PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2020

Taller 03

Cinemática 2D

Problema 1.

El Viejito Pascuero entrega regalos a todos los niños y niñas que se han portado bien, incluso en localidades lejanas. Él junto con sus renos y su trineo tienen la particularidad de poder soltar un regalo sin conferirle velocidad inicial, i.e. $v_{x0} = 0$ y $v_{y0} = 0$. Una corriente de viento horizontal se modela como una aceleración constante $a_x = 1\,\mathrm{m/s^2}$, al mismo tiempo que actúa la aceleración de gravedad en sentido vertical ($g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$). Si al acercarse a una localidad el regalo se suelta a una altura $H = 3500\,\mathrm{m}$, se pide determinar:

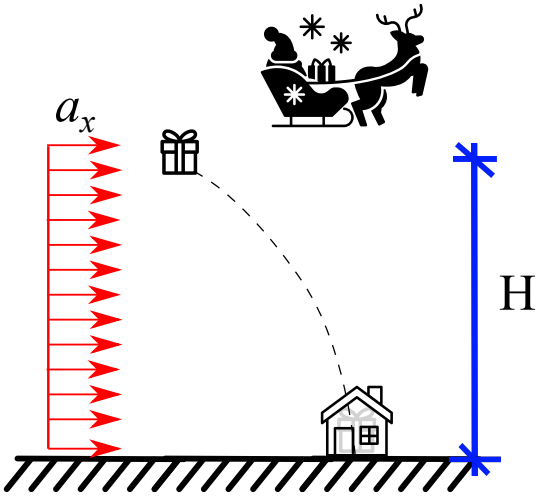


Figura 1: Avión

a. El tiempo que se demora el regalo en llegar al suelo

b. El instante en que el Viejito debe soltar el paquete para que llegue justo a la localidad, considerando que el trineo va a una velocidad constante $v_0 = 300\ km/h$ y en $t = 6\ s$ esta sobre la localidad.

Respuesta:

Lo primero es conocer las ecuaciones de movimiento que definen el problema en el eje vertical. Para esto tomamos como origen del sistema de referencia la localidad y asumimos que en $t = 0$ el regalo es desplegado.

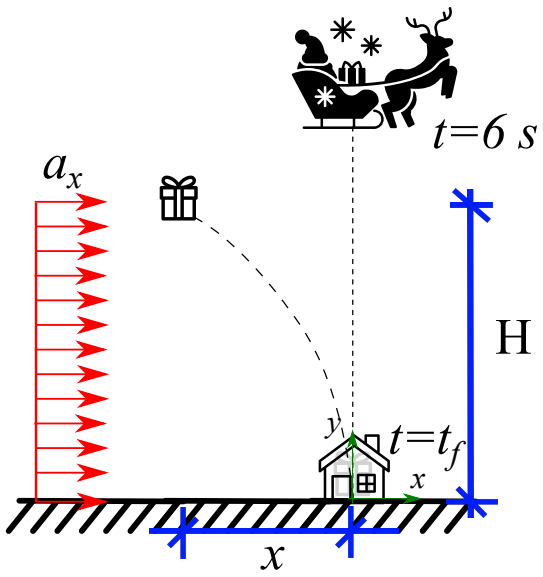


Figura 2: Sistema de referencia

Las ecuaciones de movimiento se obtendrán integrando las aceleraciones para cada caso, por tanto:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g / \int_{t=0}^{t=t} dt$$

$$\frac{dy}{dt} - v_y(t=0) = -gt$$

Debido a que el regalo es soltado sin ninguna velocidad inicial $v_y(t=0) = 0$. Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dt} = -gt / \int_{t=0}^{t=t} dt$$

$$y(t) - y(t=0) = -\frac{1}{2}gt^2$$

Y debido al sistema de coordenadas utilizado $y(t=0) = H$. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento en el eje vertical son:

$$\begin{cases} v_y(t) = -gt \\ y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Si se define como $t = t_f$ el instante en que el regalo llega al suelo, se debe cumplir que $y(t=t_f) = 0$. Por lo tanto

$$y(t=t_f) = H - \frac{1}{2}gt_f^2 = 0 \longrightarrow t_f = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 26{,}7\ s$$

Para la segunda parte cambia el supuesto de que el regalo es soltado en $t = 0$. Si el avión se encuentra en $x = 0$ en $t = 6\ s$ y viaja a una velocidad constante de 300 $km/h = 83{,}33\ m/s$, entonces la posición del trineo en $t = 0$ es:

$$x(t=0) = 0 - 83{,}33 * 6 = -500\ m$$

La distancia recorrida por el regalo en el eje horizontal una vez que es soltado vendrá dada por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x / \int_{t=0}^{t=t} dt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - v_x(t=0) = a_x t$$

Como el regalo es desplegado con velocidad inicial nula, entonces:

$$\frac{dx}{dt} = a_x t / \int_{t=0}^{t=t} dt$$

$$x(t) - x(t=0) = \frac{1}{2} a_x t^2 \longrightarrow dist(t) = \frac{1}{2} a_x t^2$$

El regalo viajará un tiempo total de t_f luego de ser soltado, lo que da una distancia recorrida de:

$$x = \frac{H a_x}{g} = 356{,}78 \ m$$

Por lo tanto, el Viejito Pascuero y sus renos debe recorrer una distancia de

$$d = 500 - 356{,}78 = 143{,}22 \ m$$

antes de soltar el paquete.

Para recorrer esa distancia, se requiere un tiempo de:

$$t^* = \frac{143{,}22}{83{,}33} = 1{,}7 \ s$$

Por lo tanto, considerando que en $t = 6 \ s$ el trineo pasa por sobre la localidad, el regalo debe ser soltado en $t = 1{,}7 \ s$.

Problema 2.

Una partícula recorre la trayectoria $r(\theta) = R_0\theta$ con aceleración angular $\ddot{\theta} = \alpha$. Si en $t = 0$ la partícula esta en reposo y $r = R_0$, determine:

a. Las ecuaciones de movimiento es decir $r(t)$, $\theta(t)$, $\dot{r}(t)$, $\dot{\theta}(t)$, $\ddot{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$. Para la aceleración y velocidad deje expresado en $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$

b. Los vectores de velocidad y aceleración cuando $\theta = \theta_0$

c. Si $R_0 = 20\ cm$ y $\alpha = 0{,}04\ rad/s^2$, encuentre la rapidez cuando $\theta = 3\ rad$

d. Encuentre $\vec{a}(\theta = 3\ rad)$ en coordenadas cartesianas. **TIP:** Hay una forma para cambiar de las coordenadas polares a cartesianas.

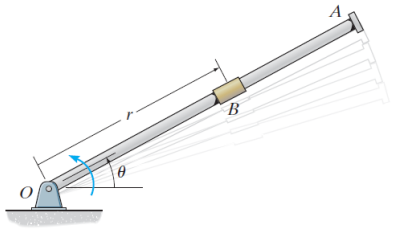


Figura 3: Pasador

Respuesta:

Para encontrar las ecuaciones primero tomamos que $\ddot{\theta} = \alpha$. Luego:

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \alpha / \int_0^t dt$$

$$\dot{\theta}(t) = \alpha t + \dot{\theta}(t = 0)$$

Como la partícula parte en reposo en $t = 0$, entonces:

$$\dot{\theta}(t) = \alpha t$$

Luego:

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha t / \int_0^t$$

$$\theta(t) - \theta(t = 0) = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Como en $t = 0$ se sabe que $r(\theta) = R_0$, luego en ese instante se debe tener que $\theta(t = 0) = 1$. Entonces:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + 1$$

Luego:

$$r(t) = R_0 \left[\frac{1}{2}\alpha t^2 + 1\right]$$

$$\dot{r}(t) = R_0 \alpha t$$

$$\ddot{r}(t) = R_0 \alpha$$

Resumiendo, las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{cases} r(t) = R_0\left[\frac{1}{2}\alpha t^2 + 1\right] & \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + 1 \\ \dot{r}(t) = R_0\alpha t & \dot{\theta}(t) = \alpha t \\ \ddot{r}(t) = R_0\alpha & \ddot{\theta}(t) = \alpha \end{cases}$$

Para la velocidad y aceleración recordamos que:

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{e}}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Luego, reemplazando:

$$\vec{v}(t) = (R_0\alpha t)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(R_0\alpha t\left[\frac{1}{2}\alpha t^2 + 1\right]\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = \left(R_0\alpha - R_0\alpha^2 t^2\left[\frac{1}{2}\alpha t^2 + 1\right]\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(2R_0\alpha^2 t^2 + R_0\alpha\left[\frac{1}{2}\alpha t^2 + 1\right]\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Si tengo que $\theta = \theta_0$, entonces

$$r = R_0\theta_0$$

$$t = \sqrt{\frac{2}{\alpha}(\theta_0 - 1)}$$

Luego

$$\dot{r} = R_0\alpha\sqrt{\frac{2}{\alpha}(\theta_0 - 1)}$$

$$\dot{\theta} = \alpha\sqrt{\frac{2}{\alpha}(\theta_0 - 1)}$$

Entonces, los vectores quedan dados por:

$$\vec{v} = \left[R_0\alpha\sqrt{\frac{2}{\alpha}(\theta_0 - 1)}\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[R_0\theta_0\alpha\sqrt{\frac{2}{\alpha}(\theta_0 - 1)}\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\vec{a} = \left[R_0\alpha - R_0\theta_0\alpha^2\left(\frac{2}{\alpha}(\theta_0 - 1)\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[2R_0\alpha^2\left(\frac{2}{\alpha}(\theta_0 - 1)\right) + R_0\theta_0\alpha\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Para encontrar la rapidez en el instante solicitado debemos encontrar primero el tiempo t^* en el que ocurre que $\theta(t^*) = 3\ rad$. Esto es:

$$\theta(t^*) = 3 = \frac{1}{2}\alpha t^2 + 1 \longrightarrow t^* = \sqrt{(3-1)\frac{2}{\alpha}} = \sqrt{(3-1)\frac{2}{0{,}04}} = 10\ s$$

Luego, basta evaluar las expresiones de la velocidad:

$$v_r(t = 10) = 0{,}2 \times 0{,}04 \times 10 = 0{,}08\ m/s$$

$$v_\theta(t = 10) = 0{,}2 \times 0{,}04 \times 10\left[\frac{1}{2}0{,}04 \times 10^2 + 1\right] = 0{,}24\ m/s$$

Por tanto, la rapidez en este instante será:

$$v = \sqrt{0{,}08^2 + 0{,}24^2} = 0{,}25\ m/s$$

Para encontrar la aceleración en coordenadas cartesianas en el instante dado primero buscaremos la aceleración en coordenadas polares. Basta con evaluar las expresiones y se obtiene:

$$a_r(t=10) = 0{,}2 \times 0{,}04 - 0{,}2 \times 0{,}04^2 \times 10^2 \left[\frac{1}{2} 0{,}04 \times 10^2 + 1\right] = 0{,}008 - 0{,}096 = -0{,}088 \ m/s^2$$

$$a_\theta(t=10) = 2 \times 0{,}2 \times 0{,}04^2 \times 10^2 + 0{,}2 \times 0{,}04 \left[\frac{1}{2} 0{,}04 \times 10^2 + 1\right] = 0{,}064 + 0{,}024 = 0{,}088 \ m/s^2$$

Finalmente, por geometría se tendrá:

$$a_x = a_r \cos(\theta) - a_\theta \sin(\theta)$$

$$a_y = a_r \sin(\theta) + a_\theta \cos(\theta)$$

Entonces, la aceleración en coordenadas cartesianas será:

$$\vec{a}(t=10) = 0{,}075\hat{\mathbf{x}} - 0{,}1\hat{\mathbf{y}}$$