PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATóLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2024

Interrogación 01

Duración total: 120 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. **Sólo se aceptarán preguntas de enunciado**. Si la pregunta no es de enunciado o una aclaración de este, no se le dará respuesta alguna.
5. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
6. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** 1/5 **de una respuesta correcta**.
7. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).
8. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y será calificado con la nota mínima. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

   Adulterar el acta de asistencia

   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Cinemática en coordenadas esféricas

Las ecuaciones de cinemática en coordenadas esféricas utilizando el ángulo de elevación φ_{ele} son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= r\ \hat{\mathbf{e}}_r \\
\dot{\mathbf{u}} &= \dot{r}\ \hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\cos\varphi\ \hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\varphi}\ \hat{\mathbf{e}}_\varphi \\
\ddot{\mathbf{u}} &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 - r\,\dot{\theta}^2\,\cos^2\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \ \curvearrowright \\
&\quad + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\cos\varphi + r\,\ddot{\theta}\,\cos\varphi - 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ \curvearrowright \\
&\quad + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} + r\,\dot{\theta}^2\,\sin\varphi\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de cinemática en coordenadas esféricas utilizando el ángulo polar φ_{pol} son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= r\ \hat{\mathbf{e}}_r \\
\dot{\mathbf{u}} &= \dot{r}\ \hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\sin\varphi\ \hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\varphi}\ \hat{\mathbf{e}}_\varphi \\
\ddot{\mathbf{u}} &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 - r\,\dot{\theta}^2\,\sin^2\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \ \curvearrowright \\
&\quad + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\sin\varphi + r\,\ddot{\theta}\,\sin\varphi + 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ \curvearrowright \\
&\quad + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} - r\,\dot{\theta}^2\,\sin\varphi\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi
\end{aligned}$$

Problema 1 [0.5 puntos]

Una partícula que flota hacia la orilla del mar se mueve con aceleración $a(t) = v\,\sin(t)$, donde t está en segundos, y v es la velocidad en metros por segundo. La partícula comienza su recorrido con velocidad $v(0) = 1\,\mathrm{m/s}$. Determine una expresión para la velocidad de la partícula en función del tiempo t.

a) $v(t) = e^{1-\cos(t)}$

b) $v(t) = -\cos(t)$

c) $v(t) = \sin(t)$

d) $v(t) = -\ln|t|\,\cos(t)$

e) $v(t) = e^{\sin(t)}$

Solución
Se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\,\sin(t)$$

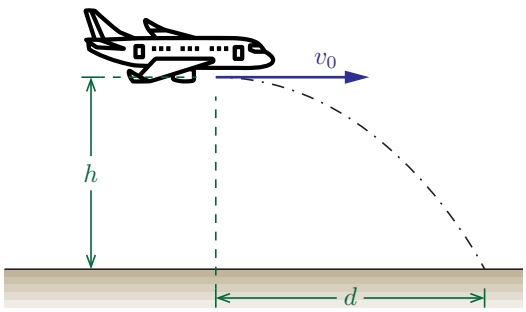
Separando variables e integrando:

$$\ln|v| = -\cos(t) + C$$
$$v(t) = e^{C-\cos(t)}$$

Utilizando la condición $v(0) = 1$ se determina que $C = 1$. Con ello, la ecuación de velocidad es:

$$v(t) = e^{1-\cos(t)}$$

Problema 2 [0.5 punto]



Un avión de reparto de provisiones a localidades remotas vuela a rapidez y altura constante v_0 y h, respectivamente. Determine la distancia d a la que debe soltar un paquete para que este caiga en el lugar deseado. Desprecie el roce con el aire en sus cálculos.

a) $d = v_0 \sqrt{\dfrac{2\,h}{g}}$

b) $d = v_0 \sqrt{\dfrac{h}{g}}$

c) $d = \dfrac{v_0^2}{g}$

d) $d = \dfrac{2\,v_0^2}{g}$

e) $d = \dfrac{v_0^2}{2\,g}$

Solución

Considerando el origen del sistema coordenado en suelo bajo el avión, la posición del paquete está dada por:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t^2 + v_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 0 \\ h \end{Bmatrix}$$

La trayectoria del proyectil debe considerar el punto donde aterriza, por lo que en determinado instante $t^\star$ se tiene:

$$\mathbf{u}(t^\star) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} (t^\star)^2 + v_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} t^\star + \begin{Bmatrix} 0 \\ h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d \\ 0 \end{Bmatrix}$$

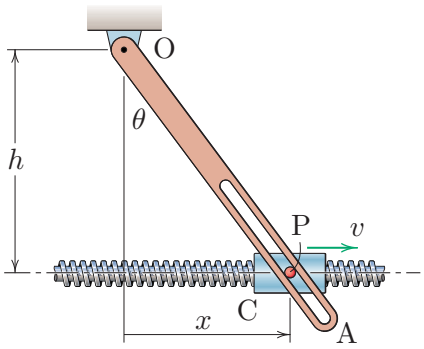
La ecuación para el eje vertical permite despejar el tiempo $t^\star$:

$$t^\star = \pm\sqrt{\frac{2\,h}{v_0}}$$

En nuestro caso sólo la solución $t^\star > 0$ tiene sentido físico. Reemplazando este valor en la ecuación del eje horizontal y despejando d se obtiene:

$$d = v_0 \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$$

Problema 3 [0.5 punto]



La rotación de la barra OA está controlada por un "tornillo sin fin" que aplica una velocidad horizontal v al collarín C. Esto causa que el pin P se deslice por la ranura de la barra. Determine la velocidad angular $\dot{\theta}$ en función de h, x, y v.

Hint: Recuerde que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) = 1 + \tan^2 x$.

a) $\dot{\theta} = \dfrac{h\,v}{h^2 + x^2}$

b) $\dot{\theta} = \dfrac{x\,v}{h^2 + x^2}$

c) $\dot{\theta} = \dfrac{v}{\sqrt{h^2 + x^2}}$

d) $\dot{\theta} = \dfrac{x\,v}{h^2}$

e) $\dot{\theta} = \dfrac{h\,v}{x^2}$

Solución

El ángulo θ depende de x, por lo que utilizando la regla de la cadena se tiene que:

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)(v)$$

Utilizando la geometría del problema se tiene que:

$$x = h\,\tan(\theta)$$

, y con ello:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = h\left[1 + \tan^2(\theta)\right] = h\left(1 + \frac{x^2}{h^2}\right) = \frac{h^2 + x^2}{h}$$

Reemplazando en la expresión de la velocidad angular:

$$\dot{\theta} = \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right)(v) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^{-1}(v) = \frac{h\,v}{h^2 + x^2}$$

Solución alternativa: De la geometría del problema se tiene que:

$$r = \sqrt{h^2 + x^2} \quad \longrightarrow \quad \dot{r} = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}\,\dot{x} = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}\,v$$

, donde r es la distancia entre O y P. Utilizando coordenadas polares se obtiene la velocidad:

$$\mathbf{v} = \frac{x\,v}{\sqrt{h^2 + x^2}}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \sqrt{h^2 + x^2}\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

La rapidez (módulo de la velocidad) es igual en cualquier sistema coordenado. Como el collarín se mueve horizontalmente con rapidez (módulo) v, y este debe ser igual al módulo del vector de velocidad, se tiene que:

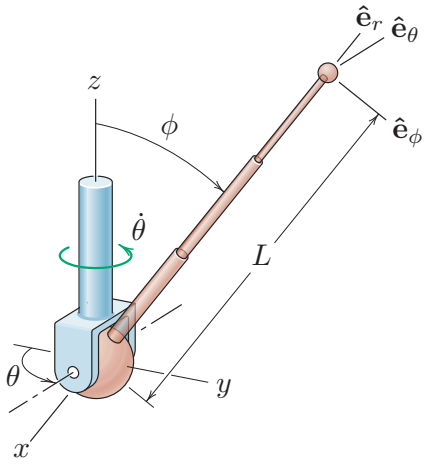
$$v^2 = \frac{x^2\,v^2}{h^2 + x^2} + (h^2 + x^2)\left(\dot{\theta}\right)^2$$

Despejando θ de la expresión anterior:

$$\frac{h^2\,v^2}{h^2 + x^2} = (h^2 + x^2)\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$\dot{\theta} = \frac{h\,v}{h^2 + x^2}$$

Problema 4 [0.5 punto]



Un actuador telescópico para una antena que será usada en un satélite debe ser puesto a prueba. La prueba somete la antena a un movimiento fluido de alta velocidad. En cierto instante, la antena se ha extendido hasta $L = \frac{5}{4}\,\text{m}$ y tiene ángulos $\theta = \frac{\pi}{5}\,\text{rad}$ y $\phi = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}$; y se mueve con velocidades constantes $\dot{L} = \frac{1}{2}\,\text{m/s}$, $\dot{\theta} = 2\,\text{rad/s}$, y $\dot{\phi} = 1\,\text{rad/s}$. Determine el vector de aceleración del extremo de la antena según los ejes que se muestran en la figura.

a) $\ddot{\mathbf{u}} = \left(-\frac{15}{4}\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \left(-\frac{3}{2}\right)\hat{\mathbf{e}}_\phi \quad [\text{m/s}]$

b) $\ddot{\mathbf{u}} = \left(-\frac{15}{4}\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \left(\frac{3}{2}\right)\hat{\mathbf{e}}_\phi \quad [\text{m/s}]$

c) $\ddot{\mathbf{u}} = \left(-\frac{5}{4}\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \left(\frac{3}{2}\right)\hat{\mathbf{e}}_\phi \quad [\text{m/s}]$

d) $\ddot{\mathbf{u}} = \left(\frac{5}{4}\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \left(\frac{3}{2}\right)\hat{\mathbf{e}}_\phi \quad [\text{m/s}]$

e) $\ddot{\mathbf{u}} = \left(-\frac{5}{4}\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \left(-\frac{3}{2}\right)\hat{\mathbf{e}}_\phi \quad [\text{m/s}]$

Solución

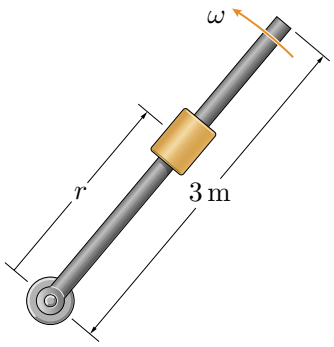
En este caso se tiene un sistema coordenado esférico, donde:

$$\begin{aligned} r &= \frac{5}{4}\,\text{m} & \theta &= \frac{\pi}{5}\,\text{rad} & \phi &= \frac{\pi}{4}\,\text{rad} \\ \dot{r} &= \frac{1}{2}\,\text{m/s} & \dot{\theta} &= 2\,\text{rad/s} & \dot{\phi} &= 1\,\text{rad/s} \\ \dot{r} &= 0 & \dot{\theta} &= 0 & \dot{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

En este caso tenemos que ϕ es el ángulo polar, y con ello:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}} = &\left(\ddot{r} - r\,\dot{\phi}^2 - r\,\dot{\theta}^2\,\sin^2\phi\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \\ &+ \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\sin\phi + r\,\ddot{\theta}\,\sin\phi + 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}\,\cos\phi\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \\ &+ \left(2\,\dot{r}\,\dot{\phi} + r\,\ddot{\phi} - r\,\dot{\theta}^2\,\sin\phi\,\cos\phi\right)\hat{\mathbf{e}}_\phi \\ \ddot{\mathbf{u}} = &\left[0 - \left(\frac{5}{4}\right)(1)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)(2)^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \\ &+ \left[(2)\left(\frac{1}{2}\right)(2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{5}{4}\right)(0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (2)\left(\frac{5}{4}\right)(2)(1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta + \\ &+ \left[(2)\left(\frac{1}{2}\right)(1) + \left(\frac{5}{4}\right)(0) - \left(\frac{5}{4}\right)(2)^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_\phi \\ \ddot{\mathbf{u}} = &\left(-\frac{15}{4}\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \left(-\frac{3}{2}\right)\hat{\mathbf{e}}_\phi \quad [\text{m/s}] \end{aligned}$$

Problema 5 [0.5 punto]



Una barra de superficie suave rota con velocidad angular constante $\omega = 2\,\pi$ $^{\text{rad}}/_{\text{s}}$ en un plano horizontal (la gravedad actúa fuera del plano). En la barra desliza libremente un collarín sin roce de masa $m = 1\,\text{kg}$. Se sabe que la componente radial de la velocidad del collarín es $v_r = 10\,^{\text{m}}/_{\text{s}}$ cuando $r = 1\,\text{m}$. Determine la componente radial de la velocidad del collarín cuando $r = 2\,\text{m}$.

a) $v_r = \sqrt{12\,\pi^2 + 100}$ $^{\text{m}}/_{\text{s}}$

b) Faltan datos.

c) $v_r = 10$ $^{\text{m}}/_{\text{s}}$

d) $v_r = 20$ $^{\text{m}}/_{\text{s}}$

e) $v_r = \sqrt{16\,\pi^2 + 100}$ $^{\text{m}}/_{\text{s}}$

Solución

En este caso se tiene que:

$$\sum \mathbf{f} = \ddot{\mathbf{u}}$$
$$0\,\hat{\mathbf{e}}_r + f_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Notar que no hay fuerzas (u objetos) en el sentido radial que produzcan aceleración. En este caso, utilizando sólo la ecuación radial se tiene la siguiente EDO:

$$\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 = 0$$
$$\ddot{r} = r\,\omega^2$$

Es decir, se tiene una expresión para la aceleración radial en función de la posición radial. En este caso se puede utilizar la expresión $a\,\mathrm{d}u = v\,\mathrm{d}v$, y con ello:

$$\left(r\,\omega^2\right)\,\mathrm{d}r = v\,\mathrm{d}v$$
$$\frac{r^2}{2}\,(2\,\pi)^2 + C_1 = \frac{v^2}{2}$$
$$v_r = \sqrt{(2\,\pi\,r)^2 + C_1}$$

Utilizando la condición $v_r = 10$ cuando $r = 1$ se tiene que:

$$10 = \sqrt{4\,\pi^2 + C_1}$$
$$C_1 = 100 - 4\,\pi^2$$

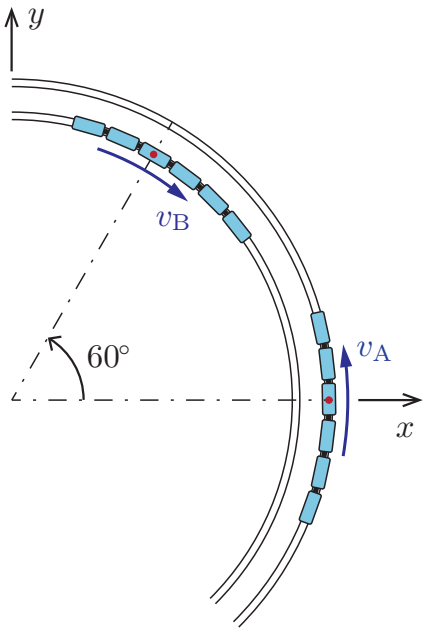
, y con ello:

$$v_r = \sqrt{(2\,\pi\,r)^2 + 100 - 4\,\pi^2}$$

Finalmente, evaluando en $r = 2\,\text{m}$, se obtiene:

$$v_r(r=2) = \sqrt{16\,\pi^2 + 100 - 4\,\pi^2} = \sqrt{12\,\pi^2 + 100}\ ^{\text{m}}/_{\text{s}}$$

Problema 6 [0.5 punto]



Dos trenes circulan por una curva circular: el tren A describe un círculo de radio r_A; mientras que el tren B lo hace con radio r_B. Ambos trenes circulan con rapidez constante: el tren A en sentido anti-horario con rapidez v_A; mientras que el tren B lo hace en sentido horario con rapidez v_B. Determine la aceleración (vector) del tren B para un observador en el tren A.

a) $\ddot{\mathbf{u}} = \left(-\frac{v_B^2}{2\,r_B} + \frac{v_A^2}{r_A}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(-\frac{\sqrt{3}\,v_B^2}{2\,r_B}\right)\hat{\mathbf{j}}$

b) $\ddot{\mathbf{u}} = \left(\frac{v_B^2}{2\,r_B} - \frac{v_A^2}{r_A}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(-\frac{\sqrt{3}\,v_B^2}{2\,r_B}\right)\hat{\mathbf{j}}$

c) $\ddot{\mathbf{u}} = \left(-\frac{v_B^2}{r_B} + \frac{v_A^2}{r_A}\right)\hat{\mathbf{i}}$

d) $\ddot{\mathbf{u}} = \left(\frac{v_B^2}{r_B} - \frac{v_A^2}{r_A}\right)\hat{\mathbf{i}}$

e) $\ddot{\mathbf{u}} = \left(\frac{v_B^2}{2\,r_B} - \frac{v_A^2}{r_A}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\sqrt{3}\,v_B^2}{2\,r_B}\right)\hat{\mathbf{j}}$

Solución

Los trenes A y B aceleran pese a moverse con rapidez constante ya que están en una trayectoria curva, específicamente circular. Es decir:

$$\ddot{\mathbf{u}}_A = \left(-r_A\,\dot{\theta}_A^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r = \left(-\frac{v_A^2}{r_A}\right)\hat{\mathbf{e}}_r$$
$$\ddot{\mathbf{u}}_B = \left(-r_B\,\dot{\theta}_B^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r = \left(-\frac{v_B^2}{r_B}\right)\hat{\mathbf{e}}_r$$

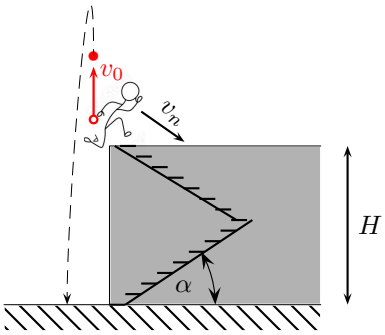
, donde es importante recordar que los ejes $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ se mueven con las partículas. Es decir, el eje $\hat{\mathbf{e}}_r$ del tren A no es el mismo que $\hat{\mathbf{e}}_r$ del tren B. Transformando ambas aceleraciones al sistema cartesiano que es común a ambos, se tiene:

$$\ddot{\mathbf{u}}_A = \left(-\frac{v_A^2}{r_A}\right)\hat{\mathbf{e}}_r = \left(-\frac{v_A^2}{r_A}\right)\left(1\,\hat{\mathbf{i}} + 0\,\hat{\mathbf{j}}\right) = \left(-\frac{v_A^2}{r_A}\right)\hat{\mathbf{i}}$$
$$\ddot{\mathbf{u}}_B = \left(-\frac{v_B^2}{r_B}\right)\hat{\mathbf{e}}_r = \left(-\frac{v_B^2}{r_B}\right)\left(\cos 60^\circ\,\hat{\mathbf{i}} + \sin 60^\circ\,\hat{\mathbf{j}}\right) = \left(-\frac{v_B^2}{2\,r_B}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(-\frac{\sqrt{3}\,v_B^2}{2\,r_B}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

Finalmente, utilizando la ecuación de movimiento relativo:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{B/A} = \ddot{\mathbf{u}}_B - \ddot{\mathbf{u}}_A = \left(-\frac{v_B^2}{2\,r_B} + \frac{v_A^2}{r_A}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(-\frac{\sqrt{3}\,v_B^2}{2\,r_B}\right)\hat{\mathbf{j}}$$

Problema 7 [0.5 punto]



Un niño lanza una pelota desde el segundo piso de su casa en dirección perfectamente vertical a una velocidad inicial v_0. Su objetivo es llegar a la planta inferior exactamente al mismo tiempo que la pelota, para lo cual debe descender una escalera de dos tramos idénticos según se presenta en la figura. Determine la rapidez v_n con la que el niño debe descender la escalera para cumplir su objetivo.

a) $v_n = \dfrac{H\,g}{\sin\alpha\left(\sqrt{v_0^2+2gH}+v_0\right)}$

b) $v_n = \dfrac{H\,g}{\cos\alpha\left(\sqrt{v_0^2+2gH}+v_0\right)}$

c) $v_n = \dfrac{H\,g}{\sin\alpha\left(\sqrt{v_0^2+2gH}-v_0\right)}$

d) $v_n = \dfrac{H\,g}{\cos\alpha\left(\sqrt{v_0^2+2gH}-v_0\right)}$

e) No se puede determinar sin conocer la masa de la pelota

Solución

Tomando como referencia $z=0$ en el primer piso y considerando las condiciones iniciales $\dot{z}(t=0)=v_0$ y $z(t=0)=H$ se obtiene que la ecuación del movimiento resulta:

$$z(t) = -\frac{g\,t^2}{2} + v_0\,t + H$$

La pelota llega al piso a un instante t^* tal que

$$0 = -\frac{g\,t^{*2}}{2} + v_0\,t^* + H \qquad \rightarrow \qquad t^* = \frac{v_0}{g} \mp \frac{\sqrt{v_0^2+2gH}}{g}$$

Naturalmente interesa la solución positiva. Por trigonometría, la distancia a recorrer por el niño es $2L$, con L el largo de la escalera:

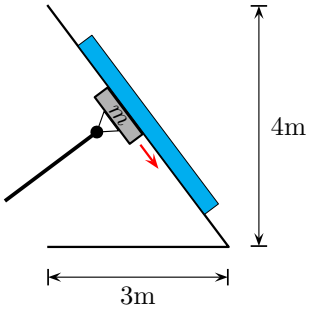
$$\sin\alpha = \frac{H/2}{L} \qquad \rightarrow \qquad 2\,L = \frac{H}{\sin\alpha}$$

Finalmente, dividiendo la distancia por el tiempo se obtiene el valor de v_n:

$$v_n = \frac{\frac{H}{\sin\alpha}\,g}{v_0+\sqrt{v_0^2+2gH}}$$

Problema 8 [0.5 punto]

Suponga que está limpiando un vidrio de una mansarda con un escobillón de masa m de forma que la fuerza ejercida por el mango es perfectamente perpendicular a la superficie del vidrio. La masa del mango es despreciable. Asuma que el escobillón se desliza a velocidad constante y que el coeficiente de fricción dinámico entre el escobillón y el vidrio es de $\frac{1}{4}$. Obtenga la fuerza que deberá ejercer con el mango sobre el escobillón.



a) $\frac{19}{5}\,mg$

b) $\frac{3}{5}\,mg$

c) $\frac{16}{5}\,mg$

d) $\frac{4}{5}\,mg$

e) $\frac{12}{5}\,mg$

Solución

Sea F la fuerza ejercida con el escobillón. Ya que el escobillón se mueve a velocidad constante, la aceleración tiene que ser nula. Sea θ el ángulo del vidrio respecto a la horizontal. Tomando equilibrio en la dirección tangencial:

$$F_R - mg\sin\theta = 0$$

donde F_R es la fuerza de roce. Ya que la fuerza de fricción dinámica es proporcional a la fuerza normal N y el coeficiente de roce, entonces

$$\mu N = mg\sin\theta \qquad \rightarrow \qquad N = \frac{mg\sin\theta}{\mu}$$

El sistema también debe estar en equilibrio en sentido normal al vidrio, entonces:

$$mg\cos\theta + N - F = 0$$

Luego:

$$F = mg\left(\cos\theta + \frac{\sin\theta}{\mu}\right) = mg\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5\frac{1}{4}}\right) = \frac{19}{5}mg$$

Problema de Desarrollo [2 puntos]

Un talud en suelo puede fallar producto de un sismo. Como primera aproximación podemos suponer que la superficie de falla que guía a la cuña de suelo que desliza se puede aproximar a un plano de pendiente θ, lo que se denomina *ruptura plana* (Figura 1(a)). Para calcular los desplazamientos asociados a un sismo particular, el Profesor Newmark (1910-1981) propuso una analogía consistente en un bloque rígido que desliza sobre el plano de pendiente θ y que posee una masa m equivalente a la cuña de suelo que desliza del talud. En esta analogía, existe una fricción entre el bloque y el plano de deslizamiento caracterizado por un ángulo de fricción μ, mientras que la acción sísmica se representa por una fuerza $f_s(t)$ en la dirección de deslizamiento del bloque (Figura 1(b)).

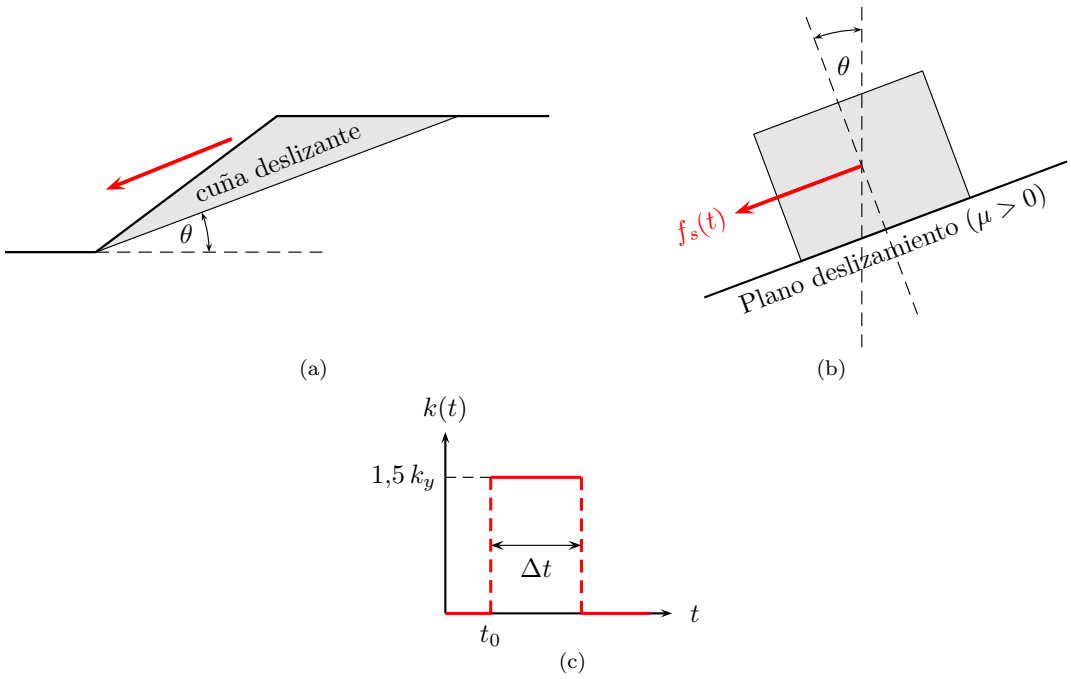


Figura 1: Falla sísmica de un talud: **(a)** Ruptura plana; **(b)** Analogía del bloque rígido de Newmark y **(c)** Idealización de sismo

- Asumiendo que la acción del sismo se puede representar como

$$f_s(t) = k(t)\, W$$

donde $k(t)$ es el denominado coeficiente sísmico y W el peso de la cuña, obtenga una expresión para el valor mínimo de $k(t)$ que iniciará el movimiento.

- Denominaremos al resultado del punto anterior como k_y. Suponga que el sismo se puede representar en forma simplificada como un pulso de amplitud $1{,}5\, k_y$ y duración Δt tal como se presenta en la Figura 1(c). Determine el instante para el cual el bloque se detiene.

Solución

- Ya que hay roce, sobre el plano de deslizamiento toma lugar una fuerza de roce $F_r = \mu\, N$ que se opone a la dirección del movimiento (de derecha a izquierda en la figura). Para calcular la normal N, basta con tomar equilibrio en la dirección perpendicular al plano de deslizamiento

con lo que se obtiene:

$$N = W\ \cos\theta$$

Luego, tomando equilibrio en la dirección del deslizamiento resulta:

$$f_s(t) + W\sin\theta - \mu W\cos\theta = m\ddot{u}$$

Reemplazando el peso W por $m\,g$ y considerando la expresión proporcionada para $f_s(t)$ se obtiene

$$k(t) - (\mu\cos\theta - \sin\theta) = \frac{\ddot{u}}{g}$$

El movimiento se iniciará cuando la aceleración sea positiva, es decir

$$k(t) - (\mu\cos\theta - \sin\theta) > 0 \qquad \rightarrow \qquad k(t) > \mu\cos\theta - \sin\theta$$

- Del ítem anterior, se tiene que el valor de k_y es:

$$k_y = \mu\ \cos\theta - \sin\theta$$

El movimiento se iniciará cuando $k(t) > k_y$, lo que ocurre en este caso para $t > t_0$ donde la aceleración se obtiene de la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton:

$$\begin{aligned}
k(t)\,W + W\ \sin\theta - \mu\,W\ \cos\theta &= m\,\ddot{u}\\
1{,}5\,k_y\,W + W\ \sin\theta - \mu\,W\ \cos\theta &= m\,\ddot{u}\\
(1{,}5)(\mu\ \cos\theta - \sin\theta)\,W + W\ \sin\theta - \mu\,W\ \cos\theta &= m\,\ddot{u}\\
(0{,}5)(W)(\mu\ \cos\theta - \sin\theta) &= m\,\ddot{u}\\
0{,}5\,g\,k_y &= \ddot{u}
\end{aligned}$$

Terminado el sismo ($t > t_0 + \Delta t$), la aceleración del bloque es:

$$\begin{aligned}
W\ \sin\theta - \mu\,W\ \cos\theta &= m\,\ddot{u}\\
-(W)(\mu\ \cos\theta - \sin\theta) &= m\,\ddot{u}\\
-g\,k_y &= \ddot{u}
\end{aligned}$$

, por lo tanto el sistema de desacelera hasta detenerse. Luego, la velocidad se obtiene integrando la aceleración del sistema hasta un tiempo t:

$$\dot{u}(t) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} 0{,}5\,k_y\,g\,\mathrm{d}t + \int_{t_0+\Delta t}^{t} -k_y\,g\,\mathrm{d}t = 0{,}5\,k_y\,g\,\Delta t - k_y\,g\,(t - t_0 - \Delta t)$$

El bloque se detiene cuando la velocidad se anula, entonces:

$$0{,}5\,k_y\,g\,\Delta t - k_y\,g\,(t - t_0 - \Delta t) = 0 \qquad \rightarrow \qquad t = t_0 + 1{,}5\,\Delta t$$