Capítulo 5

Vibración & Osciladores

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Las vibraciones son de especial importancia en ingeniería sísmica (estructural), mecánica, acústica, y eléctrica. A modo de ejemplo, la respuesta (desplazamiento) en el tiempo de un edificio sometido a las cargas de un terremoto se analiza con vibraciones.

5.0.1. Vibración libre sin amortiguamiento



Figura 5.1: Sistema masa–resorte: **(a)** un carro de masa m conectado a un resorte horizontal de rigidez k constituye un sistema masa–resorte; y **(b)** diagrama de cuerpo libre del sistema masa–resorte suponiendo un estiramiento x del resorte.

Consideremos un sistema masa–resorte como muestra la Figura 5.1(a). El DCL de la masa se muestra en la Figura 5.1(b), donde se asume un estiramiento del resorte x. En la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ sólo actúa la fuerza $f_e = -kx\,\hat{\mathbf{x}}$, donde se ha asumido que el resorte es de tipo lineal-elástico (e ideal). Utilizando la 2^{da} ley de Newton en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ (movimiento rectilíneo) se obtiene:

$$\sum f_x = m\,\ddot{x}$$
$$-k\,x = m\,\ddot{x}$$

Es decir, la *ecuación del movimiento* del sistema es la ecuación diferencial:

$$m\,\ddot{x} + k\,x = 0 \tag{5.1}$$

, que corresponde a un *oscilador armónico simple*. Es conveniente reescribir la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$\ddot{x} + \omega_n^2\,x = 0 \tag{5.2}$$

, donde $\omega_n = \sqrt{k/m} =$ es la *frecuencia natural circular*, la cual tiene unidades de $^{\text{rad}}/_{\text{s}}$.

La solución de la EDO en la Ecuación (5.2) es:

$$\boxed{x\left(t\right) = A\,\cos\left(\omega_n\,t\right) + B\,\sin\left(\omega_n\,t\right)} \tag{5.3}$$

, donde A y B se determinan utilizando las condiciones iniciales del oscilador. Es decir:

$$A = x_0 \qquad\qquad B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \tag{5.4}$$

Se puede verificar fácilmente que la Ecuación (5.3) es en efecto la solución de la EDO de la Ecuación (5.2). Si derivamos la solución dos veces se obtiene:

$$\dot{x} = -A\,\omega_n\,\sin\left(\omega_n\,t\right) + B\,\omega_n\,\cos\left(\omega_n\,t\right)$$
$$\ddot{x} = -A\,\omega_n^2\,\cos\left(\omega_n\,t\right) - B\,\omega_n^2\,\sin\left(\omega_n\,t\right)$$

Reemplazando en la EDO, se comprueba que efectivamente satisface la ecuación:

$$\ddot{x} + \omega_n^2\,x \stackrel{?}{=} 0$$
$$-A\,\omega_n^2\,\cos\left(\omega_n\,t\right) - B\,\omega_n^2\,\sin\left(\omega_n\,t\right) + \omega_n^2\,\left[A\,\cos\left(\omega_n\,t\right) + B\,\sin\left(\omega_n\,t\right)\right] = 0$$
$$0 = 0$$

Utilizando identidades trigonométricas, la solución de la Ecuación (5.3) se puede reescribir como:

$$x\left(t\right) = C\,\sin\left(\omega_n\,t + \psi\right) \tag{5.5}$$

, donde C es la *amplitud* de la oscilación, y ψ es el *ángulo de fase*. Esta ecuación es también una solución de la EDO de la Ecuación (5.2), y cuyas constantes son:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \qquad \psi = \operatorname{atan}\left(\frac{A}{B}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{x_0\,\omega_n}{\dot{x}_0}\right) \tag{5.6}$$

En vibraciones (mecánicas, eléctricas, óptica, y acústica) se suele utilizar un *fasor*[1] para analizar y representar gráficamente una oscilación. Su análisis se basa en una representación compleja de la oscilación a través de la ecuación de Euler; algo que escapa el contenido de este curso. No obstante, nos permite visualizar gráficamente los parámetros de un oscilador. La Figura 5.2 muestra un fasor, que consiste en un vector que rota con rapidez ω_n. Al respecto se puede ver:

a) El largo del vector giratorio es la amplitud de la oscilación C.

b) El vector gira con rapidez ω_n.

c) Inicialmente ($t = 0$) el fasor se encuentra en la posición del ángulo de fase ψ.

d) La amplitud de la oscilación se registra en uno de los ejes coordenados del vector giratorio versus el eje tiempo t.

e) La posición inicial x_0 corresponde a la intersección con el eje x cuando $t = 0$, y corresponde a $x_0 = C\,\sin\psi$.

f) La velocidad inicial $\dot{x}_0$ corresponde a la pendiente inicial de la oscilación, y corresponde a $\dot{x}_0 = C\,\omega_n\,\cos\psi$.

g) La duración de una oscilación completa corresponde a T_n.

h) El número de oscilaciones que ocurren durante $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ corresponde a f_n (no mostrado en la Figura).

[1] En inglés *phasor*.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

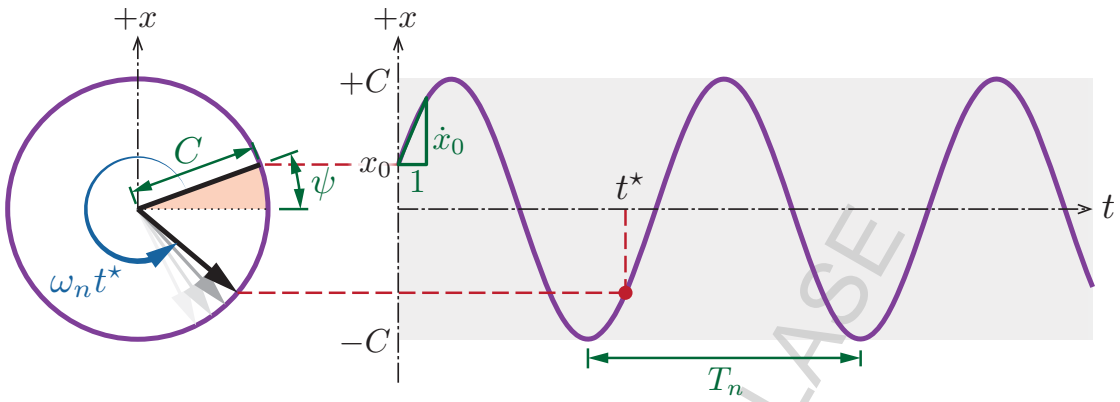


Figura 5.2: Fasor; que constituye una representación gráfica para una oscilación. La oscilación se suele estudiar en su forma compleja, lo que ofrece ventajas para su análisis.

Esto tiene relación con la corriente de hogar, también conocida como *monofásica*, la que tiene 1 sólo oscilador en su polaridad. En cambio, la corriente industrial, también conocida como *trifásica*, tiene 3 osciladores. En la corriente trifásica cada fasor está a 120° uno del otro (distintos valores de ψ).

5.0.2. Péndulos

En las secciones anteriores determinamos que la ecuación diferencial para obtener la posición de un péndulo es:

$$m\ell\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \tag{5.7}$$

La serie de Taylor para el seno es:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$$

Si las oscilaciones son pequeñas, entonces $\theta^3 \approx 0$ y con ello $\sin\theta \approx \theta$. Es decir, un péndulo cuyas oscilaciones son pequeñas está gobernado por:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0} \tag{5.8}$$

, que es la ecuación de un oscilador armónimo simple con $\omega_n = \sqrt{g/\ell}$.

No está de más repetirlo: la Ecuación (5.8) es aproximada. Tratar un péndulo como un oscilador armónico es bastante preciso en la medida en que las oscilaciones sean pequeñas.

5.0.3. Posición de equilibrio con fuerzas estáticas

El caso de un oscilador con cargas estáticas no difiere mucho del caso estándar. La Figura 5.3 muestra un resorte de longitud natural ℓ_0 que se encuentra inicialmente en reposo. Si al resorte se le cuelga una masa m, la fuerza elástica y de gravedad estarán en equilibrio (estático) con el resorte estirado δ_{st}:

$$\sum f_z = f_e - mg = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \delta_{st} = \frac{mg}{k}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Es decir, si el oscilador se ubica en la posición $z_a = \delta_{st}$ y se suelta, el mismo se mantendrá quieto ya que $\sum f = m\,a = 0$ (el sistema no acelera). Esto corresponde a la *posición de equilibrio del oscilador*: el punto en el cual el oscilador se quedará quieto si no es perturbado.

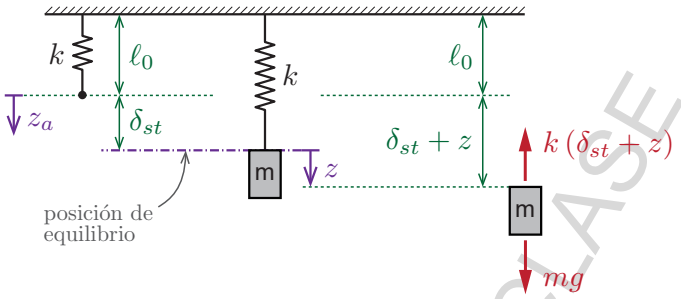


Figura 5.3: Oscilador con carga estática producto de la gravedad. La coordenada z_a se mide desde la posición de reposo del resorte, mientras que z se mide desde la nueva posición de equilibrio es $z_a = \delta_{st} = {}^{mg}/_{k}$.

> Siempre existirán fuentes de roce y pérdidas de energía, por lo que todo oscilador eventualmente se detendrá. La posición en la que se detiene el oscilador una vez que haya transcurrido suficiente tiempo es también la *posición de equilibrio*.
>
> Los osciladores sobre-amortiguados son una excepción de esto. Los osciladores amortiguados serán estudiados en detalle en las siguientes secciones.

Volviendo al ejemplo de las Figura 5.3; definiremos una nueva coordenada z desde la posición de equilibrio. La masa se cuelga en $t = 0$, instante en el cual el oscilador se encuentra en $z_0 = -\delta_{st}$ (en coordenada absoluta corresponde a $z_a = 0$). La masa comenzará a oscilar debido a que se encuentra con posición inicial distinta de cero. La misma Figura 5.3 muestra el DCL de la masa en una posición perturbada (fuera de su posición de equilibrio). Utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton, y considerando el eje $+z$ hacia abajo:

$$-f_e + mg = m\,\ddot{z}$$
$$-k\,(\delta_{st} + z) + mg = m\,\ddot{z}$$

Sabemos que $\delta_{st} = {}^{mg}/_{k}$, que reemplazado en la ecuación anterior resulta:

$$-k\left(\frac{mg}{k} + z\right) + mg = m\,\ddot{z}$$
$$m\,\ddot{z} + k\,z = 0 \tag{5.9}$$

Es decir, la aplicación de una carga estática no cambia la naturaleza del oscilador, sino que sólo redefine su posición de equilibrio.

La aplicación de una fuerza estática, que en este caso se produce al "colgar" una masa del resorte, resulta en un oscilador cuya posición en el tiempo es:

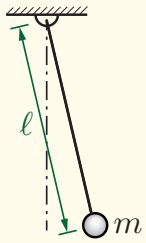
$$z_a\,(t) = \delta_{st} + z(t) \tag{5.10}$$

Es decir, la posición es $z(t)$ que corresponde al oscilador ignorando la carga estática, a lo que se le suma una deformación producto de la carga estática. La solución de $z(t)$ se puede obtener con la Ecuación (5.3).

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

Determine la longitud ℓ que debe tener un péndulo de oscilaciones pequeñas (θ pequeño) para que su periodo sea de 2 s.



$$T_n = 2\,\text{s} \qquad \longrightarrow \qquad f_n = \frac{1}{2} = 0{,}5\,\text{Hz}$$
$$\omega_n = 2\pi\, f_n = \pi\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$$

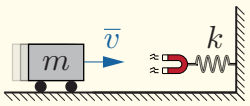
Sabemos que en un péndulo de oscilaciones pequeñas se cumple que $\sin\theta \approx \theta$, y con ello también:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$
$$\omega_n^2 = \pi^2 = \frac{g}{\ell}$$
$$\ell = \frac{g}{\pi^2} = 0{,}994\,\text{m}$$

Es decir, el péndulo (de oscilaciones pequeñas) debe tener un largo $\ell = 0{,}994\,\text{m}$ para que cada oscilación tarde $T_n = 2\,\text{s}$.

Ejemplo

Un carro de masa m viaja con velocidad $\overline{v}$ hacia un resorte con un imán en su extremo. En el instante $t = 0$ el imán se adhiere al carro. Se pide determinar:



a) La compresión máxima del resorte.

b) El tiempo que tarda el resorte en regresar a su longitud inicial (longitud natural) luego del choque.

c) La velocidad en $t = {}^{2\pi}/_{3}\,\text{s}$ si se tiene que $k = 160\,{}^{\text{N}}/_{\text{m}}$, $m = 2{,}5\,\text{kg}$, y $\overline{v} = 6\sqrt{3}\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}}$.

Sabemos que en $t = 0$ la masa hace contacto con el imán y el oscilador (sistema masa–resorte) tendrá como condiciones iniciales:

$$x_0 = 0 \qquad\qquad \dot{x}_0 = \overline{v}$$

, y con ello las constantes de la ecuación de movimiento del oscilador son:

$$A = x_0 = 0 \qquad\qquad B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} = \frac{\overline{v}}{\omega_n}$$

, con $\omega_n = \sqrt{{}^{k}/_{m}}$. Es decir, la ecuación del oscilador es:

$$x(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$
$$x(t) = \frac{\overline{v}}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

La amplitud del oscilador es:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\overline{v}}{\omega_n}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

, con lo que la compresion máxima del resorte es justamente:

$$\delta_{\max} = C = \overline{v}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La masa hace una oscilación completa en T_n, por lo que regresa a su largo inicial en:

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega_n}\right) = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La ecuación que describe la velocidad del sistema es:

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \overline{v}\,\cos\left(\omega_n\, t\right)$$

Por otro lado, si $k = 160\,{}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m}}$ y $m = 2{,}5\,\mathrm{kg}$ la frecuencia natural circular del sistema es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{160}{2{,}5}} = \sqrt{64} = 8\,{}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}}$$

Finalmente, la velocidad en $t = {}^{2\pi}/_{3}\,\mathrm{s}$ es:

$$\dot{x}\left(t = \frac{2\pi}{3}\right) = \overline{v}\,\cos\left(\omega_n\,\frac{2\pi}{3}\right) = 6\sqrt{3}\,\cos\left(8\,\frac{2\pi}{3}\right) = 6\sqrt{3}\,\cos\left(\frac{4\pi}{3} + 4\pi\right)$$
$$\dot{x}\left(t = \frac{2\pi}{3}\right) = \left(6\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -3\sqrt{3}\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$$

5.1. Vibración libre amortiguada

> La vibración amortiguada no es parte del contenido estándar del curso y no será evaluado. Se ha decidido incluir aquí debido a su relevancia en varias ramas de la ingeniería.

Todos los sistemas mecánicos disipan energía producto del roce. Debido a ello, las oscilaciones decaen en el tiempo. Adicionalmente, se puede instalar un amortiguador para limitar la vibración y hacer que la amplitud de la oscilación decaiga más rápido.



Figura 5.4: Sistema masa–resorte–amortiguador: **(a)** un carro de masa m conectado a un resorte y amortiguador de constantes k y c, respectivamente; y **(b)** diagrama de cuerpo libre del sistema masa–resorte–amortiguador suponiendo un estiramiento x del resorte y una velocidad $\dot{x}$.

La Figura 5.4(a) muestra un sistema masa–amortiguador–resorte, cuyo DCL se muestra en la

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Figura 5.4(b). Utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton se obtiene:

$$\begin{aligned} -k\,x - c\,\dot{x} &= m\,\ddot{x} \\ m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x &= 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

La Ecuación (5.11) gobierna el movimiento de un oscilador amortiguado, pero su solución no es trivial. Dado un sistema con amortiguamiento c, podemos calcular la *razón de amortiguamiento* ζ como:

$$\zeta = \frac{c}{c_{\text{crit}}} = \frac{c}{2\,m\,\omega_n} \tag{5.12}$$

, donde $c_{\text{crit}} = 2\,m\,\omega_n$ es el *amortiguamiento crítico* del sistema con masa m y frecuencia natural circular ω_n.

La solución de la Ecuación (5.11) tiene tres posibles soluciones dependiendo del grado de amortiguamiento del sistema:

- **Sobre-amortiguado ($\zeta > 1$)**: no hay oscilación y $x \to 0$ para $t \to \infty$.

  $$x(t) = A_1\,e^{\lambda_1\,t} + A_2\,e^{\lambda_2\,t} \tag{5.13}$$

  , con $\lambda_1 = \omega_n\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$ y $\lambda_1 = \omega_n\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$. Un sistema sobre-amortiguado converge asintóticamente a su posición de equilibrio.

- **Amortiguamiento crítico ($\zeta = 1$)**: el sistema tiene el amortiguamiento mínimo para no oscilar.

  $$x(t) = (A_1 + A_2\,t)\,e^{-\omega_n t} \tag{5.14}$$

- **Sub-amortiguado ($\zeta < 1$)**: oscilaciones con amplitud decreciente.

  $$x(t) = e^{-\zeta\,\omega_n\,t}\left[\,A_1\,\cos\left(\omega_d\,t\right) + A_2\,\sin\left(\omega_d\,t\right)\,\right] \tag{5.15}$$

  , donde el sistema vibra con la *frecuencia natural amortiguada* $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Es decir, el amortiguamiento ralentiza la vibración del sistema ya que $\omega_d < \omega_n$.

La Figura 5.5(a) muestra tres osciladores: sobre-amortiguado, amortiguado críticamente, y sub-amortiguado. Los tres osciladores tienen condición inicial $u_0 > 0$ y velocidad inicial nula (i.e. $v_0 = 0$). En la Figura se puede apreciar que:

a) El sistema sobre-amortiguado no oscila. Además, el mismo alcanzará su posición de equilibrio en $t \to \infty$.

b) El sistema con amortiguamiento crítico tampoco oscila. En teoría alcanza también la posición de equilibrio en $t \to \infty$, pero queda suficientemente cerca transcurrido un tiempo razonable.

c) El sistema sub-amortiguado tiene amplitud que decrece con $e^{-\zeta\omega_n t}$. El oscilador cruzará varias veces la posición de equilibrio y sólo se detendrá cuando $t \to \infty$.

La Figura 5.5(b) muestra el efecto que tiene el amortiguamiento para varios osciladores sub-amortiguados. Aplicaciones de osciladores sub-amortiguados se encuentran en cuerdas de guitarra, péndulos, edificios (sismos), y más.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

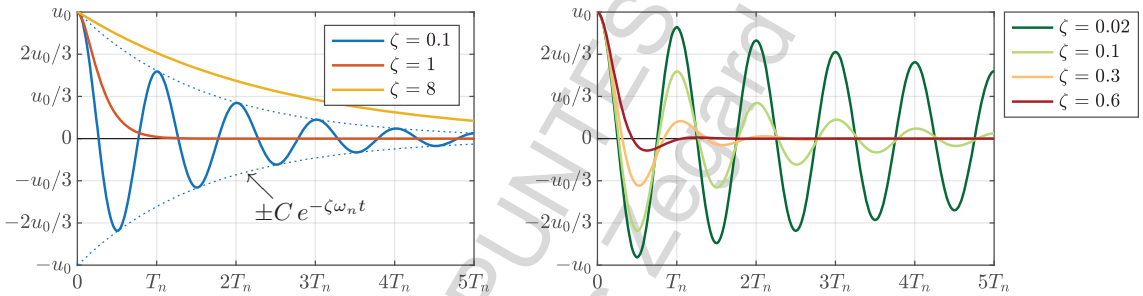


Figura 5.5: Posición en el tiempo $x(t)$ de varios osciladores: **(a)** evolución en el tiempo de un oscilador sub-amortiguado ($\zeta < 1$), amotiguado críticamente ($\zeta = 1$), y sobre-amortiguado ($\zeta > 1$); y **(b)** efectos del amortiguamiento en varios osciladores sub-amortiguados ($\zeta < 1$).

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard