PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATóLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2024

Examen Final

Duración total: 120 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. **Sólo se aceptarán preguntas de enunciado**. Si la pregunta no es de enunciado o una aclaración de este, no se le dará respuesta alguna.
5. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
6. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** 1/5 **de una respuesta correcta**.
7. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).
8. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y será calificado con la nota mínima. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

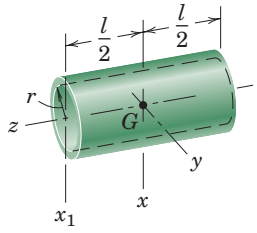
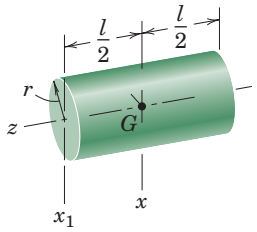
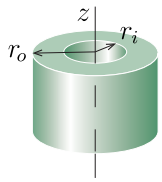
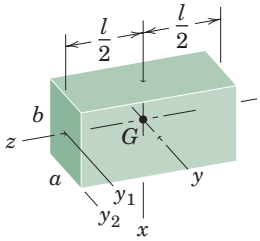
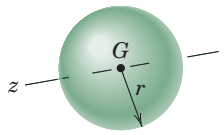
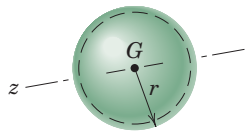
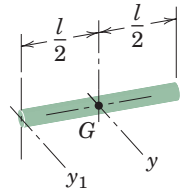
   Adulterar el acta de asistencia

   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

(m = mass of body shown)

BODY	MASS CENTER	MASS MOMENTS OF INERTIA
 Circular Cylindrical Shell	—	$I_{xx} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$
 Circular Cylinder	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$
 Circular Hollow Cylinder	—	$I_{zz} = \frac{1}{2}m\left(r_o^2 + r_i^2\right)$
 Rectangular Parallelepiped	—	$I_{xx} = \frac{1}{12}m(a^2 + l^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + l^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{12}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{y_2y_2} = \frac{1}{3}m(b^2 + l^2)$
 Sphere	—	$I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$
 Spherical Shell	—	$I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$
 Uniform Slender Rod	—	$I_{yy} = \frac{1}{12}ml^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{3}ml^2$

Cinemática en coordenadas esféricas

Las ecuaciones de cinemática en coordenadas esféricas utilizando el ángulo de elevación φ_{ele} son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= r\,\hat{\mathbf{e}}_r \\
\dot{\mathbf{u}} &= \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\
\ddot{\mathbf{u}} &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 - r\,\dot{\theta}^2\,\cos^2\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \\
&\quad + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\cos\varphi + r\,\ddot{\theta}\,\cos\varphi - 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \\
&\quad + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} + r\,\dot{\theta}^2\,\sin\varphi\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de cinemática en coordenadas esféricas utilizando el ángulo polar φ_{pol} son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= r\,\hat{\mathbf{e}}_r \\
\dot{\mathbf{u}} &= \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\
\ddot{\mathbf{u}} &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 - r\,\dot{\theta}^2\,\sin^2\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \\
&\quad + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\sin\varphi + r\,\ddot{\theta}\,\sin\varphi + 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \\
&\quad + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} - r\,\dot{\theta}^2\,\sin\varphi\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi
\end{aligned}$$

Oscilador Amortiguado

La ecuación del movimiento de un oscilador amortiguado tiene tres posibles soluciones dependiendo del factor de amortiguamiento crítico ζ, donde:

$$\zeta = \frac{c}{c_{\text{crit}}} = \frac{c}{2\,m\,\omega_n}$$

- **Caso con $\zeta > 1$:**

  $$x(t) = A_1\,e^{\lambda_1\,t} + A_2\,e^{\lambda_2\,t}$$

  , donde $\lambda_1 = \omega_n\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$ y $\lambda_2 = \omega_n\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$.

- **Caso con $\zeta = 1$:**

  $$x(t) = (A_1 + A_2\,t)\;e^{-\omega_n t}$$

- **Caso con $\zeta < 1$:**

  $$x(t) = e^{-\zeta\,\omega_n\,t}\left[\,A_1\,\cos\left(\omega_d\,t\right) + A_2\,\sin\left(\omega_d\,t\right)\,\right]$$

  , donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$.

Problema 1 [0.5 puntos]

La masa $m = 0{,}2\,\text{kg} = {}^{1}/_{5}\,\text{kg}$ se encuentra unida a una cuerda (ideal) y está girando horizontalmente en forma circular con $L_1 = 3\,\text{m}$ y $\phi_1 = 30°$. La cuerda se jala lentamente desde el agujero en A hasta que la rapidez de la masa se haya duplicado. Desprecie el roce del aire y considere que $g = 10\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$. Determine el radio final R_2.

a) $R_2 = \dfrac{3}{4}\,\text{m}$

b) $R_2 = \dfrac{2}{3}\,\text{m}$

c) $R_2 = \dfrac{1}{9}\,\text{m}$

d) $R_2 = \dfrac{3}{2}\,\text{m}$

e) $R_2 = \dfrac{2}{9}\,\text{m}$

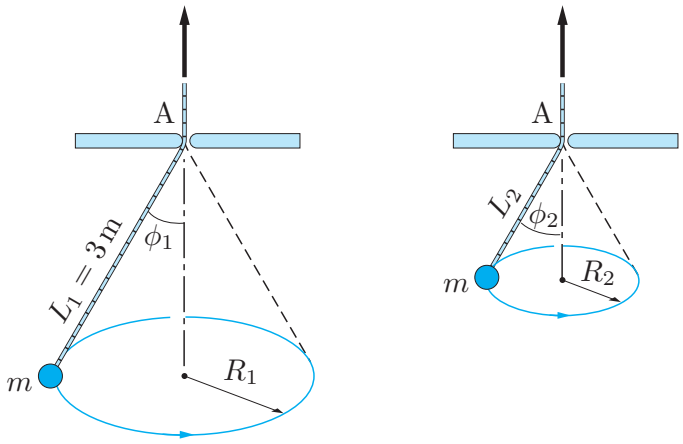


Figura 1: Masa girando horizontalmente en forma circular.

Solución

En la solución de este problema resulta conveniente utilizar coordenadas cilíndricas. El radio inicial R_1 es:

$$R_1 = L_1 \sin\phi_1 = (3\,\text{m})\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\text{m}$$

La tensión en el cable no produce momento respecto al eje $\hat{\mathbf{k}}$ que pasa por A. Es decir, se conserva el momentum angular en el eje $\hat{\mathbf{k}}$. Con ello, es posible formular la conservación del momentum angular para despejar R_2:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{\text{A1}} &= \mathbf{H}_{\text{A2}} \\
+\,(m\,v_1)\,(R_1)\,\hat{\mathbf{k}} &= +\,(m\,v_2)\,(R_2)\,\hat{\mathbf{k}} \\
+\,(m\,v_1)\,(R_1)\,\hat{\mathbf{k}} &= +\,(2\,m\,v_1)\,(R_2)\,\hat{\mathbf{k}} \\
R_2 &= \frac{R_1}{2} = \frac{3}{4}\,\text{m}
\end{aligned}$$

Problema 2 [0.5 puntos]

Usted está en el equipo de diseño de un *rover* de exploración espacial. El *rover* distribuye una masa de $m = 30\,\text{kg}$ sobre cada una de sus ruedas, las cuales tienen un resorte de rigidez $k = 270\,{}^{\text{N}}/_{\text{m}}$ cada una. El *rover* debe tener un coeficiente de amortiguamiento crítico $\zeta = {}^{2}/_{3}$ en cada rueda para su correcto funcionamiento. Determine el amortiguamiento c requerido en cada rueda del *rover*.

a) $c = 120\ {}^{\text{N}\cdot\text{s}}/_{\text{m}}$

b) $c = 60\ {}^{\text{N}\cdot\text{s}}/_{\text{m}}$

c) $c = 360\ {}^{\text{N}\cdot\text{s}}/_{\text{m}}$

d) $c = 30\ {}^{\text{N}\cdot\text{s}}/_{\text{m}}$

e) $c = 270\ {}^{\text{N}\cdot\text{s}}/_{\text{m}}$

Solución

La frecuencia natural circular del sistema es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{270}{30}} = \sqrt{9} = 3\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$$

El factor de amortiguamiento crítico es:

$$\zeta = \frac{c}{c_{\text{crit}}} = \frac{c}{2\,m\,\omega_n}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{c}{(2)\,(30)\,(3)}$$
$$c = 120\ {}^{\text{N}\cdot\text{s}}/_{\text{m}}$$

Problema 3 [0.5 puntos]

Un balde expulsa agua por dos orificios iguales e inclinados en ángulo θ bajo la horizontal con velocidad v_w relativa al balde. Cada orificio tiene área a_w, y la densidad del agua es ρ_w. En un determinado instante, el balde con agua tiene masa m y está subiendo con aceleración b gracias a la fuerza P. Determine la fuerza P que se está ejerciendo en dicho instante.

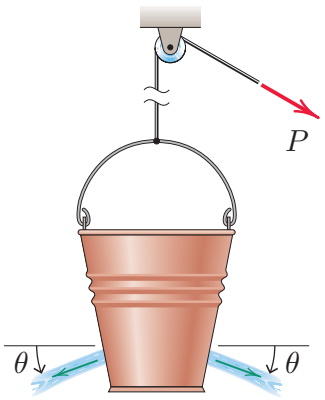


Figura 2: Balde de agua con dos orificios.

a) $P = m\,(g+b) - 2\,v_w^2\,a_w\,\rho_w\,\sin\theta$

b) $P = m\,b - 2\,v_w^2\,a_w\,\rho_w\,\sin\theta$

c) $P = m\,(g+b) - 2\,v_w\,a_w\,\rho_w\,\sin\theta$

d) $P = m\,(g+b) - 2\,v_w\,a_w\,\rho_w\,\cos\theta$

e) $P = m\,(g+b) - v_w^2\,a_w\,\rho_w\,\cos\theta$

Hint: Cada orificio expulsa agua a una tasa de $\dot{m} = v_w\,a_w\,\rho_w$, en unidades de $^{\text{kg}}/_{\text{s}}$.

Solución

La ecuación de masa variable (en el eje $\hat{\mathbf{k}}$) para el sistema resulta en:

$$\sum f_z = m\,\ddot{u} + \dot{m}\,v_{c/p}$$
$$P - m\,g = m\,b + 2\,\left(-v_w\,a_w\,\rho_w\right)\left(v_w\,\sin\theta\right)$$

Notar que sólo se ha considerado la componente vertical de la velocidad de expulsión de agua, i.e., sólo se considera la componente vertical de la fuerza de empuje $\dot{m}\,v_{c/p}$. Adicionalmente, se ha considerado que se expulsa masa ($\dot{m} < 0$) y que hay 2 orificios de salida de agua. Despejando la fuerza P de la expresión anterior:

$$P = m\,(g+b) - 2\,v_w^2\,a_w\,\rho_w\,\sin\theta$$

Problema 4 [0.5 puntos]

Determine la frecuencia natural circular del sistema que se muestra en la Figura 3. Desprecie la masa y fricción de las cuerdas y poleas, y considere que el resorte es "ideal".

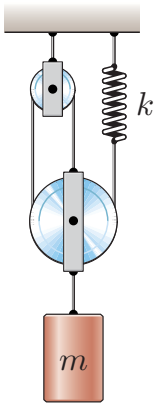


Figura 3: Oscilador de masa con polea y resorte.

a) $\omega_n = 3\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

b) $\omega_n = \sqrt{3}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

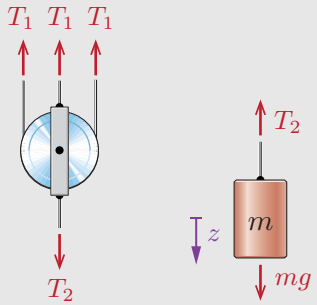
c) $\omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

d) $\omega_n = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

e) $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Solución

Se hacen DCL para la polea y para la masa, como muestran las figuras al costado. Se considera el eje z positivo hacia abajo (datum). Formulando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton para cada uno se obtiene:



$$T_2 - 3\,T_1 = m_{\text{polea}}\,\ddot{z}_{\text{polea}}$$
$$m\,g - T_2 = m\,\ddot{z}$$

Debido a que la polea es ideal (i.e. $m_{\text{polea}} = 0$), se obtiene que:

$$m\,g - 3\,T_1 = m\,\ddot{z}$$

Llamando h a la distancia inicial de la masa al techo, la longitud de la cuerda superior es:

$$\ell_T = 3\,h + \text{ctes.}$$

Ahora bien, si incluimos la posición de la masa z a la ecuación de ligadura, y el estiramiento del resorte δ como un aumento de la longitud de la cuerda, se tiene que:

$$\ell_T + \delta = 3\,(h + z) + \text{ctes.}$$

Reemplazando la longitud ℓ_T obtenida anteriormente y cancelando a ambos lados:

$$\delta = 3\,z$$

La tensión en la cuerda es igual a la fuerza que ejerce el resorte, es decir:

$$T_1 = F_e = k\,\delta = 3\,k\,z$$

Con ello, reemplazando en la ecuación obtenida con la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton:

$$m\,g - 3\,(3\,k\,z) = m\,\ddot{z}$$
$$\ddot{z} + \left(\frac{9k}{m}\right) z = g$$

Finalmente, se tiene que:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{9k}{m}} = 3\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Nota: la fuerza estática $m\,g$ no afecta la frecuencia del oscilador, sólo desplaza su punto de equilibrio.

Problema 5 [0.5 puntos]

Una bola de acero de masa $m = 1\,\text{kg}$ cae desde el reposo en la superficie de un tambor de aceite. El aceite ejerce un roce viscoso de magnitud $f_v = 2\,v$ en unidades de Newton si v está en $^{\text{m}}/_{\text{s}}$. Considerando que $g = 10\,^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$, determine la rapidez de la bola 1 segundo después de que se libera.

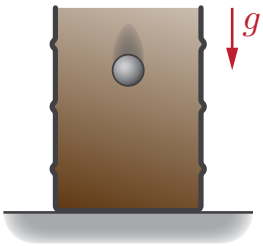


Figura 4: Bola de acero en barril de aceite.

a) $v(1) = 5 - 5\,e^{-2}\ \ ^{\text{m}}/_{\text{s}}$

b) $v(1) = 10 - 10\,e^{-2}\ \ ^{\text{m}}/_{\text{s}}$

c) $v(1) = 5\,e^{-2}\ \ ^{\text{m}}/_{\text{s}}$

d) $v(1) = 10\,e^{-2}\ \ ^{\text{m}}/_{\text{s}}$

e) $v(1) = 10\ \ ^{\text{m}}/_{\text{s}}$

Hint: Considere un sistema coordenado con eje vertical positivo hacia abajo.

Solución

Un sencillo DCL, tomando el eje z como positivo hacia abajo, y utilizando la 2^{da} ley de Newton resulta en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \sum f &= m\,\ddot{u} \\ m\,g - 2\,v &= m\,\dot{v} \\ \dot{v} &= 10 - 2\,v \end{aligned}$$

Resolviendo la EDO por separación de variables:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{10 - 2\,v}\right)\,\mathrm{d}v &= (1)\,\mathrm{d}t \\ -\frac{1}{2}\,\log\left(10 - 2\,v\right) &= t + C_1 \\ e^{-2\,t + C_1} &= 10 - 2\,v \\ v &= 5 + A\,e^{-2\,t} \end{aligned}$$

La constante de integración $A = \frac{1}{2}\,e^{C_1}$ se obtiene con la condición inicial $v(0) = 0$. Con ello, se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= 5 + A\,e^{0} \\ A &= -5 \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación de la velocidad de la bola de acero es:

$$v(t) = 5 - 5\,e^{-2\,t}$$

Evaluando la expresión de velocidad para $t = 1\,\text{s}$ se obtiene:

$$v(1) = 5 - 5\,e^{-2}$$

Problema 6 [0.5 puntos]

Un volante de inercia tiene densidad uniforme ρ, masa total M, y geometría como muestra la Figura 5. Determine la inercia respecto al eje O–O'.

a) $I = \dfrac{31}{56}\, M\, R^2$

b) $I = \dfrac{7}{8}\, M\, R^2$

c) $I = \dfrac{1}{2}\, M\, R^2$

d) $I = \dfrac{27}{64}\, M\, R^2$

e) $I = \dfrac{4}{7}\, M\, R^2$

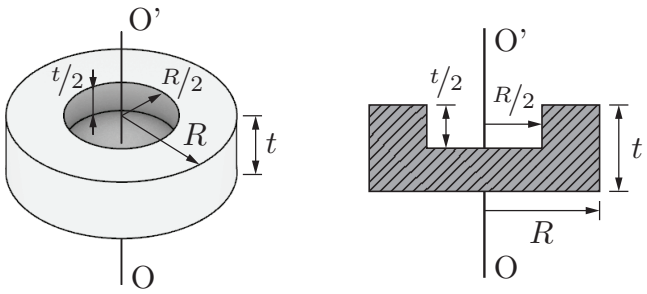


Figura 5: Geometría del volante de inercia.

Solución

Este procedimiento resta el cilindro interno (agujero) de altura $t/2$ y radio $R/2$, a un cilindro mayor de altura t y radio R.

Los volúmenes de los cilindros mayor y menor (agujero) son:

$$v_1 = \pi\, R^2\, t \qquad\qquad v_2 = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{8}\, \pi\, R^2\, t$$

Es decir, la masa de cada cilindro es:

$$M_1 = v_1\, \rho = \pi\, R^2\, t\, \rho \qquad\qquad M_2 = v_2\, \rho = \frac{1}{8}\, \pi\, R^2\, t\, \rho$$

Con ello, la masa del volante de inercia es:

$$M = (v_1 - v_2)\, \rho = M_1 - M_2 = \frac{7}{8}\, \pi\, R^2\, t\, \rho$$

La inercias de los cilindros mayor y menor (agujero) son:

$$I_1 = \frac{1}{2}\, M_1\, R^2 = \frac{1}{2}\, \pi\, R^4\, t\, \rho \qquad\qquad I_2 = \frac{1}{2}\, M_2 \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{64}\, \pi\, R^4\, t\, \rho$$

Es decir, la inercia resultante es:

$$I = I_1 - I_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{64}\right) \pi\, R^4\, t\, \rho = \frac{31}{64}\, \pi\, R^4\, t\, \rho$$

Factorizando la masa de la expresión:

$$I = I \left(\frac{M}{M}\right) = I \left(\frac{M}{7/8\, \pi\, R^2\, t\, \rho}\right) = \left(\frac{31}{64}\, \pi\, R^4\, t\, \rho\right) \left(\frac{8}{7\, \pi\, R^2\, t\, \rho}\right) M$$

$$I = \frac{31}{56}\, M\, R^2$$

Problema 7 [0.5 puntos]

Una cremallera (barra dentada) cae desde el reposo entre dos engranajes (piñones) fijos en A y B respectivamente. La masa de la cremallera es $m_c = 12\,\text{kg}$, la masa e inercia de cada engranaje es $m_g = 3\,\text{kg}$ y $I_g = {}^2\!/_3\, m_g R^2$. Asuma que la aceleración de gravedad es $g = 10\,{}^{\text{m}}\!/_{\text{s}^2}$ y desprecie las fuerzas de roce. Determine la rapidez de la cremallera una vez que ha caído $s = 600\,\text{mm} = {}^3\!/_5\,\text{m}$.

a) $v = 3\ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}$

b) $v = 2\ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}$

c) $v = \dfrac{5}{2}\ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}$

d) $v = \dfrac{6}{7}\sqrt{14}\ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}$

e) $v = \dfrac{3}{7}\sqrt{14}\ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}$

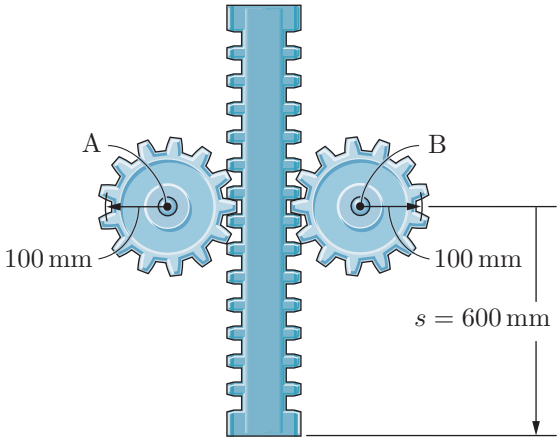


Figura 6: Cremallera que cae entre engranajes fijos.

Solución

La velocidad angular de cada engranaje se relacionan con la rapidez de la cremallera según:

$$\omega = \pm\frac{v}{R}$$

Para conocer la rapidez en determinada posición, resulta conveniente utilizar el principio de conservación de energía. Considerando que el datum (i.e. $z = 0$) se encuentra en el punto inicial de la cremallera, se tiene que:

$$\begin{aligned} T_1 + V_{g1} &= T_2 + V_{g2} \\ 0 + 0 &= \frac{1}{2} m_c\, v^2 + 2\left(\frac{1}{2} I_g\, \omega^2\right) + mg\,(-s) \\ 0 &= \frac{1}{2} m_c\, v^2 + 2\left(\frac{1}{3} m_g\, v^2\right) + m_c\, g\left(-\frac{3}{5}\right) \\ 0 &= 6\, v^2 + 2\, v^2 - 72 \\ v^2 &= 9 \\ v &= \pm 3\ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}} \end{aligned}$$

, donde sólo la solución positiva tiene sentido físico para este problema.

Nota 1: El radio de los engranajes no afecta el resultado ya que se cancela al escribir ω en función de v.

Nota 2: El sentido de giro de cada engranaje, es decir el signo de ω, no es de importancia ya que la energía cinética rotacional depende de ω^2.

Problema 8 [0.5 puntos]

Un oso se ubica en los extremos de dos vigas homogéneas idénticas, cada una de largo L y masa M. Ambas vigas se mantienen en equilibrio horizontal. El punto de apoyo de cada viga se indica en la Figura 7. Despreciando cualquier efecto de roce, obtenga la masa del oso.

a) $\frac{3}{4}M$

b) $\frac{M}{2}$

c) M

d) $2M$

e) $\frac{M}{4}$

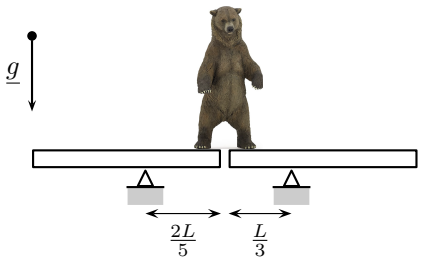


Figura 7: Vigas y oso en equilibrio.

Solución

Si el sistema se mantiene en equilibrio, el oso debe apoyarse un poco más en una pierna que en la otra. Sea αmg la fracción del peso apoyada en la viga de la izquierda, mientras que $(1-\alpha)\,mg$ la fracción del peso del oso apoyada en la derecha, con $\alpha < 1$. Ya que las vigas son uniformes, sus centros de masas se ubican al centro de cada una. Tomando momento con respecto al apoyo de la izquierda:

$$Mg\left(\frac{L}{2}-\frac{2L}{5}\right)=\alpha mg\frac{2L}{5} \qquad \rightarrow \qquad \alpha m=\frac{M}{4}$$

y luego respecto al apoyo de la derecha

$$Mg\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{3}\right)=(1-\alpha)\,mg\frac{L}{3} \qquad \rightarrow \qquad (1-\alpha)\,m=\frac{M}{2}$$

Sumando se obtiene que

$$m=\frac{M}{2}+\frac{M}{4}=\frac{3}{4}M$$

Problema 9 [0.5 puntos]

El palo de la figura tiene largo L y masa M y gira libremente en torno al pivote O. Inicialmente, el palo está sujeto por una cuerda. El palo forma un ángulo θ respecto a la horizontal según se indica en la Figura 8, donde $\sin\theta = \frac{3}{5}$ y $\cos\theta = \frac{4}{5}$. El centro de masa del palo se ubica a distancia radial $\frac{2L}{3}$ medida desde el pivote O, y el momento de inercia respecto a este mismo punto es $\frac{5}{9}ML^2$.

En cierto instante se corta la cuerda. Despreciando el roce, obtenga la velocidad angular ω del palo cuando el centro de masa alcanza la altura del pivote O.

a) $\sqrt{\frac{36g}{25L}}$

b) $\sqrt{\frac{27g}{50L}}$

c) $\sqrt{\frac{27g}{10L}}$

d) $\sqrt{\frac{36g}{15L}}$

e) $\sqrt{\frac{36g}{5L}}$

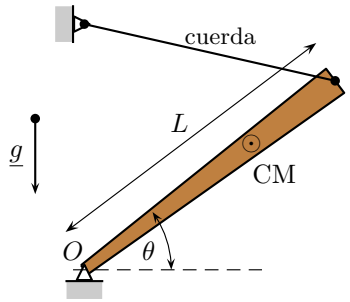


Figura 8: Palo sujeto por una cuerda.

Solución

Justo cuando se corta la cuerda, sólo hay energía potencial. Tomando el DATUM respecto a la altura del pivote

$$U_g = Mg\frac{2L}{3}\sin\theta = Mg\frac{2L}{3}\frac{3}{5}$$

Al pasar por la altura de O, sólo hay energía cinética rotacional

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{5}{9}ML^2\omega^2$$

Ya que no hay fuerzas no conservativas, igualando ambas energías se despeja que:

$$\omega = \frac{6}{5}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

Problema 10 [0.5 puntos]

Una pelota de masa m se deja caer y rebota en el piso. Justo al llegar al piso, su rapidez es v y al separarse del piso la magnitud de su velocidad es $\frac{v}{4}$. El choque de la pelota con el piso dura un intervalo de tiempo Δt. Determine el vector de aceleración promedio de la pelota durante el choque con el piso.

a) $\dfrac{5v}{4\Delta t}\,\hat{\mathbf{j}}$

b) $\left(-g - \dfrac{3v}{4\Delta t}\right)\hat{\mathbf{j}}$

c) $\dfrac{3v}{4\Delta t}\,\hat{\mathbf{j}}$

d) $\left(-g + \dfrac{3v}{4\Delta t}\right)\hat{\mathbf{j}}$

e) $-\dfrac{5v}{4\Delta t}\,\hat{\mathbf{j}}$

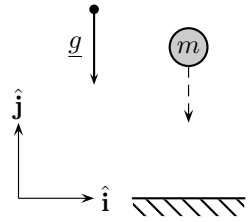


Figura 9: Pelota que cae y rebota.

Solución

Mediante la evaluación del momentum lineal podemos estimar el impulso experimentado por la pelota durante el choque

$$-mv\,\hat{\mathbf{j}} + \int_{\Delta t} f(t)\,dt\,\hat{\mathbf{j}} = \frac{mv}{4}\,\hat{\mathbf{j}}$$

Como se pregunta por la aceleración promedio, podemos reemplazar la integral por el valor promedio de la fuerza $\bar{f}$ por la duración del choque

$$\bar{f}\,\Delta t\,\hat{\mathbf{j}} = \frac{mv}{4}\,\hat{\mathbf{j}} + mv\,\hat{\jmath} = \frac{5mv}{4}\,\hat{\mathbf{j}}$$

Aplicando la segunda ley en la dirección $\hat{\mathbf{j}}$, se tiene

$$\ddot{u} = \frac{5v}{4\Delta t}\,\hat{\mathbf{j}}$$

Problema 11 [0.5 puntos]

Considere las tres golillas homogéneas, de igual diámetro exterior, pero diferente densidad presentadas en la Figura 10. Las golillas A y B tienen la misma masa M, mientras que la golilla C tiene una masa menor m, ya que se obtuvo extrayendo una parte central mayor a la golilla B. Entonces, los momentos de inercia de las golillas en torno al eje común presentado en la figura satisfacen:

a) $I_A > I_B > I_C$

b) $I_B > I_A > I_C$

c) $I_A = I_B > I_C$

d) $I_B > I_A = I_C$

e) ninguna de las relaciones anteriores

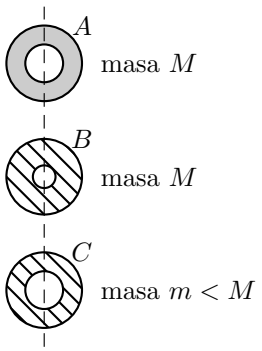


Figura 10: Golillas homogéneas.

Solución

Ya que la golilla A tiene la misma masa, pero más alejada del eje de giro, se debe cumplir que $I_A > I_B$. Por otro lado, la golilla C se obtuvo retirando una porción de la B de forma que $I_B > I_C$, entonces:

$$I_A > I_B > I_C$$

Problema 12 [0.5 puntos]

Un bloque de masa M cuelga de una cuerda enrollada alrededor de una polea de radio R e igual masa M tal como se muestra en la Figura 11. El momento de inercia de la polea es $I = \frac{1}{2}MR^2$. Despreciando el roce con el aire, determine la tensión en la cuerda durante el descenso del bloque.

a) $\frac{1}{3}Mg$

b) $\frac{2}{3}Mg$

c) $\frac{4}{3}Mg$

d) $2Mg$

e) Mg

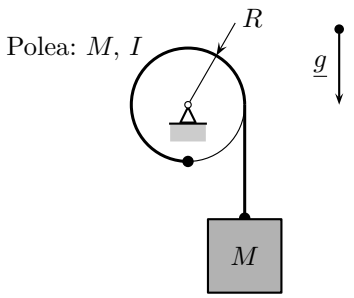


Figura 11: Bloque en caída desde una polea.

Solución

Haciendo el DCL para el bloque se obtiene:

$$T - Mg = M\ddot{u}_z$$

donde T es la tensión en la cuerda y u_z la posición vertical del bloque respecto a alguna referencia ubicada por debajo de la posición inicial $u_z(t=0)$.
Por otro lado, aplicando la segunda ley de Newton a la polea se puede plantear:

$$T\,R = I\,\ddot{\theta}$$

donde θ es el giro de la polea en sentido horario. Ya que el giro de la polea se puede ligar a la posición vertical del bloque, entonces:

$$u_z = u_z(t=0) - \theta\,R \qquad \rightarrow \qquad \ddot{u}_z = -\ddot{\theta}\,R$$

Entonces, combinando la ecuación de ligadura con el equilibrio de la polea

$$T = -\frac{M}{2}\ddot{u}_z$$

Luego, reemplazando en la ecuación de equilibrio del bloque

$$\ddot{u}_z = -\frac{2}{3}g$$

con lo que se obtiene que $\ddot{\theta} = \frac{2}{3}\,\frac{g}{R}$ y $T = \frac{Mg}{3}$

Problema 13 [0.5 puntos]

Un sistema está compuesto por tres partículas, dos partículas de igual masa m que están en reposo sobre una superficie horizontal y una tercera partícula de masa $2m$ que se ubica inicialmente a una altura h sobre dicha superficie. En cierto instante, se deja caer desde el reposo la partícula de masa $2m$. Determine la rapidez del centro de masa formado por las tres partículas justo antes de que la partícula de masa $2m$ llegue al suelo.

a) $\sqrt{\frac{gh}{2}}$

b) $\sqrt{2gh}$

c) $\sqrt{\frac{gh}{8}}$

d) $\sqrt{gh}$

e) $\sqrt{\frac{gh}{4}}$

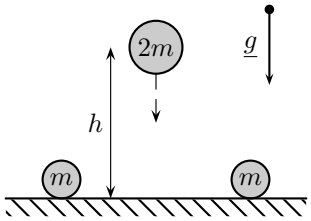


Figura 12: Sistema de partículas.

Solución

Si u_z es la posición vertical de la partícula $2m$, mediante un DCL se obtiene naturalmente que $\ddot{u}_z = -g$. Ya que la aceleración es constante, mediante doble integración y empleando las condiciones iniciales se obtiene que:

$$u_z(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$

Por lo tanto, la partícula $2m$ alcanza la superficie en $t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ a una velocidad $\dot{u}_z\left(t^*\right) = -\sqrt{2hg}$. Luego, la velocidad del centro de masa en dicho instante queda

$$v_{cm} = \frac{m \times 2 \times 0 - 2m \times \sqrt{2hg}}{m + m + 2m} = -\frac{1}{2}\sqrt{2hg} = -\sqrt{\frac{hg}{2}}$$