PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1513 — Dinámica
Segundo Semestre 2018

Taller 04

Cinemática IV — Leyes de Newton

Problema 1.

La caja de 250 kg mostrada en la figura se suspende utilizando las cuerdas AB y AC como muestra la Figura 1. Cada cuerda puede resistir una tensión máxima de 10 kN antes de romperse. Si el segmento AB permanece siempre horizontal, determine el ángulo θ mínimo al cual puede suspenderse la caja antes de que la cuerda AC se corte. Asuma que la aceleración de gravedad es $\vec{g} = -10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\ \hat{j}$.
Hint: El anillo en A no se mueve; i.e. $\mathbf{a}_{\text{anillo}} = \mathbf{0}$.

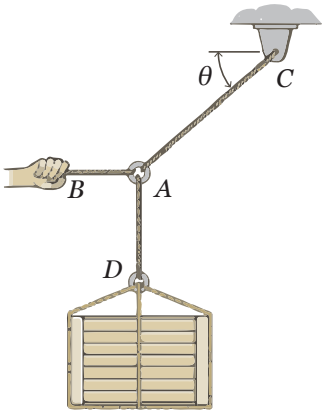


Figura 1: Caja de 250 kg suspendida por cuerdas.

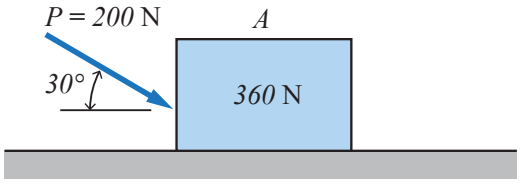


Figura 2: Caja de 250 kg.

Problema 2.

Un bloque de 360 N llamado A como muestra la Figura 2; está en reposo sobre una superficie. Al bloque se le aplica una fuerza inclinada P en el instante $t = 0$. El coeficiente de roce estático y dinámico es igual a $\mu_s = \mu_k = 0{,}2$. Se pide:

a) Hacer un *diagrama de cuerpo libre* (DCL) del bloque.

b) Determinar la fuerza normal N que actúa sobre el bloque.

c) Determine la aceleración (horizontal) del bloque.

d) Determine la posición del bloque en $t = 5\,s$.

Problema 3.

La guía y su pin recorren el contorno de una leva, como muestra la Figura 3. La guía rota con velocidad angular constante $\omega = \dot{\omega} = 4\,rad/s$, y la posición radial del pin está definida por la leva (inmóvil) que describiendo la siguiente ecuación:

$$r = \frac{0{,}15}{1 + 0{,}5\cos\theta}\ [m]$$

Determine la velocidad del pin cuando $\theta = 45°$ en coordenadas polares.

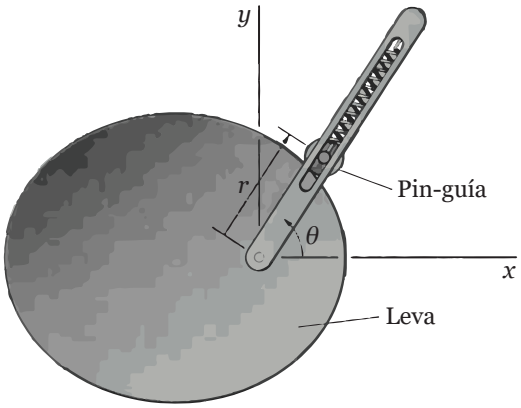


Figura 3: Mecanismo leva–guía–pasador.

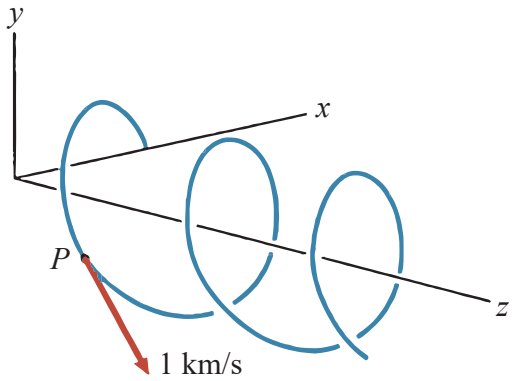


Figura 4: Partícula siguiendo un movimiento helicoidal.

Problema 4.

Una partícula cargada P se mueve en un campo magnético siguiendo una trayectoria helicoidal descrita por $r = 1\,m$, $\theta = 2z\,rad$, donde z está en metros. La partícula se mueve con velocidad constante e igual a $|\mathbf{v}| = 1\,km/s^2$, como muestra la Figura 4. Se pide:

a) Determinar el vector de velocidad $\mathbf{v}$ en coordenadas cilíndricas.

b) Si la masa de la partícula es $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg$, determine la suma (resultante) de fuerzas que actúan sobre la partícula en coordenadas cilíndricas.

Hint: La partícula se mueve con velocidad constante en z; i.e. $\dot{z} = \text{const}$.

Soluciones.

Problema 1

Haciendo un diagrama de cuerpo libre de la argolla en A (ver Figura 5), y usando la 2^a Ley de Newton con $\mathbf{a} = \mathbf{0}$; es decir, la sumatoria de fuerzas debe ser igual a cero ($\sum \mathbf{f} = \mathbf{0}$):

$$n_{ac} \begin{Bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix} + n_{ab} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + mg \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

, donde n_{ac} y n_{ab} son las tensiones en las cuerdas $\overline{ac}$ y $\overline{ab}$, respectivamente. Usando la ecuación en y (segunda ecuación) se obtiene:

$$\begin{aligned} n_{ac} \sin(\theta) - mg &= 0 \\ n_{ac} &= \frac{mg}{\sin(\theta)} \end{aligned}$$

Al momento de romperse, la cuerda tiene una tensión $n_{\max} = 10\,kN$, con lo que:

$$\begin{aligned} n_{ac} = n_{\max} &= \frac{mg}{\sin(\theta)} \\ 10\,kN &= \frac{(250/1000)\,(9{,}81)}{\sin(\theta)} \\ \sin(\theta) &= 0{,}24525 \\ \theta &= 14{,}2^\circ \end{aligned}$$

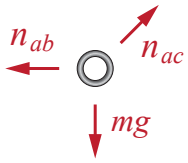


Figura 5: Fuerzas que actúan sobre la argolla con aceleración $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

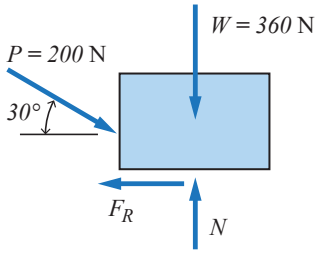


Figura 6: Diagrama de cuerpo libre (DCL) del bloque de $360\,N$.

Problema 2

Haciendo un diagrama de cuerpo libre del bloque se obtiene la Figura 6. Como sabemos que $\sum \mathbf{f} = m \cdot \mathbf{a}$, y que el bloque no acelera en la dirección y:

$$\begin{matrix} \sum f_x = 0: \\ \sum f_x = 0: \end{matrix} \qquad \begin{Bmatrix} 200\cos(30^\circ) - F_R \\ -360 - 200\sin(30^\circ) + N \end{Bmatrix} = m \cdot \begin{Bmatrix} a_x \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Con la ecuación en y tenemos que:

$$N = 360 + 200\left(\frac{1}{2}\right) = 460\,N$$

Si el bloque está en movimiento, entonces $F_R = (F_R)_{\max} = \mu N = 0{,}2N$. Es decir:

$$\begin{aligned} 200\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \mu N &= \left(\frac{W}{g}\right) a_x \\ 100\sqrt{3} - (0{,}2)\,(460) &= \frac{360}{g} \cdot a_x \\ a_x &= 2{,}213\,m/s^2 \qquad \text{positivo: hacia la derecha} \end{aligned}$$

Finalmente, la posición en $t = 5\,s$ es: $\quad d(t = 5\,s) = \frac{1}{2} a_x t^2 = 27{,}66\,m$

Problema 3
La velocidad en coordenadas polares es: $\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$
Es necesario calcular $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r\,(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{0{,}15}{1+0{,}5\cos\theta}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$
$$\dot{r} = \frac{0{,}075\sin(\theta)}{[1+0{,}5\cos\theta]^2} \cdot \dot{\theta}$$

Con ello, la velocidad es:

$$\mathbf{v} = \frac{0{,}075\sin(\theta)}{[1+0{,}5\cos\theta]^2} \cdot \dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{0{,}15}{1+0{,}5\cos\theta}\right)\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Finalmente, la velocidad cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\dot{\theta} = 4$ es:

$$\mathbf{v} = \frac{0{,}075\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left[1+0{,}5\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2}(4)\;\hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{0{,}15}{1+0{,}5\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)(4)\;\hat{\mathbf{e}}_\theta$$
$$\mathbf{v} = 0{,}1158\,\hat{\mathbf{e}}_r + 0{,}4433\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \quad [\mathrm{m/s}]$$

Problema 4
Del enunciado sabemos que:

$$\begin{array}{ccccc} r = 1\,m & ; & \dot{r} = 0 & ; & \ddot{r} = 0 \\ \theta = 2z & ; & \dot{\theta} = 2\dot{z} & ; & \ddot{\theta} = 0 \end{array}$$

, y sabemos además que $|\mathbf{v}| = 1\,km/s = 1000\,m/s$.
El vector de velocidad es:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{v} = (0)\,\hat{\mathbf{e}}_r + (1)\,(2\dot{z})\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\,\hat{\mathbf{k}} = 2\dot{z}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\,\hat{\mathbf{k}}$$

, y con ello:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4\dot{z}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{5}\dot{z} = 1000$$
$$\dot{z} = \frac{1000}{\sqrt{5}} = 200\sqrt{5} = 447{,}2\,m/s$$
$$\dot{\theta} = 2\dot{z} = 400\sqrt{5} = 894{,}4\,m/s$$
$$\rightarrow \quad \mathbf{v} = 400\sqrt{5}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + 200\sqrt{5}\,\hat{\mathbf{k}}$$

Ahora que está determinado $\dot{z}$ y $\dot{\theta}$, es posible determinar la aceleración:

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{a} = -(1)\left(4\dot{z}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r = -8\cdot 10^5\,\hat{\mathbf{e}}_r \quad [\mathrm{m/s}]$$

, y con ello la fuerza es:

$$\mathbf{f} = m\,\mathbf{a} = \left(1{,}67\cdot 10^{-27}\right)\left(-8\cdot 10^5\right)\hat{\mathbf{e}}_r$$
$$\mathbf{f} = -1{,}336\cdot 10^{-21}\,\hat{\mathbf{e}}_r \quad [\mathrm{N}]$$

Notar que como la partícula se mueve a velocidad constante en z; no es necesario aplicar una fuerza en $\hat{\mathbf{k}}$ para que se mueva con trayectoria helicoidal.