.

Lo primero es determinar el tiempo en que $\theta = 90°$:

$$\theta\,(t_f) = \frac{\pi}{2} = k\,t_f \qquad \longrightarrow \qquad t_f = \frac{\pi}{2k}$$

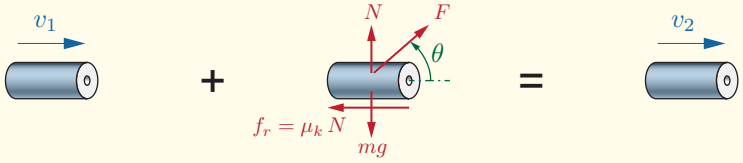
Luego, con ayuda de un DCL del buje, se utiliza la 2da ley de Newton en la dirección $\hat{\mathbf{k}}$. Se sabe que $\ddot{z} = 0$, lo que implica que $\sum \mathbf{f}_z = 0$:



$$N - mg + F\,\sin\theta = 0$$
$$N = mg - F\,\sin\,(k\,t)$$

Gracias a que $F < mg$, entonces sabemos que N es siempre positivo (según la dirección indicada en el DCL).

Luego de haber determinado las fuerzas y el tiempo durante el cual actúan, se puede utilizar el principio de impulso–momentum para determinar la velocidad final. Para ello, se comienza por hacer un diagrama de impulso–momentum:



BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

En este caso, sólo es necesario utilizar la ecuación asociada a $\hat{\mathbf{i}}$:

$$m\,v_1 + \int_0^{t_f} F\,\cos(k\,t)\;\mathrm{d}t - \int_0^{t_f} \mu_k\,[mg - F\,\sin(k\,t)]\;\mathrm{d}t = m\,v_2$$

$$m\,v_1 + \left[\frac{F}{k}\,\sin(k\,t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2k}} - \left[\mu_k\,mg\,t + \frac{\mu_k\,F}{k}\,\cos(k\,t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2k}} = m\,v_2$$

$$m\,v_1 + \frac{F}{k} + \left[\mu_k\,\frac{F}{k} - \mu_k\frac{\pi\,mg}{2k}\right] = m\,v_2$$

$$v_2 = v_1 + \frac{F}{mk}\,(1+\mu_k) - \mu_k\,\frac{\pi\,g}{2k}$$

Para el caso que $v_1 = v_2$ se puede despejar el valor de la fuerza F de la ecuación:

$$v_1 = v_1 + \frac{F}{mk}\,(1+\mu_k) - \mu_k\,\frac{\pi\,g}{2k}$$

$$\frac{F}{mk}\,(1+\mu_k) = \mu_k\,\frac{\pi\,g}{2k}$$

$$F = \frac{\mu_k\,\pi\,mg}{2\,(1+\mu_k)}$$

Nota: No es inusual que se intente resolver problemas de este tipo con el principio de trabajo–energía. En este caso es claramente no-recomendable ya que se conoce la fuerza en el tiempo y no respecto a la posición. En general (aunque siempre hay excepciones): **(a)** cuando $F\,(t)$ suele ser mejor utilizar impulso–momentum; y **(b)** cuando $F\,(u)$ suele ser mejor utilizar trabajo–energía.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

6.4. Sistemas de masa variable

Nuestro estudio de la dinámica de partículas ha asumido (hasta ahora) que la masa es constante. El caso de una partícula que gana/pierde masa se puede estudiar desde el punto de vista de impulso–momentum usando una metodología similar a la de colisiones y separaciones. Los sistemas de ganan o pierden masa en el tiempo requieren formular las ecuaciones de impulso–momentum de manera diferencial; i.e. para un Δt pequeño. Ejemplos de un sistema de masa variable son: cohetes, cosechadoras, y levantar una cadena pesada del piso.

6.4.1. Sistemas que pierden o eyectan masa

El caso general de un sistema que pierde masa es el de un cohete de masa m y velocidad v, y que expulsa (o eyecta) una cantidad de masa m_e a velocidad v_e; como muestra la Figura 6.6. El sistema puede también estar sometido a una fuerza externa neta $\sum \mathbf{f}$; e.g., la sumatoria del peso, resistencia del viento (roce viscoso), y otras fuerzas. El diagrama de impulso–momentum del cohete para un intervalo de tiempo Δt diferencial (muy pequeño) se muestra en la Figura 6.6.

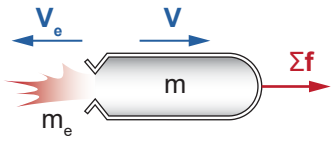


Figura 6.6: Sistema de masa variable: El recipiente, que se encuentra bajo la acción de fuerzas externas $\sum \mathbf{f}$, se propulsa debido a que está eyectando masa m_e con velocidad $\mathbf{v}_e$.

La "fuerza de empuje" que se genera producto de la eyección de masa es una fuerza de tipo *interno*, que al igual que con las colisiones actúa sobre el cohete y la pluma de eyección con igual

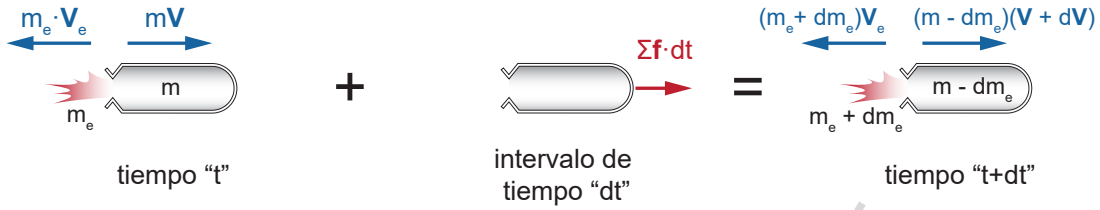


Figura 6.7: Diagrama de impulso–momentum para un sistema que eyecta masa.

magnitud y dirección, pero sentido opuesto. Si se formula el principio de impulso y momentum para el sistema completo, la fuerza de empuje (o impulso debido a la misma) se cancela. Llamaremos f a la componente de $\mathbf{f}$ en la dirección de movimiento del cohete. Formulando el principio de impulso y momentum en la dirección del movimiento del sistema según la Figura 6.7, se tiene:

$$\begin{aligned} m\,v - m_e\,v_e + \left(\sum f\right)\,\mathrm{d}t &= (m - \mathrm{d}m_e)\,(v + \mathrm{d}v) - (m_e + \mathrm{d}m_e)\,v_e \\ \left(\sum f\right)\,\mathrm{d}t &= -v\,\mathrm{d}m_e + m\,\mathrm{d}v - \underbrace{\mathrm{d}m_e \cdot \mathrm{d}v}_{2^{\mathrm{do}}\mathrm{orden}\,\to\,0} - v_e\,\mathrm{d}m_e \\ \left(\sum f\right)\,\mathrm{d}t &= m\,\mathrm{d}v - (v + v_e)\,\mathrm{d}m_e \\ \sum f &= m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - (v + v_e)\,\frac{\mathrm{d}m_e}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

El término $(v + v_e)$ es la velocidad (rapidez) con que la pluma eyectada y el cohete se alejan entre sí, la que llamaremos *velocidad relativa de separación*. En otras palabras, es la velocidad con que el cohete se aleja para un observador en a pluma de eyección:

$$v_{c/e} = v + v_e$$

Llamando a la velocidad con que se eyecta masa:

$$\dot{m} = \frac{\mathrm{d}m_e}{\mathrm{d}t}$$

, se puede entonces reescribir la ecuación para llegar a:

$$\boxed{\sum f = m\,\dot{v} - v_{c/e}\,\dot{m}} \tag{6.10}$$

, donde $m\,\dot{v}$ es igual a (masa · aceleración); mientras que el término $\left(v_{c/e} \cdot \dot{m}\right)$ es el *empuje* generado por el motor del cohete.

6.4.2. Sistemas que ganan o capturan masa

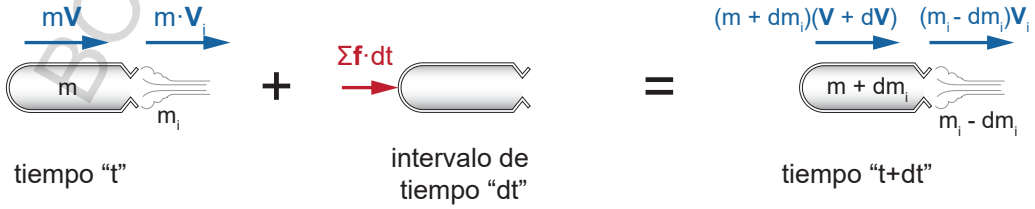


Figura 6.8: Diagrama de impulso–momentum para un sistema que captura masa.

Un sistema que gana masa es el caso de una botella (vaso, o tolva) que se mueve hacia adelante capturando masa a medida que avanza. Formulando el principio de impulso y momentum en la

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

dirección del movimiento del sistema según la Figura 6.8, se tiene:

$$\begin{aligned} m\,v + m_i\,v_i + \left(\sum f\right)\,\mathrm{d}t &= (m + \mathrm{d}m_i)\,(v + \mathrm{d}v) + (m_i - \mathrm{d}m_i)\,v_i \\ \sum f\,\mathrm{d}t &= v\,\mathrm{d}m_i + m\,\mathrm{d}v + \underbrace{\mathrm{d}m_i \cdot \mathrm{d}v}_{2^{\text{do}}\text{orden}\,\to 0} - v_i\,\mathrm{d}m_i \\ \left(\sum f\right)\,\mathrm{d}t &= m\,\mathrm{d}v + (v - v_i)\,\mathrm{d}m_i \\ \sum f &= m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + (v - v_i)\,\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior; **f** es la resultante de todas las fuerzas externas exceptuando el *empuje*, que en el caso de un sistema que gana masa ralentiza al recipiente. Llamando $v_{c/i} = (v - v_i)$ a la velocidad con que se captura masa, se puede reescribir la ecuación para llegar a:

$$\boxed{\sum f = m\,\dot{v} + v_{c/i}\,\dot{m}} \tag{6.11}$$

, donde el término $\left(v_{c/i} \cdot \dot{m}\right)$ representa la fuerza que ejerce la masa ingresando al "recipiente" que ralentizará al mismo.

6.4.3. Caso general

Definiendo $\dot{m} < 0$ como una pérdida o eyección de masa, y $\dot{m} > 0$ a una ganancia o captura de la misma; podemos combinar las Ecuaciones (6.10) y (6.11) en una sola expresión general:

$$\boxed{\sum f = m\,\dot{v} + v_{c/p}\,\dot{m}} \tag{6.12}$$

, donde $v_{c/p}$ es la velocidad relativa del cohete con la pluma de eyección/captura.

Ejemplo

Basado en Hibbeler 14$^{\text{th}}$ ed, Example 15.18



Un cohete con masa inicial total m_0, masa que considera la masa del combustible m_f, consume combustible a una velocidad $\mathrm{d}m_e/\mathrm{d}t = c$. El combustible el eyectado a una velocidad u relativa al cohete. Suponga que no hay roce con el aire, g no varía con la altura, y el cohete parte del reposo ($v_0 = 0$). Determine la velocidad máxima del cohete (cuando se acaba el combustible).

Como es un caso de eyección de masa, se tiene que: $\dot{m} = -c$. La masa del cohete en el tiempo es:

$$m\,(t) = m_0 + \dot{m}\,t = m_0 - c\,t$$

Las fuerzas externas sobre el sistema se determinan de un DCL del sistema:

$$\sum f = -W = -mg$$

Es decir, la única fuerza externa sobre el sistema es la fuerza de gravedad. Usando la ecuación (general) para los sistemas de masa variable:

$$\begin{aligned} \sum f &= m\,\dot{v} + v_{c/p}\,\dot{m} \\ -mg &= m\,\dot{v} + (u)\,(-c) \end{aligned}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Reemplazando la masa por su expresión en el tiempo:

$$-(m_0 - c\,t)\,g = (m_0 - c\,t)\,\dot{v} + (u)\,(-c)$$
$$\dot{v} = \frac{-1}{m_0 - c\,t}\left[(m_0 - c\,t)\,g - u\,c\right] = \frac{u\,c}{m_0 - c\,t} - g$$

La ecuación diferencial se puede resolver por separación de variables con $\dot{v} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}v = \left(\frac{u\,c}{m_0 - c\,t} - g\right)\mathrm{d}t$$
$$v = -u \cdot \log\left(m_0 - c\,t\right) - g\,t + C_1$$

Usando la condición inicial $v\,(t=0) = v_0 = 0$ se obtiene $C_1 = u \cdot \log\left(m_0\right)$, con lo que finalmente la velocidad es:

$$v = -u \cdot \log\left(m_0 - c\,t\right) - g\,t + u \cdot \log\left(m_0\right)$$
$$v = u \cdot \log\left(\frac{m_0}{m_0 - c\,t}\right) - g\,t$$

El combustible se termina en el instante $t^\star$ tal que:

$$m\,(t^\star) = m_0 - c\,t^\star = m_0 - m_f$$
$$c\,t^\star = m_f$$
$$t^\star = \frac{m_f}{c}$$

Con ello, la velocidad máxima del cohete es:

$$v_{\max} = v\,(t^\star) = u \cdot \log\left(\frac{m_0}{m_0 - m_f}\right) - \frac{g\,m_f}{c}$$

Nota: En la solución de este tipo de problemas frecuentemente se debe obtener $m\,(t)$ para usarse en conjunto con la ecuación del sistema de masa variable.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

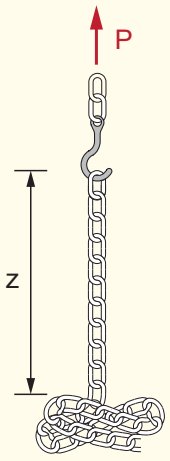
Ejemplo

Basado en Meriam 9th ed, Sample Problem 4/10

Una cadena de largo L y masa ρ por unidad de longitud, es levantada del reposo a velocidad constante $\overline{v}$ por una fuerza variable P. Se pide determinar:

a) La fuerza p en función de la altura z levantada.

b) La energía perdida al levantar la cadena completa.



Con ayuda de un DCL se determina que las fuerzas externas que actúan sobre el sistema son:

$$\sum \mathbf{f}_z: \qquad P - W = P - (\rho\,z)\,g$$

La masa del sistema en el tiempo es:

$$m\,(t) = \rho\,\overline{v}\,t$$

, con lo que la velocidad con la que el sistema gana masa es:

$$\dot{m} = \frac{\mathrm{d}m\,(t)}{\mathrm{d}t} = \rho\,\overline{v}$$

Como $\overline{v} = \text{const}$, entonces $\dot{v} = a = 0$. La velocidad relativa entre la cadena levantada y a pila en el suelo es:

$$v_{c/p} = \overline{v} - 0 = \overline{v}$$

Se tienen todos los ingredientes para usar la ecuación que gobierna los sistemas de masa variable:

$$\begin{aligned}\sum f = P - (\rho\,z)\,g &= m\,\dot{v} + v_{c/p}\,\dot{m} = 0 + \overline{v}\,(\rho\,\overline{v}) \\ P - \rho\,z\,g &= \rho\,\overline{v}^2 \\ P &= \rho\left(g\,z + \overline{v}^2\right)\end{aligned}$$

Una vez que se levante la cadena completa su *centro de masa* se encontrará a una altura $z^\star = L/2$ sobre el suelo. La masa total de la cadena es $m_f = \rho\,L$. La pérdida de energía se obtiene calculando la diferencia de energía en la ecuación de conservación de energía (análogo al trabajo hecho por fuerzas no-conservativas):

$$\begin{aligned}(V_g)_1 + T_1 + \int_0^L P\;\mathrm{d}z + \Delta E &= (V_g)_2 + T_2 \\ 0 + 0 + \int_0^L \rho\left(g\,z + \overline{v}^2\right)\;\mathrm{d}z + \Delta E &= \underbrace{(\rho\,L)}_{m}\,g\,\underbrace{\left(\frac{L}{2}\right)}_{z^\star} + \frac{1}{2}\,\underbrace{(\rho\,L)}_{m}\,\overline{v}^2 \\ \frac{1}{2}\,\rho\,g\,L^2 + \rho\,L\,\overline{v}^2 + \Delta E &= \frac{1}{2}\,\rho\,g\,L^2 + \frac{1}{2}\,\rho\,L\,\overline{v}^2 \\ \Delta E &= -\frac{1}{2}\,\rho\,L\,\overline{v}^2\end{aligned}$$

La energía perdida, que corresponde al trabajo hecho por las fuerzas no-conservativas, es $\Delta E = -\frac{1}{2}\,\rho\,L\,\overline{v}^2$. Esto implica que mientras más rápido se levante la cadena, más energía se deberá suministrar al sistema.

Bonus: Determine la fuerza P para bajar la cadena con $\overline{v} = \text{const}$.

Cuando la cadena se levanta, era la fuerza P la que producía el impulso para llevar a un eslabón del reposo a la velocidad $\overline{v}$. Cuando la cadena baja, los eslabones se detienen producto de una fuerza (impulso) contra el suelo, y no una reacción interna hacia los demás eslabones suspendidos. Es decir, no es un problema de masa variable y basta con utilizar la 2^a ley de Newton:

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{f}_z: \qquad P - (\rho\cdot z)\,g &= m\cdot\dot{\overline{v}} \\ P - (\rho\cdot z)\,g &= 0 \\ P &= \rho\cdot g\cdot z\end{aligned}$$

No es trivial la diferencia entre este caso y el anterior: requiere un tiempo de reflexión. Las siguientes preguntas le pueden ayudar a esclarecer la diferencia entre los dos casos:

- La fuerza normal (no está dibujada en el DCL): ¿Es parte del sistema de masa variable cuando se levanta la cadena?
- ¿Cómo varía la fuerza normal en el caso en que se levanta la cadena?
- La fuerza normal: ¿Es parte del sistema de masa variable cuando se baja la cadena?
- ¿Qué fuerza produce el impulso cuando se levanta la cadena? ¿Qué fuerza produce el impulso cuando se baja la cadena?

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard