PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2019

Taller 07

Oscilador armónico & Péndulos

Problema 1. 🌶🌶🌶

Se tiene un resorte con $k = 144\,N/m$ que cuelga el techo en reposo. En un instante $t = 0$ se cuelga una masa $m = 4\,kg$ del resorte, como muestra la Figura 1.
Se pide:

a) Determinar la deflexión estática del sistema cuando se cuelga la masa (posición de equilibrio del sistema resorte–masa), llamado δ_{st}.

b) Cuando se cuelga la masa, el sistema queda en la condición $z_0 = -\delta_{\text{st}}$: ¿Cuál es el valor de $\dot{z}_0$?

c) Determinar el tiempo que tarda el sistema (desde que se cuelga la masa) en volver a la misma posición dada por z_0.

d) Determinar el tiempo que tarda el sistema (desde que se cuelga la masa) en pasar por el punto de equilibrio (i.e. $z = 0$).

e) Determinar la velocidad de la masa cuando pasa por dicho punto (i.e. $z = 0$).

f) Determinar la aceleración de la masa cuando pasa por dicho punto (i.e. $z = 0$).

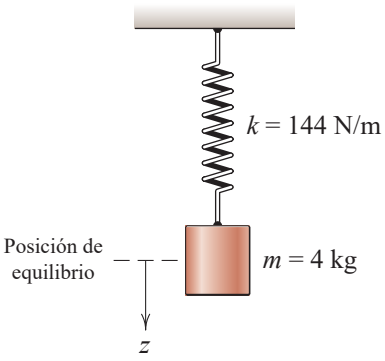


Figura 1: Sistema masa–resorte.

Problema 2. 🌶🌶

Dos péndulos (de oscilaciones pequeñas) oscilan con las condiciones iniciales (en $t = 0\,s$) que se indican en la Figura 2.
Asumiendo que $g = 10\,m/s^2$, se pide determinar:

a) El periodo de oscilación para cada péndulo T_1 y T_2 para cada péndulo.

b) Las ecuaciones $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ para cada péndulo.

c) ¿Cuánto tarda el péndulo 2 en alcanzar su amplitud máxima?

d) Si ahora el péndulo 2 comienza con velocidad $v_0 = {}^1\!/_2\,m/s$, y lo hace en la posición $\theta_0 = -{}^{\sqrt{5}}\!/_{20}\,rad$: determine la amplitud del movimiento del péndulo.

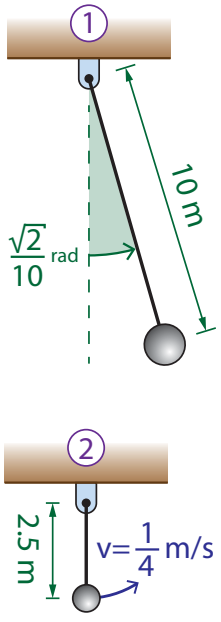


Figura 2: Péndulos de oscilaciones pequeñas.

Soluciones.

Problema 1.a

En la posición de equilibrio la masa tiene aceleración $\ddot{z} = 0$. El DCL que muestra la Figura 3 nos permite usar la 2^a ley de Newton, y con ello:

$$\sum f_z = -f_e + W = -k \cdot \delta_{\text{st}} + mg = m\ddot{z} = 0$$

$$-k \cdot \delta_{\text{st}} = mg$$

$$\delta_{\text{st}} = \frac{mg}{k} = \frac{(4)\,(9{,}81)}{144} = 0{,}2725\,m$$

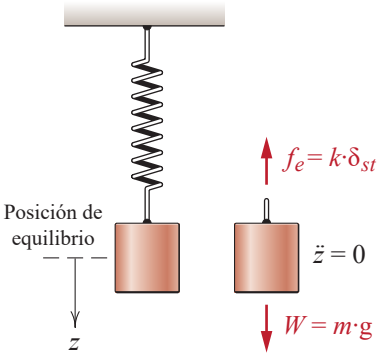


Figura 3: Sistema masa–resorte: DCL en la posición de equilibrio.

Problema 1.b

Al momento que se cuelga la masa del resorte y se suelta ($t = 0$), el sistema no tiene velocidad y comienza en $z_0 = -\delta_{\text{st}}$, como se ejemplifica la Figura 4: inicialmente está el resorte en su longitud natural, y en el instante $t = 0$ se cuelga la masa con lo que el sistema comienza a oscilar en torno al (nuevo) punto de equilibrio en $z = 0$. Es decir, la masa comienza con velocidad inicial $\dot{z}_0 = 0$.

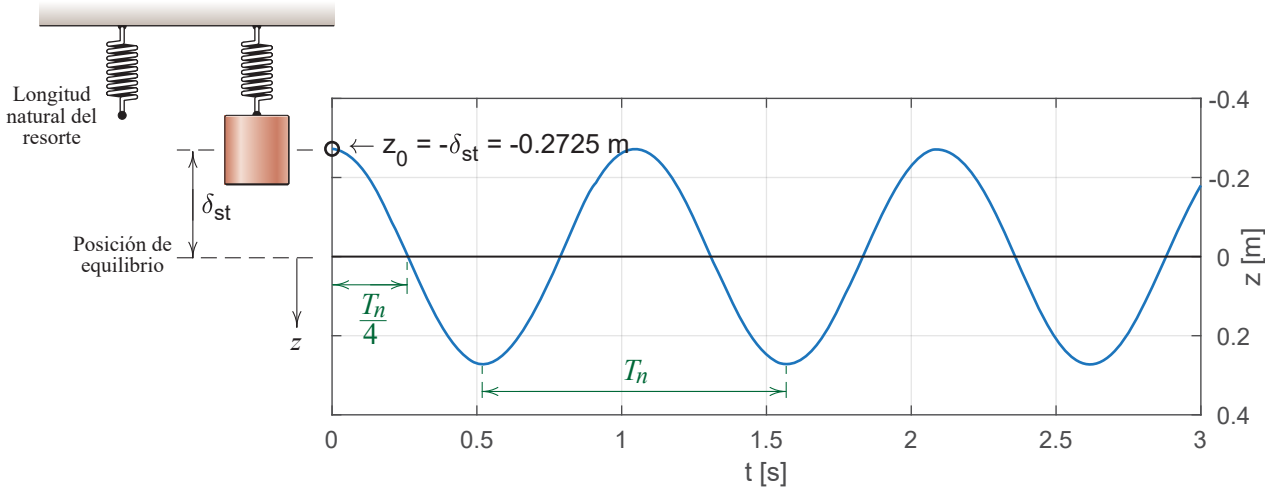


Figura 4: Sistema masa–resorte: evolución del sistema en el tiempo indicando las condiciones iniciales de posición y velocidad.

Problema 1.c

La frecuencia natural circular es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{144}{4}} = \sqrt{36} = 6\,rad/s$$

Con ello, la frecuencia natural f_n y el periodo natural T_n son:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{3}{\pi}\,hz$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{1}{f_n} = \frac{\pi}{3}\,s$$

Para volver a la posición $z_0 = -\delta_{\text{st}}$ el oscilador debe hacer una oscilación completa como muestra la gráfica que acompaña la Figura 4. Es decir, el oscilador vuelve al inicio en $t^\star = T_n = {}^{\pi}/_{3} = 1{,}047\,s$.

Problema 1.d
Desde $z_0 = z\,(t=0) = -\delta_{\text{st}}$, y comenzando con velocidad $\dot{z} = 0$; la masa pasará por $z = 0$ en ${}^{1}/_{4}$ de oscilación como muestra la gráfica que acompaña la Figura 4. Es decir, el oscilador pasará por $z = 0$ por primera vez en:

$$t^\star = \frac{T_n}{4} = \frac{\pi}{12} = 0{,}262\,s$$

Problema 1.e
La ecuación de movimiento es:

$$z\,(t) = A \cdot \cos\left(\omega_n\,t\right) + B \cdot \sin\left(\omega_n\,t\right) \qquad \text{con} \quad A = z_0 \text{ y } B = \frac{\dot{z}_0}{\omega_n}$$

En nuestro caso, esto resulta en:

$$\begin{aligned} z\,(t) &= (-\delta_{\text{st}}) \cdot \cos\left(\omega_n\,t\right) \\ \dot{z}\,(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[z\,(t)\right] = (\delta_{\text{st}} \cdot \omega_n) \cdot \sin\left(\omega_n\,t\right) \\ \ddot{z}\,(t) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[z\,(t)\right] = \left(\delta_{\text{st}} \cdot \omega_n^2\right) \cdot \cos\left(\omega_n\,t\right) \end{aligned}$$

Recordar que z es positivo hacia abajo (del enunciado).
La velocidad cuando el oscilador pasa por $z = 0$ es:

$$\dot{z}\,(t = {}^{\pi}/_{12}) = \left(\frac{mg}{k}\right)(6) \cdot \sin\left(6 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \frac{g}{6}\,m/s$$

Problema 1.f
La aceleración cuando el oscilador pasa por $z = 0$ es:

$$\ddot{z}\,(t = {}^{\pi}/_{12}) = \left(\frac{mg}{k}\right)(36) \cdot \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = 0$$

Lo que hace sentido ya que $\sum f_z = m\ddot{z}$ y en la posición de equilibrio $\sum f_z = 0$. El oscilador continúa moviéndose porque en ese instante $\dot{z} \neq 0$.

Problema 2.a
La frecuencia natural circular de un péndulo de oscilaciones pequeñas es $\omega_n = \sqrt{{}^{g}/_{l}}$. En el caso de los péndulos 1 y 2 dados:

$$(\omega_n)_1 = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1\,rad/s \qquad \text{y} \qquad (\omega_n)_2 = \sqrt{\frac{10}{2{,}5}} = 2\,rad/s$$

El periodo natural es: $T_n = {}^{2\pi}/_{\omega_n}$. Es decir:

$$(T_n)_1 = 2\pi\sqrt{\frac{10}{10}} = 2\pi\,s \qquad \text{y} \qquad (T_n)_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}5}{10}} = \pi\,s$$

Problema 2.b
El péndulo 1 tiene condiciones iniciales $\theta_0 = {}^{\sqrt{2}}/_{10}\,rad$ y $\dot{\theta}_0 = 0$. Con ello, la ecuación del movimiento para todo instante t es:

$$\begin{aligned} \theta_1\,(t) &= \theta_0 \cdot \cos\left(\omega_n\,t\right) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n} \cdot \sin\left(\omega_n\,t\right) \\ \theta_1\,(t) &= \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \cos\left(t\right) \end{aligned}$$

El péndulo 2 tiene condiciones iniciales $\theta_0 = 0$ y $\dot{\theta}_0 = v_0/r = {}^{0,25}/_{2,5} = ({}^1/_4)\,({}^2/_5) = {}^1/_{10}\,rad/s$. Con ello, la ecuación del movimiento para todo instante t es:

$$\theta_2(t) = \theta_0 \cdot \cos(\omega_n\, t) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n\, t)$$
$$\theta_2(t) = \frac{{}^1/_{10}}{2} \cdot \sin(\omega_n\, t) = \frac{1}{20} \cdot \sin(2\, t)$$

Problema 2.c
El péndulo 2 comienza en $\theta = 0$ y alcanzará su amplitud máxima en $t^\star = {}^{T_n}/_4 = 0{,}5\,s$.

Problema 2.d
El péndulo 2 comienza en $\theta_0 = -{}^{\sqrt{5}}/_{20}$ y $\dot{\theta}_0 = v_0/r = ({}^1/_2)\,({}^2/_5) = {}^1/_5\,rad/s$. Con ello, la ecuación del movimiento para todo instante t es:

$$\theta_2(t) = A \cdot \cos(\omega_n\, t) + B \cdot \sin(\omega_n\, t) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{20}\right)\cos(2\, t) + \left(\frac{{}^1/_5}{2}\right) \cdot \sin(2\, t)$$

Es decir, en este caso el oscilador tiene $A = -{}^{\sqrt{5}}/_{20}$ y $B = {}^1/_{10}$. Es decir, la amplitud máxima del movimiento es:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\frac{5}{400} + \frac{1}{100}} = \frac{3}{20}\,rad$$