PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2023

Control 03

Duración total: 70 minutos

Problema 1 [3.0 puntos] [Forma A]

Un bloque de 6 kg de masa se levanta verticalmente mediante un sistema de poleas conectados a un motor. El bloque está inicialmente en reposo. El motor ejerce una fuerza en el cable dada por $f(t) = 2\,t^2 + 12\,\text{N}$. Determine la velocidad del bloque en $t = 4$ segundos. Considere $g = 10\,\text{m/s}^2$. Notar que en los primeros instantes de tiempo el bloque está conectado con el suelo.

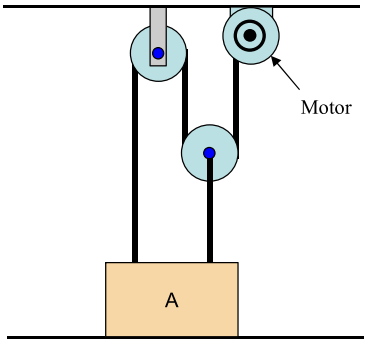


Figura 1: Motor y sistema de poleas

Solución

Primero se debe determinar el instante de tiempo en donde el bloque sube, para esto se tiene el siguiente DCL:

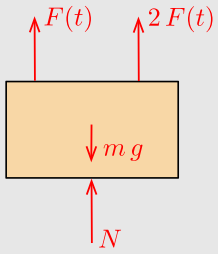


Figura 1.1: Diagrama de cuerpo libre del bloque.

El bloque empieza a subir en el instante en que la fuerza normal es nula (i.e. no existe contacto caja−suelo), utilizando 2$^{\text{da}}$ ley de Newton se obtiene cuanto debe ser el valor de la fuerza F en este instante:

$$\sum_i f_i = 0$$

$$3\,F(t^*) - m\,g + \cancelto{0}{N} = 0$$

$$F(t^*) = \frac{m\,g}{3}$$

$$= \frac{(6)(10)}{3} = 20\,\text{N}$$

El tiempo t^* en que se despega la caja es entonces:

$$\begin{aligned} F(t^*) &= 20 \\ 2(t^*)^2 + 12 &= 20 \\ t^* &= 2\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

La velocidad en $t = 4\,\mathrm{s}$ se puede obtener aplicando el principio de impulso y momentum entre $t = 2\,\mathrm{s}$ y $t = 4\,\mathrm{s}$ en el eje y:

$$\begin{aligned} L_1 + I &= L_2 \\ m\,v_i + \sum_i \int_2^4 f_i \,\mathrm{d}t &= m v_f \\ 0 + \int_2^4 (3\,F(t) - m\,g)\,\mathrm{d}t &= m\,v \\ 3\int_2^4 (2t^2 + 12)\,\mathrm{d}t - (6)(10)(4-2) &= (6)(v) \\ (2t^3 + 36t)\Big|_2^4 - 120 &= 6\,v \\ 184 - 120 &= 6\,v \\ v &= \frac{64}{6} = \frac{32}{3}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Problema 2 [3.0 puntos] [Forma B]

Un bloque de 4 kg de masa se levanta verticalmente mediante un sistema de poleas conectados a un motor. El bloque está inicialmente en reposo. El motor ejerce una fuerza en el cable dada por $f(t) = 5\,t + 5\,\text{N}$. Determine la velocidad del bloque en $t = 5$ segundos. Considere $g = 10\,\text{m/s}^2$. Notar que en los primeros instantes de tiempo el bloque está conectado con el suelo.

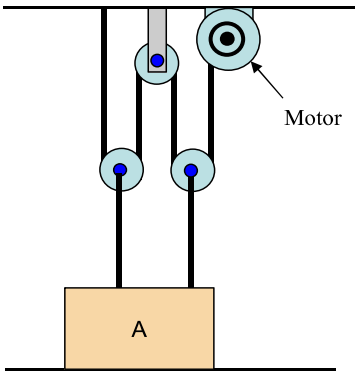


Figura 2: Motor y sistema de poleas

Solución

Primero se debe determinar el instante de tiempo en donde el bloque sube, para esto se tiene el siguiente DCL:

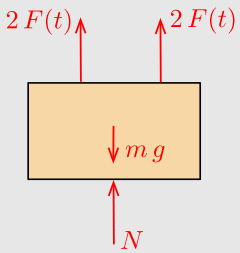


Figura 2.1: Diagrama de cuerpo libre del bloque.

El bloque empieza a subir en el instante en que la fuerza normal es nula (i.e. no existe contacto caja−suelo), utilizando 2^{da} ley de Newton se obtiene cuanto debe ser el valor de la fuerza F en este instante:

$$\sum_i f_i = 0$$

$$4\,F(t^*) - m\,g + \cancelto{0}{N} = 0$$

$$F(t^*) = \frac{m\,g}{4}$$

$$= \frac{(4)(10)}{4} = 10\,\text{N}$$

El tiempo t^* en que se despega la caja es entonces:

$$F(t^*) = 10$$

$$5t^* + 5 = 10$$

$$t^* = 1\,\text{s}$$

La velocidad en $t = 5\,\text{s}$ se puede obtener aplicando el principio de impulso y momentum entre $t = 1\,\text{s}$ y $t = 5\,\text{s}$ en el eje y:

$$
\begin{aligned}
L_1 + I &= L_2 \\
m\,v_i + \sum_i \int_1^5 f_i \,\mathrm{d}t &= m v_f \\
0 + \int_1^5 (4\,F(t) - m\,g)\,\mathrm{d}t &= m\,v \\
4\int_1^5 (5t+5)\,\mathrm{d}t - (4)(10)(5-1) &= (4)(v) \\
(10t^2 + 20t)\Big|_1^5 - 160 &= 4\,v \\
320 - 160 &= 4\,v \\
v &= \frac{160}{4} = 40\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

Problema 3 [3.0 puntos] [Forma A]

Dos partículas circulares están en un plano horizontal. La partícula A tiene una masa de 2 kg y la partícula B una masa de 5 kg. Determine la velocidad de cada partícula en dirección x e y después del impacto. El coeficiente de restitución es 0,5.

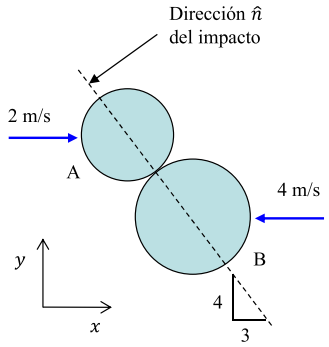


Figura 3: Colisión de partículas

Solución

Los datos del problema son los siguientes:

$$\begin{array}{lll} m_A = 2\,\text{kg} & \cos(\alpha) = 3/5 & (v_A)_x = 2\,\text{m/s} \\ m_B = 5\,\text{kg} & \sin(\alpha) = 4/5 & (v_B)_x = -4\,\text{m/s} \end{array}$$

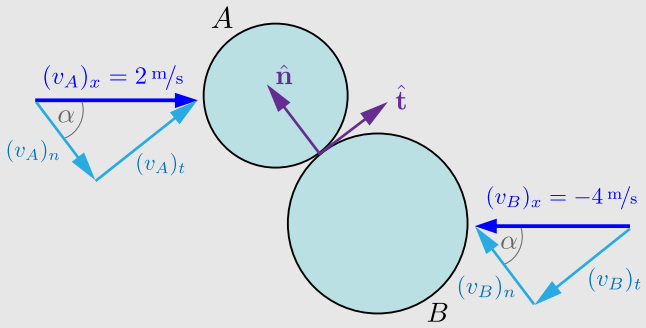


Figura 3.1: Ejes coordenados del impacto de las dos partículas

Este problema, al ser de colisión oblicua, se debe trabajar en el sistema coordenado tangencial y normal del impacto. Las velocidades en el plano $\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{t}}$ son:

$$\begin{array}{ll} (v_A)_n = -2\cos(\alpha) = -6/5\,\text{m/s} & (v_B)_n = 4\cos(\alpha) = 12/5\,\text{m/s} \\ (v_A)_t = 2\sin(\alpha) = 8/5\,\text{m/s} & (v_B)_t = -4\sin(\alpha) = -16/5\,\text{m/s} \end{array}$$

En el eje tangencial se conserva el momentum lineal de cada pelota, por lo tanto:

$$\begin{aligned} (v'_A)_t &= (v_A)_t = \frac{8}{5}\,\text{m/s} \\ (v'_B)_t &= (v_B)_t = -\frac{16}{5}\,\text{m/s} \end{aligned}$$

En el eje normal se conserva el momentum lineal del sistema, por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n &= m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n \\ (2)(-6/5) + (5)(12/5) &= (2)(v'_A)_n + (5)(v'_B)_n \\ 48/5 &= 2(v'_A)_n + 5(v'_B)_n \end{aligned} \tag{1}$$

El coeficiente de restitución es por definición:

$$\begin{aligned} e &= \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n} \\ \frac{1}{2} &= \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{-6/5 - 12/5} \\ \frac{1}{2} &= \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{-18/5} \\ \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{18}{5}\right) &= (v'_B)_n - (v'_A)_n \\ -\frac{9}{5} &= (v'_B)_n - (v'_A)_n \end{aligned} \tag{2}$$

Luego, sumando dos veces (2) a (1) se obtiene $(v'_B)_n$:

$$(v'_B)_n = \frac{6}{7}\,\mathrm{m/s}$$

de (2) se obtiene $(v'_A)_n$:

$$(v'_A)_n = \frac{93}{35}\,\mathrm{m/s}$$

Ahora, es necesario determinar el vector velocidad en las coordenadas $x - y$, para esto se tiene que los vectores directores $\hat{\mathbf{t}}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ son:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} &= \sin(\alpha)\,\hat{\mathbf{i}} + \cos(\alpha)\,\hat{\mathbf{j}} = \begin{Bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{Bmatrix} \\ \hat{\mathbf{n}} &= -\cos(\alpha)\,\hat{\mathbf{i}} + \sin(\alpha)\,\hat{\mathbf{j}} = \begin{Bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Los vectores velocidad[1] de cada pelota después de la colisión en coordenadas $x-y$ son:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_A &= \frac{8}{5}\,\hat{\mathbf{t}} + \frac{93}{35}\,\hat{\mathbf{n}} \\ &= \frac{8}{5}\begin{Bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{Bmatrix} + \frac{93}{35}\begin{Bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -11/35 \\ 108/35 \end{Bmatrix}\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{v}'_B &= -\frac{16}{5}\,\hat{\mathbf{t}} + \frac{6}{7}\,\hat{\mathbf{n}} \\ &= -\frac{16}{5}\begin{Bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{Bmatrix} + \frac{6}{7}\begin{Bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -538/175 \\ -216/175 \end{Bmatrix}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

[1] Se puede comprobar el resultado verificando que las normas en ambos sistemas sean las mismas:

$$|\mathbf{v}'_A| = \sqrt{(8/5)^2 + (93/35)^2} = \sqrt{(-11/35)^2 + (108/35)^2} = \sqrt{2357/245}\,\mathrm{m/s}$$

$$|\mathbf{v}'_B| = \sqrt{(-16/5)^2 + (6/7)^2} = \sqrt{(-538/175)^2 + (-216/175)^2} = 2\sqrt{3361}/35\,\mathrm{m/s}$$

Problema 4 [3.0 puntos] [Forma B]

Dos partículas circulares están en un plano horizontal. La partícula A tiene una masa de 1 kg y la partícula B una masa de 3 kg. Determine la velocidad de cada partícula en dirección x e y después del impacto. El coeficiente de restitución es 0,5.

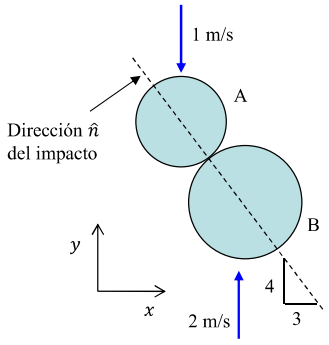


Figura 4: Colisión de partículas

Solución

Los datos del problema son los siguientes:

$$m_A = 1\,\text{kg} \qquad \cos(\alpha) = 3/5 \qquad (v_A)_y = -1\,\text{m/s}$$
$$m_B = 3\,\text{kg} \qquad \sin(\alpha) = 4/5 \qquad (v_B)_y = 2\,\text{m/s}$$

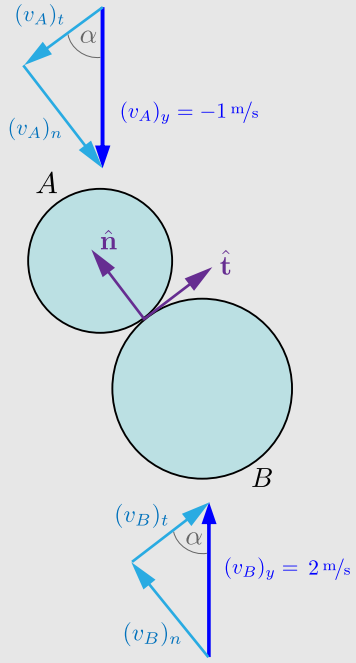


Figura 4.1: Ejes coordenados del impacto de las dos partículas

Este problema, al ser de colisión oblicua, se debe trabajar en el sistema coordenado tangencial y normal del impacto. Las velocidades en el plano $\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{t}}$ son:

$$(v_A)_n = -1\sin(\alpha) = -4/5\,\text{m/s} \qquad (v_B)_n = 2\sin(\alpha) = 8/5\,\text{m/s}$$
$$(v_A)_t = -1\cos(\alpha) = -3/5\,\text{m/s} \qquad (v_B)_t = 2\cos(\alpha) = 6/5\,\text{m/s}$$

En el eje tangencial se conserva el momentum lineal de cada partícula, por lo tanto:

$$(v'_A)_t = (v_A)_t = -\frac{3}{5}\,\text{m/s}$$
$$(v'_B)_t = (v_B)_t = \frac{6}{5}\,\text{m/s}$$

En el eje normal se conserva el momentum lineal del sistema, por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n &= m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n \\ (1)(-4/5) + (3)(8/5) &= (1)(v'_A)_n + (3)(v'_B)_n \\ 4 &= (v'_A)_n + 3(v'_B)_n \end{aligned} \tag{1}$$

El coeficiente de restitución es por definición:

$$\begin{aligned} e &= \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n} \\ \frac{1}{2} &= \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{-4/5 - 8/5} \\ \frac{1}{2} &= \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{-12/5} \\ -\frac{6}{5} &= (v'_B)_n - (v'_A)_n \end{aligned} \tag{2}$$

Luego, sumando (2) a (1) se obtiene $(v'_B)_n$:

$$(v'_B)_n = \frac{7}{10}\,\text{m/s}$$

de (2) se obtiene $(v'_A)_n$:

$$(v'_A)_n = \frac{19}{10}\,\text{m/s}$$

Ahora, es necesario determinar el vector velocidad en las coordenadas $x - y$, para esto se tiene que los vectores directores $\hat{\mathbf{t}}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ son:

$$\hat{\mathbf{t}} = \sin(\alpha)\,\hat{\mathbf{i}} + \cos(\alpha)\,\hat{\mathbf{j}} = \begin{Bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{Bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{n}} = -\cos(\alpha)\,\hat{\mathbf{i}} + \sin(\alpha)\,\hat{\mathbf{j}} = \begin{Bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{Bmatrix}$$

Los vectores velocidad[2] de cada pelota después de la colisión en coordenadas $x-y$ son:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_A &= -\frac{3}{5}\,\hat{\mathbf{t}} + \frac{19}{10}\,\hat{\mathbf{n}} \\ &= -\frac{3}{5}\begin{Bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{Bmatrix} + \frac{19}{10}\begin{Bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -81/50 \\ 29/25 \end{Bmatrix}\,\text{m/s} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{v}'_B &= \frac{6}{5}\,\hat{\mathbf{t}} + \frac{7}{10}\,\hat{\mathbf{n}} \\ &= \frac{6}{5}\begin{Bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{Bmatrix} + \frac{7}{10}\begin{Bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 27/50 \\ 32/25 \end{Bmatrix}\,\text{m/s} \end{aligned}$$

[2]Se puede comprobar el resultado verificando que las normas en ambos sistemas sean las mismas:

$$|\mathbf{v}'_A| = \sqrt{(-3/5)^2 + (19/10)^2} = \sqrt{(-81/50)^2 + (29/25)^2} = \sqrt{397}/10\,\text{m/s}$$
$$|\mathbf{v}'_B| = \sqrt{(6/5)^2 + (7/10)^2} = \sqrt{(27/50)^2 + (32/25)^2} = \sqrt{193}/10\,\text{m/s}$$