Capítulo 2

Cinemática

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

2.1. Cinemática de una partícula

La cinemática es una rama de la dinámica que describe el movimiento de cuerpos sin considerar las fuerzas involucradas. En esta sección estudiaremos la cinemática para *partículas*; en capítulos futuros esto se extenderá a *cuerpos rígidos*[1].

Partícula Un cuerpo cuyas dimensiones son despreciables comparadas a la curvatura de su trayectoria. El movimiento de dicho cuerpo puede ser estudiado como el de un punto.

Coordenadas La posición de una partícula en función del tiempo $\mathbf{x}(t)$ puede ser descrita usando distintos sistemas coordenados. Los más comunes son:

a) Coordenadas rectangulares: x, y, z

b) Coordenadas cilíndricas‡: r, θ, z

c) Coordenadas esféricas: r, θ, ϕ

‡ Las coordenadas polares son el caso especial que ocurre cuando $z =$ constante.

Posición La ubicación de una partícula P en el tiempo queda completamente definida por su distancia $\mathbf{u}(t)$ a un punto de referencia fijo O (el origen del sistema coordenado).

Desplazamiento Cambio en la posición de la partícula. Transcurrido un tiempo Δt, la partícula se encuentra en la posición $\mathbf{u}(t + \Delta t)$. Es decir, el desplazamiento $\Delta\mathbf{u}$ es:

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t) \tag{2.1}$$

Tanto la posición $\mathbf{u}$ como el desplazamiento $\Delta\mathbf{u}$ son vectores. Un error común es confundir el desplazamiento con la distancia recorrida s (escalar positivo).

$$\text{posición}\mathbf{u} \neq \text{desplazamiento}\Delta\mathbf{u} \neq \text{distancia recorrida}s$$

[1] Los cuerpos deformables están fuera del alcance de este curso.

Velocidad La **velocidad promedio** en el intervalo Δt es:

$$\mathbf{v}_{\text{promedio}} = \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} \tag{2.2}$$

La **velocidad instantánea**, o velocidad en el instante t, se obtiene tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{u}} \tag{2.3}$$

Aceleración Es la variación de la velocidad en el tiempo:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\mathbf{u}} \tag{2.4}$$

La aceleración promedio no suele ser de utilidad en la solución de problemas, pero se puede calcular en caso de ser necesaria.

Rapidez Es la magnitud (o módulo) del vector de velocidad. Es decir, la rapidez es $v = |\mathbf{v}|$.

> Rapidez es el término más apropiado para llamar a la magnitud de la velocidad. No obstante, no es inusual que se use el término *magnitud de la velocidad*, o simplemente *velocidad*. En este último caso, el contexto debería ser lo suficientemente claro para distinguir entre velocidad (vector) o la magnitud de esta (escalar).
>
> Algo similar ocurre con la aceleración, excepto que no hay un término equivalente a *rapidez*. Lo más usual es *magnitud de la aceleración*, o *módulo* de la misma.

Además de los diferentes sistemas coordenados, el movimiento puede ser descrito de dos maneras:

a) Absoluto: sistema de referencia fijo

b) Relativo: con un sistema de referencia móvil

Inicialmente todo se hará desde el punto de vista de un sistema absoluto, lo que luego será extendido para el caso de *movimiento relativo*.

2.2. Movimiento rectilíneo (movimiento 1D)

El movimiento rectilíneo es aquel en que la posición de la partícula se puede expresar utilizando sólo 1 vector base. Es decir, en un movimiento rectilíneo la posición es:

$$\mathbf{u} = u_x \hat{\mathbf{i}}$$

El análisis de un movimiento rectilíneo se puede analizar operando únicamente sobre el escalar u_x. Esta conveniencia suele dar origen a confusiones: la posición es un vector y no un escalar, aunque en este caso tiene dimensión 1. Lo mismo ocurre con la velocidad $\dot{\mathbf{u}}$ y la aceleración $\ddot{\mathbf{u}}$; se pueden trabajar como escalares, pero sin olvidar que realmente son vectores.

La Figura 2.1(a) muestra una partícula en movimiento rectilíneo: inicialmente se encuentra en la posición P, pero transcurrido un intervalo de tiempo Δt la misma partícula se encuentra en la

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard



Figura 2.1: Movimiento rectilíneo de una partícula: **(a)** desplazamiento desde P a P'; y **(b)** desplazamiento de P a P', para luego regresar a P.

posición P'. El desplazamiento $\Delta\mathbf{u} = b\,\hat{\mathbf{i}}$ es un vector, donde b podría haber sido negativo si P' se encuentra más cerca del origen que P. La distancia recorrida (o trayecto) es un escalar siempre positivo, que en este caso es $s = b$.

Consideremos ahora que la partícula regresa a su posición inicial. Es decir, transcurrido otro Δt la partícula se encuentra en $P'' = P$, como muestra la Figura 2.1(b). En este caso $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (notar que $\mathbf{0} \neq 0$); mientras que la distancia recorrida es $s = 2b$.

La ecuación que rige la cinemática de un movimiento rectilíneo se puede escribir de forma escalar (por el hecho de ser 1D), y es:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= v \\ \tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= a \end{aligned}\right\} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\ddot{u} = \dot{v} = a} \tag{2.5}$$

Utilizando la *regla de la cadena*, se puede escribir una expresión alternativa para la aceleración:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}v$$

Es decir, cuando la aceleración o velocidad se entregan en función de la posición, i.e., $a\,(u)$ o $v\,(u)$, es conveniente usar:

$$\boxed{a\,\mathrm{d}u = v\,\mathrm{d}v} \tag{2.6}$$

2.2.1. Movimiento con aceleración constante

El movimiento con aceleración constante $\overline{\mathbf{a}}$ es un caso particular. Además de ser un caso frecuente, es de muy fácil análisis y solución.

El problema de aceleración constante (para un movimiento rectilíneo) es aquel de una partícula con aceleración $\overline{a}$, con velocidad y posición inicial v_0 y u_0, respectivamente. En el caso del movimiento rectilíneo podemos obviar que la posición, velocidad, y aceleración, están todas multiplicadas por $\hat{\mathbf{i}}$. Los datos del problema son:

$$\ddot{u}\,(t) = \overline{a} \qquad \text{con:} \quad \dot{u}\,(0) = v_0 \quad \text{y} \quad u\,(0) = u_0$$

Queremos obtener la posición de la partícula en todo instante t. Para ello, es necesario resolver la ecuación diferencial (de 2^{do} orden) y así obtener la posición $u\,(t)$:

$$\ddot{u} = \overline{a}$$
$$\text{usando separación de variables:} \quad \dot{u} = \int \ddot{u}\,\mathrm{d}t = \overline{a}\,t + C_1$$
$$\text{usando separación de variables:} \quad u = \int \dot{u}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\overline{a}\,t^2 + C_1\,t + C_2$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Utilizando las condiciones iniciales se puede determinar los valores de C_1 y C_2:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{u}_0 = (\overline{a})\,(0) + C_1 \\ u_0 = \frac{1}{2}\,(\overline{a})\,(0)^2 + (C_1)\,(0) + C_2 \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad C_1 = \dot{u}_0 \quad \text{y} \quad C_2 = u_0$$

Es decir, la posición de una partícula sometida a aceleración constante es:

$$\boxed{u\,(t) = \frac{1}{2}\,\overline{a}\,t^2 + v_0\,t + u_0} \tag{2.7}$$

, mientras que su velocidad es:

$$\boxed{v\,(t) = \overline{a}\,t + v_0} \tag{2.8}$$

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) bastan para resolver cualquier problema con aceleración constante. No obstante, se puede desarrollar una expresión adicional que facilita la solución de algunos problemas. Para ello, utilizaremos la EDO de la Ecuación (2.6) con aceleración constante $\overline{a}$:

$$a\,\mathrm{d}u = v\,\mathrm{d}v$$
$$\int_{u_0}^{u} \overline{a}\,\mathrm{d}u = \int_{v_0}^{v} v\,\mathrm{d}v$$

, con lo que se obtiene una expresión para la velocidad en función de la posición:

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2\,\overline{a}\,(u - u_0)} \tag{2.9}$$

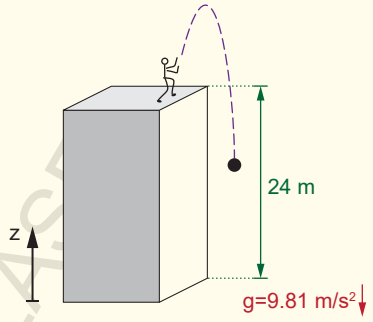
> Las expresiones de las Ecuaciones (2.7) y (2.8) son comúnmente estudiadas en educación media. La familiaridad y simpleza de estas suele dar confianza excesiva al usuario sin realmente comprender los límites de su aplicación: sólo se aplica al movimiento rectilíneo (1D) de una partícula con aceleración constante. No es inusual verla aplicada en situaciones en que la aceleración no es constante: grave error.

> La solución obtenida en la Ecuación (2.7) sugiere que las constantes de integración C_1 y C_2 siempre corresponden a la velocidad y desplazamiento inicial, respectivamente. La verdad es que esto es cierto sólo para el caso en que $\ddot{u}$ es una expresión polinomial de t.
>
> La misma explicación sirve para comprender el significado físico de esas constantes. En el caso particular en que $\ddot{u}$ es una expresión polinomial de t, las constantes C_1 y C_2 tendrán unidades de velocidad y desplazamiento, respectivamente,

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

Una persona lanza un objeto desde el techo de un edificio de 24 m inicialmente hacia arriba. Tomando como *datum* (origen del sistema coordenado) la base del edificio, y sabiendo que el objeto toca el suelo en $t = 3\,\text{s}$, se pide:



a) Determinar la ecuación del movimiento $z\,(t)$ del objeto.

b) Indique la velocidad (rapidez) con que el objeto toca el suelo.

c) Determine la altura máxima $z_{\max}$ a la que llega el objeto.

El objeto se modela como una partícula sometida a una aceleración constante $\ddot{z} = -g$, donde $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad.

$$\ddot{z} = -g$$
$$\dot{z} = \int_0^t \ddot{z}\,\mathrm{d}t = -g\,t + C_1$$
$$z = \int_0^t \dot{z}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,(-g)\,t^2 + C_1\,t + C_2$$

Sabemos que la posición inicial del objeto es $z\,(0) = 24\,\text{m}$, mientras que algunos segundos más tarde $z\,(t = 3) = 0$. Con ello se puede determinar las constantes de integración C_1 y C_2:

$$\left.\begin{array}{l} z\,(0) = \frac{1}{2}\,(-g)\,(0)^2 + (C_1)\,(0) + C_2 = 24 \\ z\,(3) = \frac{1}{2}\,(-g)\,(3)^2 + (C_1)\,(3) + C_2 = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \quad C_2 = 24\,\text{m} \quad \text{y} \quad C_2 = 6{,}715\,\text{m/s}$$

Finalmente, la ecuación del movimiento del objeto es:

$$z\,(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + 6{,}715\,t + 24$$

La velocidad del objeto es:

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -g\,t + C_1 = -g\,t + 6{,}715$$

El objeto toca el suelo en $t = 3\,\text{m}$, por lo que su velocidad al hacer impacto con el mismo es:

$$\dot{z}\,(3) = (-g)\,(3) + 6{,}715 = -22{,}715\,\text{m/s}$$

La velocidad en el punto más alto de la trayectoria del objeto es cero. Es decir, el punto de máxima altura se alcanza en un tiempo $t^\star$ tal que:

$$\dot{z}\,(t^\star) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad t^\star = \frac{6{,}715}{g} = 0{,}6845\,\text{s}$$

La altura máxima del objeto es:

$$z_{\max} = z\,(t^\star) = -\frac{1}{2}\,g\,(0{,}6845)^2 + (6{,}715)\,(0{,}6845) + 24$$
$$z_{\max} = 26{,}3\,\text{m}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

Un cohete de agua tiene una aceleración neta durante los dos primeros segundos que se asemeja a:

$$a\left(t\right)=\frac{120}{\left(t+1\right)^{3}}\quad\left[\mathrm{m/s^2}\right]$$

Asuma que el cohete comienza desde el reposo, i.e., $u_0=0$ y $\dot{u}_0=0$.
Se pide determinar:

a) La altura y velocidad del cohete en el instante $t=1\,\mathrm{s}$.

b) El desplazamiento del cohete entre $t=1\,\mathrm{s}$ y $t=2\,\mathrm{s}$.

La aceleración no es constante y es función del tiempo. Debido a ello, para obtener la ecuación del movimiento del cohete se debe resolver la EDO de la Ecuación (2.5). Integrando una vez:

$$\begin{aligned}a\left(t\right)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}&=\frac{120}{\left(t+1\right)^{3}}\\ \mathrm{d}v&=\left[\frac{120}{\left(t+1\right)^{3}}\right]\mathrm{d}t\\ v&=-\frac{60}{\left(t+1\right)^{2}}+C_1\end{aligned}$$

Repitiendo el proceso una vez más:

$$\begin{aligned}v\left(t\right)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}&=-\frac{60}{\left(t+1\right)^{2}}+C_1\\ \mathrm{d}u&=\left[-\frac{60}{\left(t+1\right)^{2}}+C_1\right]\mathrm{d}t\\ u&=\frac{60}{\left(t+1\right)}+C_1\,t+C_2\end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales se puede determinar los valores de C_1 y C_2;

$$\left.\begin{aligned}u\left(0\right)&=\tfrac{60}{1}+0+C_2=0\\ \dot{u}\left(0\right)&=\tfrac{-60}{1}+C_1=0\end{aligned}\right\}\quad\longrightarrow\quad\begin{aligned}C_2&=-60\\ C_1&=60\end{aligned}$$

Es decir, la posición y velocidad del cohete en el tiempo son:

$$\begin{aligned}u\left(t\right)&=\frac{60}{\left(t+1\right)}+60\,t-60\\ \dot{u}\left(t\right)&=\frac{-60}{\left(t+1\right)^{2}}+60\end{aligned}$$

Finalmente, las posiciones y desplazamientos pedidos son:

$$\begin{aligned}u\left(1\right)&=\frac{60}{2}+60-60=30\,\mathrm{m}\\ \dot{u}\left(1\right)&=\frac{-60}{4}+60=45\,\mathrm{m/s}\\ \Delta u_{1\to2}&=u\left(2\right)-u\left(1\right)=80-30=50\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

Nota: Las constantes de integración no coinciden con las condiciones iniciales u_0 y v_0 debido a que la aceleración no es un polinomio de t.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Sugerido

Resuelva nuevamente el problema anterior utilizando integrales definidas.

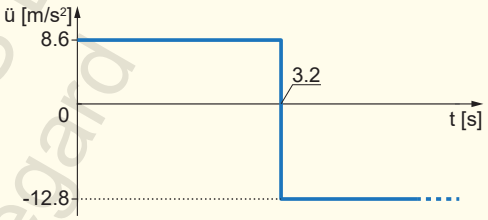
2.2.2. Movimiento con aceleración errática

En algunas situaciones la aceleración no puede ser descrita con una sola expresión para todo $t \geq 0$. En estos casos, es necesario describir el movimiento a tramos, y determinar las constantes de integración por compatibilidad de u y de $\dot{u}$ en los puntos de cambio. Exigir la compatibilidad de posición y velocidad es razonable desde el punto de vista físico: el objeto no se puede teletransportar ni cambiar su velocidad instantáneamente[2].

Ejemplo

Una prueba de aceleración y frenado de un automóvil "Tesla Model S" consiste en: comenzando desde el reposo, i.e. $u_0 = 0$ y $v_0 = 0$; **(i)** acelerar al máximo por 3,2 s; para luego **(ii)** frenar al máximo hasta detener el vehículo.

Los motores eléctricos del automóvil producen torque constante y son capaces de acelerar a 8,6 $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$. El sistema de freno (incluyendo los neumáticos y su adherencia) es capaz de desacelerar a 12,8 $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$.



a) ¿Cuánto tarda el ensayo en su totalidad?

b) ¿Cuál es la posición final del automóvil?

c) Bosqueje gráficas $\dot{u}$–t y u–t.

El movimiento del automóvil se describe con 3 tramos.

Tramo I Caso para $0 \leq t \leq 3{,}2\,\mathrm{s}$

$$\ddot{u}^{\mathrm{I}} = 8{,}6$$
$$\dot{u}^{\mathrm{I}} = 8{,}6\,t + C_1$$
$$u^{\mathrm{I}} = 4{,}3\,t^2 + C_1\,t + C_2$$

Sabemos que $u_0 = 0$ y $\dot{u}_0 = 0$, por lo que:

$$C_1 = 0 \qquad\qquad C_2 = 0$$

Es decir, las ecuaciones de posición y velocidad en el tramo I son:

$$u^{\mathrm{I}}(t) = 4{,}3\,t^2$$
$$\dot{u}^{\mathrm{I}}(t) = 8{,}6\,t$$

Al final del tramo I (periodo de aceleración) se tiene:

$$u^{\mathrm{I}}(3{,}2) = 44{,}032\,\mathrm{m} \qquad\qquad \dot{u}^{\mathrm{I}}(3{,}2) = 27{,}52\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$$

Tramo II Caso para $3{,}2 \leq t \leq t_{\mathrm{stop}}$

$$\ddot{u}^{\mathrm{I}} = -12{,}8$$
$$\dot{u}^{\mathrm{I}} = -12{,}8\,t + C_1$$
$$u^{\mathrm{I}} = -6{,}4\,t^2 + C_1\,t + C_2$$

[2] En realidad sí puede cambiar su velocidad (pseudo) instantáneamente con un *impulso*. Pero eso se estudiará en los capítulos siguientes.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Sabemos que $u^{\mathrm{II}}(3{,}2) = u^{\mathrm{I}}(3{,}2) = 44{,}032\,\mathrm{m}$ y $\dot{u}^{\mathrm{II}}(3{,}2) = \dot{u}^{\mathrm{I}}(3{,}2) = 27{,}52\,\mathrm{m/s}$, por lo que:

$$C_1 = 68{,}48 \qquad C_2 = -109{,}568$$

Es decir, las ecuaciones de posición y velocidad en el tramo II son:

$$u^{\mathrm{II}}(t) = -6{,}4\,t^2 + 68{,}48\,t - 109{,}568$$
$$\dot{u}^{\mathrm{II}}(t) = -12{,}8\,t + 68{,}48$$

El automóvil se detiene en el instate t_{stop} tal que:

$$\dot{u}^{\mathrm{II}}(t_{\mathrm{stop}}) = -12{,}8\,t_{\mathrm{stop}} + 68{,}48 = 0$$
$$t_{\mathrm{stop}} = 5{,}35\,\mathrm{s}$$

Al final del tramo II (periodo de desaceleración) se tiene:

$$u^{\mathrm{II}}(5{,}35{,}2) = 73{,}616\,\mathrm{m}$$

Tramo III Caso para $5{,}35 \leq t$

$$\ddot{u}^{\mathrm{I}} = 0$$
$$\dot{u}^{\mathrm{I}} = C_1$$
$$u^{\mathrm{I}} = C_1\,t + C_2$$

Sabemos del tramo anterior que $u^{\mathrm{III}}(5{,}35) = u^{\mathrm{II}}(5{,}35) = 73{,}616\,\mathrm{m}$ y $\dot{u}^{\mathrm{III}}(3{,}2) = \dot{u}^{\mathrm{II}}(3{,}2) = 0$, por lo que:

$$C_1 = 0 \qquad C_2 = 73{,}616$$

Es decir, las ecuaciones de posición y velocidad en el tramo III son:

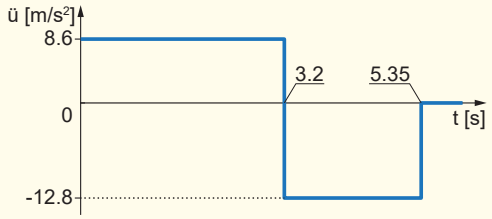
$$u^{\mathrm{III}}(t) = 73{,}616$$
$$\dot{u}^{\mathrm{III}}(t) = 0$$

La posición final del automóvil es $u = 73{,}616\,\mathrm{m}$.
El ensayo tiene una duración de $\Delta t = t_{\mathrm{stop}} - t_0 = 5{,}35\,\mathrm{s}$.
Las ecuaciones de posición y velocidad del automóvil son:

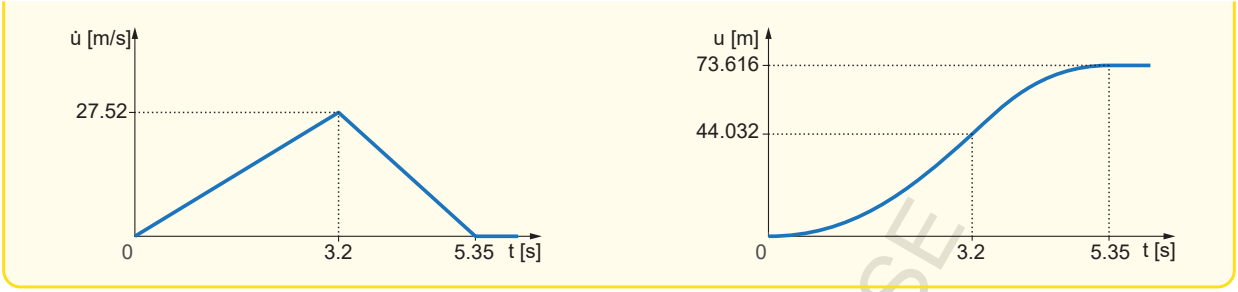
$$u(t) = \begin{cases} 4{,}3\,t^2 & 0 \leq t \leq 3{,}2\,\mathrm{s} \\ -6{,}4\,t^2 + 68{,}48\,t - 109{,}568 & 3{,}2\,\mathrm{s} \leq t \leq 5{,}35\,\mathrm{s} \\ 73{,}616 & 5{,}35\,\mathrm{s} \leq t \end{cases}$$

$$\dot{u}(t) = \begin{cases} 8{,}6\,t & 0 \leq t \leq 3{,}2\,\mathrm{s} \\ -12{,}8\,t + 68{,}48 & 3{,}2\,\mathrm{s} \leq t \leq 5{,}35\,\mathrm{s} \\ 0 & 5{,}35\,\mathrm{s} \leq t \end{cases}$$

, cuyas gráficas incluyendo también la de $\ddot{u}$–t, son:



BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard



2.2.3. Gráficas $\ddot{u}$–t, $\dot{u}$–t, y u–t

La relación entre las gráficas $\ddot{u}$–t, $\dot{u}$–t, y u–t, es evidente cuando se analiza la Ecuación (2.5). En el ejemplo anterior, la pendiente de la gráfica u–t resulta en $\dot{u}$. Del mismo modo, la pendiente de la gráfica $\dot{u}$–t resulta en $\ddot{u}$.

El proceso inverso (integrar) requiere ser más cuidadoso: hay infinitas curvas a elevaciones diferentes que pueden resultar de integrar una curva, como muestran las Figuras 2.2(b) y 2.2(c). La curva real se identifica cuando se obtiene la constante de integración. Pese a ello, la integral de la aceleración en un intervalo Δt_{ab} es igual a la variación de la velocidad Δv_{ab} en el mismo intervalo, como muestra la Figura 2.2(b). Esto es independiente de la constante de integración, o de la elevación real a la que se encuentra la curva. Del mismo modo, la integral de la velocidad en un intervalo Δt_{cd} es igual a la variación de la posición Δu_{cd} en el mismo intervalo, como muestra la Figura 2.2(c).

La relación entre estas curvas permite resolver algunos problemas de cinemática de forma gráfica si se provee de una o más gráficas $\ddot{u}$–t, $\dot{u}$–t, o u–t.

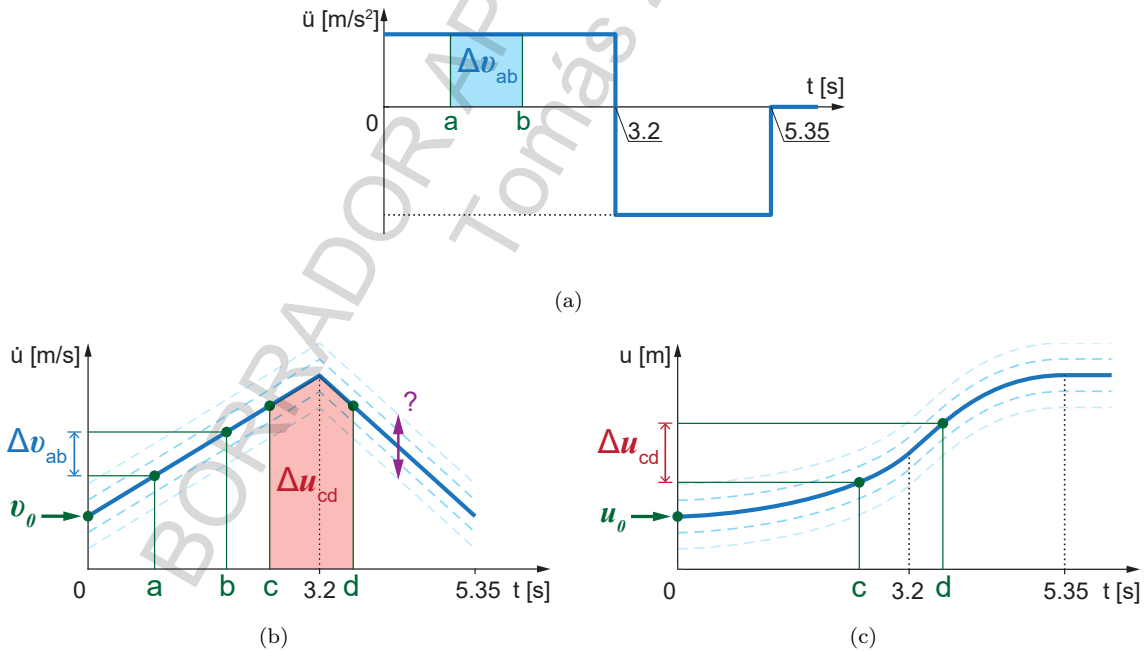


Figura 2.2: Relación entre las gráficas de aceleración, velocidad, y posición: **(a)** aceleración en el tiempo; **(b)** velocidad en el tiempo; y **(c)** posición en el tiempo.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

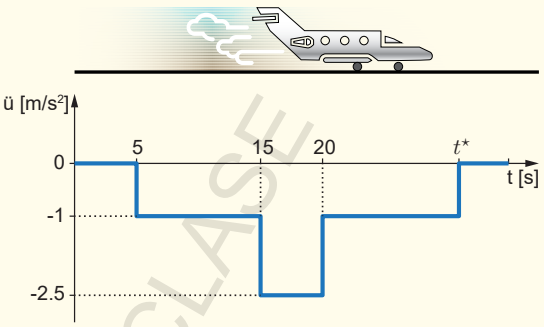
Ejemplo

Basado en Hibbeler 14th ed, Problem 12–55

Un avión aterriza en una pista recta con velocidad 33,5 m/s cuando $u = 0$. El avión desacelera como muestra la gráfica. Se pide determinar:

a) El tiempo $t^\star$ necesario para que el avión se detenga.

b) Bosqueje la gráfica u–t del movimiento del avión.

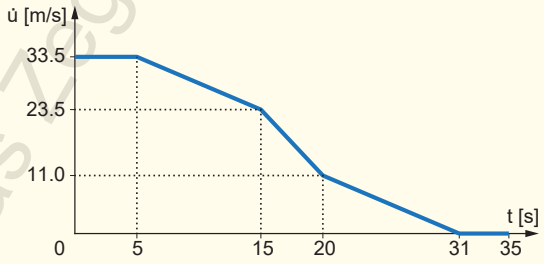


La integral de la aceleración es igual a la variación de velocidad Δv. Sabemos que en $t^\star$ la velocidad es $v_{\text{end}} = 0$, con lo que:

$$v_0 + \Delta v_{5\to 15} + \Delta v_{15\to 20} + \Delta v_{20\to t^\star} = v_{\text{end}}$$
$$33{,}5 + (15-5)(-1) + (20-15)(-2{,}5) + (t^\star - 20)(-1) = 0$$
$$t^\star = 31\,\text{s}$$

La aceleración es constante a tramos, con lo que la velocidad será lineal a tramos. Para bosquejar la velocidad basta con determinar la velocidad en los puntos donde la aceleración cambia:

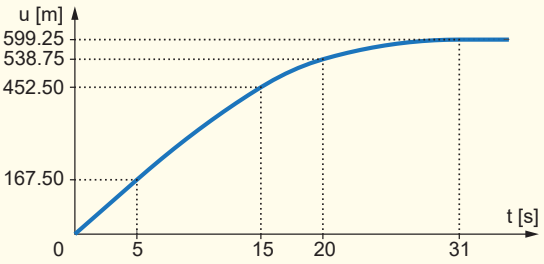
$$v_0 + \underbrace{\Delta v_{0\to 5}}_{0} = v(5) \quad \to \quad v(5) = 33{,}5\,\text{m/s}$$
$$v_0 + \underbrace{\Delta v_{0\to 15}}_{-10{,}0} = v(15) \quad \to \quad v(15) = 23{,}5\,\text{m/s}$$
$$v_0 + \underbrace{\Delta v_{0\to 20}}_{-22{,}5} = v(20) \quad \to \quad v(20) = 11{,}0\,\text{m/s}$$
$$v_0 + \underbrace{\Delta v_{0\to 20}}_{-33{,}5} = v(31) \quad \to \quad v(31) = 0$$



, con lo que se puede bosquejar la gráfica $\dot{u}$–t.

La integral de la velocidad es igual a la variación del desplazamiento Δu. En este caso es necesario integrar triángulos, lo que nuevamente es fácil de hacer gráficamente (área de triángulos y trapecios).

$$u_0 + \underbrace{\Delta u_{0\to 5}}_{167{,}5} = u(5) \quad \to \quad u(5) = 167{,}5\,\text{m}$$
$$u_0 + \underbrace{\Delta u_{0\to 15}}_{452{,}5} = u(15) \quad \to \quad v(15) = 452{,}5\,\text{m}$$
$$u_0 + \underbrace{\Delta u_{0\to 20}}_{538{,}75} = u(20) \quad \to \quad v(20) = 538{,}75\,\text{m}$$
$$u_0 + \underbrace{\Delta u_{0\to 20}}_{599{,}25} = u(31) \quad \to \quad v(31) = 599{,}25\,\text{m}$$



, con lo que se puede bosquejar la gráfica u–t. Podría ser útil determinar la posición en otros instantes para mejor determinar la forma de las curvas.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

2.3. Movimiento rectangular cartesiano (movimiento 2D/3D)

El sistema cartesiano es ideal para estudiar los casos de cinemática donde las componentes x, y, y z, de la aceleración, son independientes entre sí.

La posición de una partícula en el tiempo, como muestra la Figura 2.3, se expresa vectorialmente como:

$$\mathbf{u} = u_x\,\hat{\mathbf{i}} + u_y\,\hat{\mathbf{j}} + u_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

La velocidad de la partícula es:

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{k}} + \underbrace{u_x\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{i}}}{\mathrm{d}t} + u_y\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{j}}}{\mathrm{d}t} + u_z\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t}}_{\text{sistema de referencia fijo}=\mathbf{0}}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{u}_x\,\hat{\mathbf{i}} + \dot{u}_y\,\hat{\mathbf{j}} + \dot{u}_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

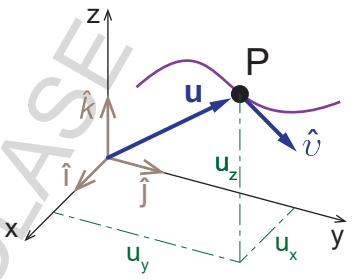


Figura 2.3: Posición para una partícula con movimiento 3D. El vector de velocidad es tangente a la trayectoria.

La rapidez o magnitud de la velocidad es:

$$v = |\dot{\mathbf{u}}| = \sqrt{\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2}$$

El vector director de la velocidad es siempre tangente a la trayectoria de la partícula, y es igual a:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\dot{}} = \hat{\mathbf{v}} = \frac{\dot{\mathbf{u}}}{|\dot{\mathbf{u}}|} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

Una segunda derivada temporal sobre la posición resulta en la aceleración de la partícula:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{u}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2u_x}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}^2u_y}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\mathrm{d}^2u_z}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{\mathbf{k}} + \underbrace{u_x\frac{\mathrm{d}^2\hat{\mathbf{i}}}{\mathrm{d}t^2} + u_y\frac{\mathrm{d}^2\hat{\mathbf{j}}}{\mathrm{d}t^2} + u_z\frac{\mathrm{d}^2\hat{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t^2} + 2\left(\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{i}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{j}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t}\right)}_{\text{sistema de referencia fijo}=\mathbf{0}}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{u}_x\,\hat{\mathbf{i}} + \ddot{u}_y\,\hat{\mathbf{j}} + \ddot{u}_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

La magnitud de la aceleración es:

$$a = |\ddot{\mathbf{u}}| = \sqrt{\ddot{u}_x^2 + \ddot{u}_y^2 + \ddot{u}_z^2}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

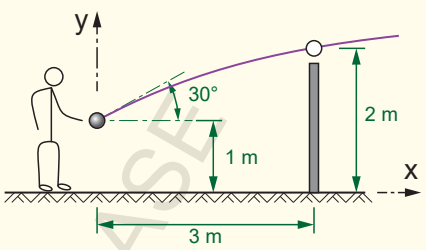
En términos simples: Los problemas de movimiento 2D se resuelven como si fueran dos movimientos rectilíneos. Análogamente, en el caso 3D se tienen 3 movimientos rectilíneos.

Resolviendo los problemas de forma vectorial se opera sobre todas las dimensiones a la vez.

Ejemplo

Basado en Hibbeler 14th ed, Problem F12–25

Una persona lanza una pelota con un ángulo de 30° sobre la horizontal desde una altura de 1 m. Determine la rapidez mínima con que debe lanzar la pelota para pasar sobre un muro de 2 m de altura a 3 m de distancia.



Comenzamos por ubicar el origen a los pies de la persona. Si la rapidez es efectivamente la mínima, entonces la pelota pasará justo sobre el muro. La información que se tiene es la siguiente:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ m} \qquad \mathbf{u}(t^\star) = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \text{ m}$$

Integrando dos veces para obtener la posición:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \\ \dot{\mathbf{u}} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} C_{1x} \\ C_{1y} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{u} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{Bmatrix} C_{1x} \\ C_{1y} \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} C_{2x} \\ C_{2y} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Utilizando la condición de posición inicial se puede resolver para C_{2x} y C_{2y}:

$$\mathbf{u}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{0^2}{2} + \begin{Bmatrix} C_{1x} \\ C_{1y} \end{Bmatrix} (0) + \begin{Bmatrix} C_{2x} \\ C_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} C_{2x} \\ C_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Adicionalmente, se sabe que la velocidad inicial (tangente a la trayectoria) es:

$$\dot{\mathbf{u}}_0 = v_0 \, \hat{\mathbf{v}}_0 = v_0 \begin{Bmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{Bmatrix} = \frac{v_0}{2} \begin{Bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

, donde v_0 es la rapidez inicial. Utilizando la condición $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0$, se obtiene C_{1x} y C_{1y} en función de v_0:

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{Bmatrix} C_{1x} \\ C_{1y} \end{Bmatrix} = \frac{v_0}{2} \begin{Bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

, con lo que la posición de la partícula para todo instante t es:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + \frac{v_0}{2} \begin{Bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Queremos que el punto $3\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}}$ sea parte de la trayectoria para así obtener la rapidez inicial mínima:

$$\mathbf{u}(t^\star) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{(t^\star)^2}{2} + \frac{v_0}{2} \begin{Bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} t^\star + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

, donde se tienen 2 incógnitas ($t^\star$ y v_0), y dos ecuaciones (x e y). La ecuación en $\hat{\mathbf{i}}$ nos permite obtener el tiempo $t^\star$ en que la pelota llega al muro:

$$\frac{v_0}{2} \left(\sqrt{3} \right) t^\star = 3 \qquad \longrightarrow \qquad t^\star = \frac{2\sqrt{3}}{v_0}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Reemplazando $t^\star$ en la ecuación asociada a $\hat{\mathbf{j}}$ se puede resolver para la velocidad inicial:

$$\left(\frac{-g}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{v_0}\right) + 1 = 2$$

$$\sqrt{3} - 1 = 6g\left(\frac{1}{v_0}\right)^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{6g}{\sqrt{3}-1}} = 8{,}967\,\text{m/s}$$

La pelota pasará por sobre el muro si se lanza con rapidez mayor o igual a $8{,}967\,\text{m/s}$.

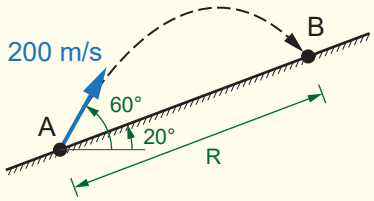
Nota: La velocidad inicial $v_0 = -8{,}967\,\text{m/s}$ es también una solución del problema, que está asociada a un tiempo $t^\star < 0$. No es una solución de interés en este problema.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

Meriam 9th ed, Problem 2/70

Un proyectil se dispara con rapidez inicial de $200\,\text{m/s}$ con un ángulo de $60°$ sobre la horizontal. El suelo es un plano inclinado a $20°$ sobre la horizontal. Determine la distancia R al punto de impacto.



Ubicaremos el origen en el punto A. Con ello, la recta entre los puntos A y B (superficie del terreno) son los puntos que cumplen:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \cos 20° \\ \sin 20° \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \cos 20° \\ \sin 20° \end{Bmatrix}$$

, donde λ es la distancia al punto A.
La información que tenemos del enunciado es:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{u}}_0 = 200 \begin{Bmatrix} \cos 60° \\ \sin 60° \end{Bmatrix} = 100 \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

, con lo que llega a la siguiente ecuación de movimiento:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + \dot{\mathbf{u}}_0\, t + \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + 100 \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} t$$

El proyectil impactará el punto B en el instante $t^\star$. Punto cuyas coordenadas pertenecen a la recta $\overline{AB}$. Es decir:

$$\mathbf{u}(t^\star) = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix} = R \begin{Bmatrix} \cos 20° \\ \sin 20° \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{(t^\star)^2}{2} + 100 \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} t^\star = R \begin{Bmatrix} \cos 20° \\ \sin 20° \end{Bmatrix}$$

, donde se tienen 2 ecuaciones (en $\hat{\mathbf{i}}$ y en $\hat{\mathbf{j}}$) y 2 incógnitas ($t^\star$ y R). Con la primera ecuación:

$$100\, t^\star = R \cos 20° \qquad \longrightarrow \qquad t^\star = \frac{R}{100} \cos 20°$$

, que reemplazando en la segunda ecuación resulta en:

$$-\frac{g}{2}\left[\frac{R}{100}\cos 20^\circ\right]^2 + 100\sqrt{3}\left[\frac{R}{100}\cos 20^\circ\right] = R\sin 20^\circ$$

$$R\left[R\left(\frac{-g}{2}\right)\cos^2 20^\circ + 100^2\left(\sqrt{3}\cos 20^\circ - \sin 20^\circ\right)\right] = 0$$

Las dos soluciones tienen perfecto sentido físico. La solución $R_1 = 0$ es la "solución trivial" y corresponde al punto A: el punto inicial en la trayectoria del proyectil. La segunda solución es la solución de interés y corresponde a la distancia R buscada:

$$R_2 = \frac{(2)\left(100^2\right)}{g}\left[\frac{\sqrt{3}}{\cos 20^\circ} - \frac{\tan 20^\circ}{\cos 20^\circ}\right] = 2968\,\text{m}$$

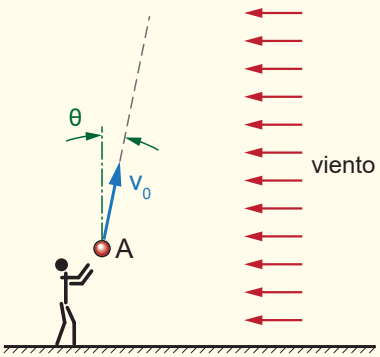
Sugerido

Pruebe resolviendo el problema anterior nuevamente, pero utilizando un sistema de referencia inclinado a 20°. Es decir, el eje x coincide con la superficie del terreno. En ese caso la aceleración $\ddot{\mathbf{u}}$, la velocidad inicial $\dot{\mathbf{u}}_0$, y las coordenadas del punto B cambian al tener; pero el valor de R al que se llega es el mismo.

Ejemplo

Meriam 9th ed, Problem 2/68

Un niño lanza una pelota hacia arriba con ángulo θ bajo la vertical y rapidez inicial $v_0 = 12\,\text{m/s}$. Un viento horizontal produce una aceleración sobre la pelota de $0{,}4\,\text{m/s}^2$ hacia la izquierda. Suponga que el viento no afecta el movimiento vertical. ¿Con qué ángulo θ de lanzamiento la pelota regresará a las manos del niño?



Fijando el origen en las manos del niño; la aceleración sobre la pelota y las condiciones iniciales son:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} -0{,}4 \\ -g \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{u}}_0 = 12\begin{Bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix}$$

Con lo que se obtiene la siguiente ecuación de posición:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{5}t^2 + 12\,t\,\sin\theta \\ -\frac{g}{2}t^2 + 12\,t\,\cos\theta \end{Bmatrix}$$

La pelota volverá al origen en $t^\star$ tal que:

$$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{5}\left(t^\star\right)^2 + 12\,t^\star\,\sin\theta \\ -\frac{g}{2}\left(t^\star\right)^2 + 12\,t^\star\,\cos\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t^\star\left(-\frac{1}{5}t^\star + 12\,\sin\theta\right) \\ t^\star\left(-\frac{g}{2}t^\star + 12\,\cos\theta\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Esto es un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (θ y $t^\star$), el cual tiene 2 soluciones: una trivial y la solución de interés.

Solución 1: $t^\star = 0$ y $\theta = ?$
Esta solución es trivial: el niño tendrá la pelota en sus manos al principio del experimento.

BORRADOR PUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Solución 2: Se puede despejar $t^\star$ de las siguientes dos ecuaciones para obtener θ:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{5}\,t^\star + 12\,\sin\theta = 0 \\ -\frac{g}{2}\,t^\star + 12\,\cos\theta = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} t^\star = 60\,\sin\theta \\ t^\star = \frac{24}{g}\,\cos\theta \end{array}\right\} \longrightarrow \tan\theta = \frac{2}{5\,g}$$

Es decir, el ángulo de lanzamiento debe ser:

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{2}{5\,g}\right) = 0{,}041\,\text{rad} \quad [\,2{,}335\,\text{deg}\,]$$

2.4. Movimiento en coordenadas polares y cilíndricas

Estos sistemas son ideales para representar el movimiento de partículas con trayectorias circulares, elípticas, helicoidales, y similares. Cuando el movimiento se encuentra completamente en un plano, entonces usamos coordenadas polares (caso 2D), que constituye caso particular de coordenadas cilíndricas cuando $z =$ constante.

La posición se representa por un radio r, un ángulo θ, y una altura z (cuando corresponda). Los vectores unitarios de la base son $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, que corresponden a la direcciones radial y tangencial respectivamente, y cuando corresponda también $\hat{\mathbf{k}}$. En este sistema coordenado, la dirección de $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ dependen del ángulo θ, como muestra la Figura 2.4(a). Es decir, los vectores $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ varían en función del tiempo t.

La posición de la partícula P es:

$$\mathbf{u} = r\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

> A simple vista, pareciera que la expresión para posición está mal: específicamente incompleta. El instinto dice que la posición debería depender también de θ. La verdad es que lo hace: θ dicta la dirección en la que apunta $\hat{\mathbf{e}}_r$.

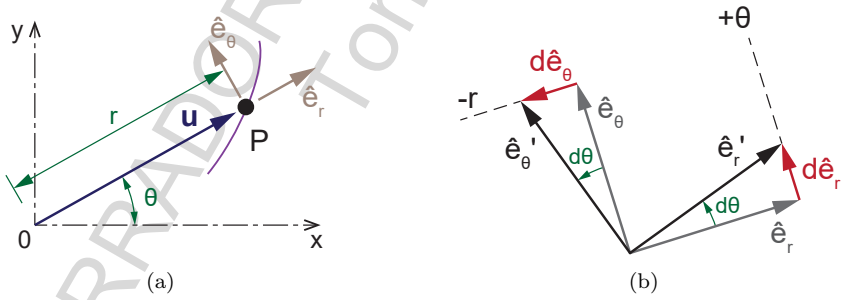


Figura 2.4: Coordenadas polares: **(a)** posición de una partícula; y **(b)** variación de los vectores base **hate**$_r$ y **hate**$_\theta$ producto de una variación positiva en el ángulo dθ.

La velocidad de la partícula es:

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t}$$

La dificultad es que el eje $+r$ varía con $\theta\,(t)$. Es decir, $\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} \neq 0$.

Antes de continuar nuestro desarrollo, es necesario determinar cómo varían $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ con una variación de $\theta\,(t)$. La Figura 2.4(b) muestra cómo cambian los vectores base debido a un aumento diferencial del ángulo dθ:

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

- El diferencial $\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r$ es en la dirección $+\theta$, i.e., dirección positiva según $\hat{\mathbf{e}}_\theta$.
- El diferencial $\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta$ es en la dirección $-r$; i.e., dirección negativa según $\hat{\mathbf{e}}_r$.

Como los vectores base (al igual que los vectores directores) tienen longitud igual a 1, los arcos infinitesimales tienen longitud $(1)\,(\mathrm{d}\theta) = \mathrm{d}\theta$. Con ello podemos escribir $\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta$ como una magnitud $(\mathrm{d}\theta)$ y su dirección correspondiente:

$$\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r = \mathrm{d}\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \qquad\qquad \mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\mathrm{d}\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

Finalmente, dividiendo ambas expresiones por un diferencial de tiempo $\mathbf{d}t$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta & \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{e}}_r \\ \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} &= \dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta & \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}t} &= -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_r \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ahora sí es posible determinar la expresión de la velocidad:

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\overbrace{\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t}}^{\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

, cuya magnitud (rapidez) es:

$$v = |\dot{\mathbf{u}}| = \sqrt{(\dot{r})^2 + \left(r\,\dot{\theta}\right)^2}$$

> Recordar que podría existir una posición y velocidad asociada a $\hat{\mathbf{k}}$ (eje z).

La aceleración de una partícula en coordenadas polares es:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}} &= \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{u}}}{\mathrm{d}t} = \ddot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\,\overbrace{\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t}}^{\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\overbrace{\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}t}}^{-\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_r} \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta \end{aligned}$$

, cuya magnitud es:

$$a = |\ddot{\mathbf{u}}| = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)^2}$$

> En el futuro podría tener utilidad notar que la componente $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ de la aceleración, $\ddot{u}_\theta = \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)$, se puede también escribir como:
>
> $$\ddot{u}_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\,\dot{\theta}\right)$$

Resumiendo, el movimiento de una partícula en coordenadas polares o cilíndricas se rige según:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{u} &= r\,\hat{\mathbf{e}}_r + z\,\hat{\mathbf{k}} \\ \dot{\mathbf{u}} &= \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\,\hat{\mathbf{k}} \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\,\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}} \tag{2.11}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Comprender el sentido físico a las componentes de la aceleración en coordenadas polares no es trivial. Cada "ingrediente" tiene un nombre característico que sirve para luego explicar su origen:

$\ddot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r$: aceleración radial
$-r\,\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_r$: aceleración centrípeta
$r\,\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$: aceleración tangencial
$2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$: aceleración de Coriolis

Hay videos educacionales con explicaciones intuitivas de cada término, incluida la aceleración de Coriolis (probablemente la más difícil de explicar). Es muy recomendable ver alguno de estos videos ya que nos permiten "tocar" la física y los problemas que estamos resolviendo.

Algunos textos llaman usan la nomenclatura $\hat{\mathbf{r}}$ – $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ o bien $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ – $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, en vez de $\hat{\mathbf{e}}_r$ – $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ para los vectores base en coordenadas polares.

Las derivadas temporales de los vectores base polares se obtuvieron de forma gráfica. Es posible obtener el mismo resultado de forma matemática, lo que es un procedimiento válido, pero menos tangible. El procedimiento consiste en escribir los vectores base polares en términos de los vectores base cartesianos:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}} \qquad \hat{\mathbf{e}}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}$$

Los vectores base cartesianos, a diferencia de los polares, no cambian su dirección en el tiempo. Luego, se toma la derivada temporal teniendo en cuenta que sólo θ varía en el tiempo y que $\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{i}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{j}}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}$, obteniendo así:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} = -\sin(\theta)\;\dot{\theta}\;\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta)\;\dot{\theta}\;\hat{\mathbf{j}} = \dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\cos(\theta)\;\dot{\theta}\;\hat{\mathbf{i}} - \sin(\theta)\;\dot{\theta}\;\hat{\mathbf{j}} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

Estos resultados que coinciden con los obtenidos anteriormente en la Ecuación 2.10.

2.4.1. Notación: velocidad y aceleración angular

La *velocidad angular* tiene unidades de $^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}}$, y análogo al caso de $\dot{u} = v$, se suele escribir de dos maneras:

$$\dot{\theta} = \omega$$

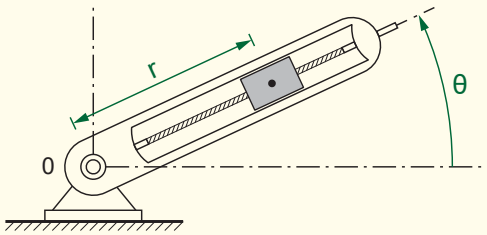
Similarmente, la *aceleración angular* tiene unidades de $^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}^2}$, y se suele escribir como:

$$\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha$$

Ejemplo

Basado en Meriam 9th ed, Sample Problem 2/9

Un brazo ranurado tiene un pequeño carro que se mueve gracias a un tornillo en el mismo brazo. La rotación del brazo está dada por $\theta(t) = 0{,}2\,t + 0{,}02\,t^3$ (radianes), y el movimiento del carro por $r = 0{,}2 + 0{,}04\,t^2$ (metros).



Se pide determinar:

a) La velocidad $\dot{\mathbf{u}}$ y la aceleración $\ddot{\mathbf{u}}$ del carro en coordenadas polares cuando $t = 3\,\mathrm{s}$.

b) La magnitud de la velocidad y aceleración del carro cuando $t = 3\,\mathrm{s}$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

c) La velocidad $\dot{\mathbf{u}}\,(3)$ y aceleración $\ddot{\mathbf{u}}\,(3)$ del carro en coordenadas cartesianas (términos de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$).

Comenzamos por determinar todas las derivadas de la coordenada angular y radial:

$$\theta = 0{,}2\,t + 0{,}02\,t^3 \qquad r = 0{,}2 + 0{,}04\,t^2$$
$$\dot{\theta} = 0{,}2 + 0{,}06\,t^2 \qquad \dot{r} = 0{,}08\,t$$
$$\ddot{\theta} = 0{,}12\,t \qquad \ddot{r} = 0{,}08$$

Evaluando en $t = 3\,\text{s}$, la ecuación del movimiento para el ángulo θ es:

$$\theta\,(3) = 1{,}14\,\text{rad} \quad [65{,}32\,\text{deg}] \qquad r\,(3) = 0{,}56\,\text{m}$$
$$\dot{\theta}\,(3) = 0{,}74\,\text{rad/s} \qquad \dot{r}\,(3) = 0{,}24\,\text{m/s}$$
$$\ddot{\theta}\,(3) = 0{,}36\,\text{rad/s}^2 \qquad \ddot{r}\,(3) = 0{,}08\,\text{m/s}^2$$

Con lo que, la velocidad y aceleración del carro resultan ser:

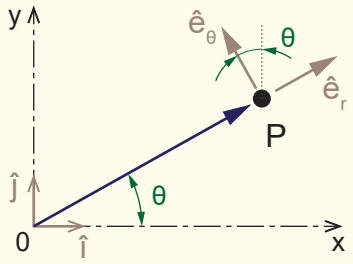
$$\dot{\mathbf{u}}\,(3) = (0{,}24)\,\hat{\mathbf{e}}_r + (0{,}56)\,(0{,}74)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = 0{,}24\,\hat{\mathbf{e}}_r + 0{,}4144\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\ \text{m/s}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}\,(3) &= \left[0{,}08 - (0{,}56)\,(0{,}74)^2\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[(0{,}56)\,(0{,}36) + (2)\,(0{,}24)\,(0{,}74)\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= -0{,}2267\,\hat{\mathbf{e}}_r + 0{,}5568\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\ \text{m/s}^2\end{aligned}$$

Las magnitudes de la velocidad y aceleración son:

$$v\,(3) = |\dot{\mathbf{u}}\,(3)| = \sqrt{(0{,}24)^2 + (0{,}4144)^2} = \sqrt{0{,}2293} = 0{,}4789\ \text{m/s}$$
$$a\,(3) = |\ddot{\mathbf{u}}\,(3)| = \sqrt{(-0{,}2267)^2 + (0{,}5568)^2} = \sqrt{0{,}3614} = 0{,}6012\ \text{m/s}^2$$

Para hacer un cambio de base de coordenadas polares al sistema cartesiano, es necesario escribir $\hat{\mathbf{e}}_r$—$\hat{\mathbf{e}}_\theta$ en términos de $\hat{\mathbf{i}}$—$\hat{\mathbf{j}}$ y reemplazar. La Figura al costado muestra cómo relacionar los vectores base a través del ángulo θ. Con ello se obtiene:



$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}$$

En nuestro caso, el ángulo es $\theta\,(3) = 1{,}14\,\text{rad}$:

$$\cos\theta = 0{,}4176 \qquad \sin\theta = 0{,}9086$$

Reemplazando $\hat{\mathbf{e}}_r$—$\hat{\mathbf{e}}_\theta$ en las expresiones de velocidad y aceleración:

$$\dot{\mathbf{u}}\,(3) = (0{,}24)\left(0{,}4176\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}9086\,\hat{\mathbf{j}}\right) + (0{,}4144)\left(-0{,}9086\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}4176\,\hat{\mathbf{j}}\right) = -0{,}2763\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}3911\,\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}$$
$$\ddot{\mathbf{u}}\,(3) = (-0{,}2267)\left(0{,}4176\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}9086\,\hat{\mathbf{j}}\right) + (0{,}5568)\left(-0{,}9086\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}4176\,\hat{\mathbf{j}}\right) = -0{,}6006\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}0266\,\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$$

Sugerido

Compruebe que la magnitud de los vectores del problema anterior no varía si se cambia el sistema de referencia. Es decir, compruebe que $|\dot{\mathbf{u}}\,(3)|$ y $|\ddot{\mathbf{u}}\,(3)|$ siguen resultando $0{,}4789\,\text{m/s}$ y $0{,}6012\,\text{m/s}^2$,

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

respectivamente.

2.4.2. Movimiento circular

El movimiento en coordenadas polares (o cilíndricas) es aquel que tiene $r =$ constante y constituye un caso especial pero muy frecuente en la práctica. Si el radio no cambia en el tiempo, entonces $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, y con ello las Ecuaciones (2.11) en el caso de un movimiento circular son:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= r\,\hat{\mathbf{e}}_r + z\,\hat{\mathbf{k}} \\ \dot{\mathbf{u}} &= r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\,\hat{\mathbf{k}} \\ \ddot{\mathbf{u}} &= -r\,\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\,\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{2.12}$$

En un movimiento circular, el arco de círculo recorrido se relaciona con el ángulo como muestra la Figura 2.5. Es decir, el arco asociado a un ángulo θ y un radio R es:

$$s\,(t) = R\,\theta\,(t)$$

Además, debido a que no hay desplazamiento radial se cumple que la velocidad tangencial v_t es igual a la componente de velocidad según $\hat{\mathbf{e}}_\theta$. Es decir:

$$v_t = v_\theta \qquad \text{(en un movimiento circular)}$$

Derivando temporalmente la relación entre un ángulo y su arco circular, se obtiene una relación entre la velocidad tangencial v_t y la velocidad angular $\dot{\theta}$:

$$v_t\,(t) = v_\theta = R\,\dot{\theta}\,(t) = R\,\omega\,(t)$$

Derivando una vez más, se obtiene la aceleración tangencial:

$$a_t\,(t) = a_\theta = R\,\ddot{\theta}\,(t) = R\,\alpha\,(t)$$

Notar que las unidades de v_t y a_t son $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ y $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$, respectivamente.

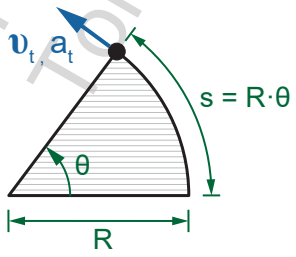


Figura 2.5: Relación entre la longitud del arco s y el ángulo de giro θ.

En ciertos problemas de movimiento circular se conoce $v_t = v_\theta$ y se debe calcular $\dot{\theta}$, o viceversa. Por ejemplo, el velocímetro de un automóvil en una rotonda entregará v_t, y será necesario dividir por el radio de la rotonda para obtener $\dot{\theta}$.

El vector de velocidad no tiene una componente radial:

$$\mathbf{v} = 0\,\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = v_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

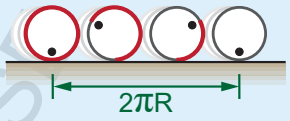
En cambio, la aceleración tiene una componente radial, y puede o no tener una componente tangencial

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

(sentido θ) dependiendo de si la rapidez del movimiento circular se mantiene o cambia:

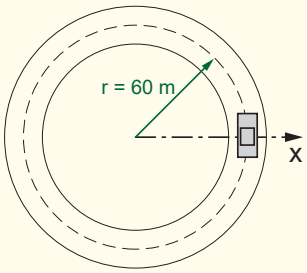
$$\mathbf{a} = a_{\text{centrípeta}}\,\hat{\mathbf{e}}_r + a_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = -r\,\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_r + a_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Las relaciones entre el ángulo y el arco serán de gran utilidad cuando tengamos objetos (no partículas) que *ruedan sin deslizar*. Por ejemplo, una rueda de radio R que da un giro completo $\theta = 2\pi$ se habrá desplazado horizontalmente $u = R\theta = 2\pi R$, como muestra la Figura a continuación.



Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Example 1.20



Un automóvil se encuentra en una pista circular de radio $r = 60\,\text{m}$ cuando comienza su carrera desde el reposo y en $\theta_0 = 0$. El automóvil acelera a $2\,\text{m/s}^2$. Determine la posición y el tiempo transcurrido cuando la magnitud de la aceleración alcanza $6\,\text{m/s}^2$.

Comenzamos obteniendo la aceleración angular a partir de la aceleración tangencial, esta última es la que ejerce el motor del automóvil:

$$R\,\ddot{\theta} = \ddot{u}_t$$
$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{u}_t}{R} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}\,\text{rad/s}^2$$

La ecuación del movimiento para el ángulo θ es:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{30}$$
$$\dot{\theta} = \frac{1}{30}t + C_1$$
$$\theta = \frac{1}{60}t^2 + C_1\,t + C_2$$

Sabemos que el automóvil comienza en $\theta_0 = 0$ y del reposo $\dot{\theta}_0 = 0$, y con ello $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$. Las ecuaciones de aceleración, velocidad, y posición, tanto angular como radial son:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{30}\,\text{rad/s}^2 \qquad \ddot{r} = 0$$
$$\dot{\theta} = \frac{1}{30}\,t\,\text{rad/s} \qquad \dot{r} = 0$$
$$\theta = \frac{1}{60}\,t^2\,\text{rad} \qquad r = 60\,\text{m}$$

, donde $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ debido a que el movimiento es circular (el radio no cambia). La aceleración que experimenta el automóvil es:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \left(\underbrace{\ddot{r}}_{0} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\underbrace{\dot{r}\,\dot{\theta}}_{0}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta = \left[-60\,\frac{t^2}{(30)^2}\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[60\,\frac{1}{30}\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta$$
$$\ddot{\mathbf{u}} = -\frac{t^2}{15}\,\hat{\mathbf{e}}_r + 2\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

La magnitud de la aceleración es:

$$a = |\ddot{\mathbf{u}}| = \sqrt{\left(-\frac{t^2}{15}\right)^2 + (2)^2} = \frac{1}{15}\sqrt{t^4 + 900}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Buscamos el instante $t^\star$ tal que $a\left(t^\star\right) = 6\,\mathrm{m/s^2}$:

$$6 = \frac{1}{15}\sqrt{\left(t^\star\right)^4 + 900}$$
$$8100 = \left(t^\star\right)^4 + 900$$

Tiene dos soluciones:

$$t_1^\star = \underbrace{-9{,}2116\,\mathrm{s}}_{\text{no válido}} \qquad t_2^\star = 9{,}2116\,\mathrm{s}$$

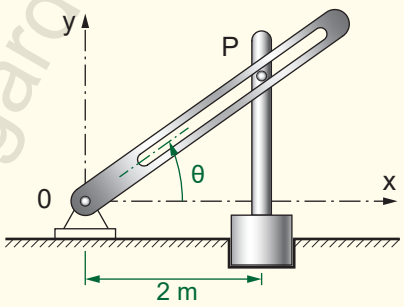
La posición del automóvil en $t^\star$ es:

$$\theta\left(t^\star\right) = \frac{1}{60}\left(t^\star\right)^2 = 1{,}4142\,\mathrm{rad} \qquad [\,81{,}03\,\mathrm{deg}\,]$$

Ejemplo

Basado en Bedford & Fowler 5th ed, Problems 13.153–13.154

El actuador (gato hidráulico) mueve el pin P hacia arriba a velocidad constante $\mathbf{v} = 2\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s}$. La viela (barra ranurada) comienza con $\theta_0 = 0$. Se pide determinar:



a) La velocidad del pin P en coordenadas polares.

b) La aceleración del pin P en coordenadas polares.

c) La velocidad angular de la barra $\dot\theta$ (o bien ω) cuando $\theta = 45°$.

d) La aceleración angular de la barra $\ddot\theta$ (o bien α) cuando $\theta = 45°$.

Nota: Este problema podría resolverse también usando coordenadas cartesianas y convertir al final el resultado a coordenadas polares. Probablemente sería incluso más rápido de resolver. No obstante, eso no ejercitaría la cinemática en coordenadas polares.

Utilizando el teorema de Pitágoras, podemos relacionar el radio con la altura a la que se encuentra el pin P:

$$r\left(t\right) = \sqrt{2^2 + y\left(t\right)} = \sqrt{4 + \left(2\,t\right)^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

Derivando respecto al tiempo t dos veces, se tiene:

$$\dot r\left(t\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2\,t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2\,t}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$\ddot r\left(t\right) = \frac{2\sqrt{1+t^2} - \left(2\,t\right)\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2\,t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{2}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

La relación entre el ángulo θ y la posición del pin es:

$$\tan\theta = \frac{y\left(t\right)}{2} = \frac{2\,t}{2} = t$$

Queremos $\theta\left(t\right)$, pero tenemos en vez $t\left(\theta\right)$. No hay problema porque sabemos que $\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\right)^{-1}$, y con ello:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\tan\theta\right] = 1 + \tan^2\theta = 1 + t^2$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Es decir:

$$\dot{\theta}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\right)^{-1} = \frac{1}{1+t^2}$$
$$\ddot{\theta}(t) = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{-2\,t}{\left(1+t^2\right)^2}$$

Tenemos ahora todos los ingredientes para obtener calcular la velocidad y la aceleración del pin P en coordenadas polares: r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, y $\ddot{\theta}$. La velocidad y aceleración del pin en P son:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{2\,t}{\sqrt{1+t^2}}\,\hat{\mathbf{e}}_r + 2\sqrt{1+t^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{2\,t}{\sqrt{1+t^2}}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}} &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \left(\frac{2}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} - 2\sqrt{1+t^2}\frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(2\sqrt{1+t^2}\frac{-2\,t}{\left(1+t^2\right)^2} + 2\frac{2\,t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta = \mathbf{0}\end{aligned}$$

El hecho que la aceleración sea $\ddot{\mathbf{u}} = 0\,\hat{\mathbf{e}}_r + 0\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = \mathbf{0}$ no debería ser sorprendente: si la aceleración es nula (velocidad constante) en coordenadas cartesianas, esta seguirá siendo nula luego de hacer un cambio de coordenadas (a coordenadas polares por ejemplo).

Finalmente, cuando $\theta = 45°$ se tiene:

$$t = \tan\theta = \tan 45° = 1$$

La velocidad y aceleración angular de la barra son:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ {}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}} \qquad \ddot{\theta}(t) = \frac{-2\,t}{\left(1+t^2\right)^2} = \frac{-1}{2}\ {}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}^2}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Sugerido

Resuelva el problema anterior usando el procedimiento alternativo que consiste en escribir $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ en términos de $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, para luego convertir la velocidad $\dot{\mathbf{u}} = 2\,\hat{\mathbf{j}}$ y la aceleración $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ en coordenadas polares[a].

La dificultad está en utilizar el teorema de Pitágoras para obtener:

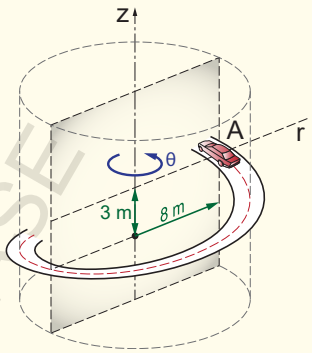
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \sin\theta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Luego, por geometría se puede deducir que: $\hat{\mathbf{i}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r - \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$ $\hat{\mathbf{j}} = \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r + \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$

[a] Esto evita completamente hacer uso de r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, y $\ddot{\theta}$; lo que era nuestro interés en el problema anterior.

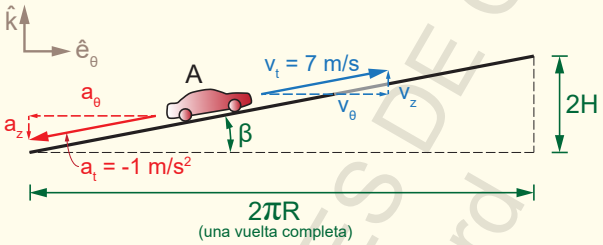
Ejemplo

Basado en Meriam 9th ed, Problem 2/142



Un automóvil se encuentra subiendo por una rampa de estacionamiento helicoidal cuyo radio es $R = 8\,\text{m}$, subiendo $H = 3\,\text{m}$ por cada medio giro. En la posición indicada por A, el automóvil registra una rapidez de $7\,\text{m/s}$ al mismo tiempo que desacelera a $1\,\text{m/s}^2$. Determine las componentes de la aceleración asociadas a $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, y $\hat{\mathbf{k}}$, de la aceleración del automóvil.

La velocidad y aceleración tienen componentes en $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ y $\hat{\mathbf{k}}$. Si se "desenrolla" un giro de la hélice: en una vuelta completa el automóvil se eleva $2H$ y horizontalmente se desplaza $2\pi R$, como muestra la Figura a continuación.



Es decir, el ángulo de *paso* de la hélice β es:

$$\beta = \text{atan}\left(\frac{2\,H}{2\,\pi R}\right) = \text{atan}\left(\frac{6}{50{,}265}\right) = 0{,}1188\,\text{rad} \qquad [6{,}79\,\text{deg}]$$

La velocidad y aceleración en la dirección z cuando el automóvil se encuentra en el punto A son:

$$(v_z)_A = (v_t)_A \,\sin\beta = (7)\,(0{,}1185) = 0{,}8430\,\text{m/s}$$
$$(a_z)_A = (a_t)_A \,\sin\beta = (-1)\,(0{,}1185) = -0{,}1204\,\text{m/s}^2$$

La velocidad y aceleración en la dirección θ cuando el automóvil se encuentra en el punto A son:

$$(v_\theta)_A = (v_t)_A \,\cos\beta = (7)\,(0{,}9930) = 6{,}9597\,\text{m/s} \quad \rightarrow \quad \dot{\theta}_A = \frac{(v_\theta)_A}{R} = 0{,}8688\,\text{rad/s}$$
$$(a_\theta)_A = (a_t)_A \,\cos\beta = (-1)\,(0{,}9930) = -0{,}9930\,\text{m/s}^2 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta}_A = \frac{(a_\theta)_A}{R} = -0{,}1241\,\text{rad/s}^2$$

Finalmente, tenemos los siguientes datos en el punto A:

$$r = R = 8\,\text{m} \qquad \theta = ? \qquad z = ?$$
$$\dot{r} = 0 \qquad \dot{\theta} = 0{,}8688\,\text{rad/s} \qquad \dot{z} = 0{,}8430\,\text{m/s}$$
$$\ddot{r} = 0 \qquad \ddot{\theta} = -0{,}1241\,\text{rad/s}^2 \qquad \ddot{z} = -0{,}1204\,\text{m/s}^2$$

Es importante tener en cuenta que estos valores no son constantes en la trayectoria del automóvil (para todo instante t), sino que corresponden a los valores en el punto A.

Finalmente, la aceleración del automóvil es:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}} &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\,\hat{\mathbf{k}} \\ &= \left[0 - (8)\,(0{,}8688)^2\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[(8)\,(-0{,}1241) + (2)\,(0)\,(0{,}8688)\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta + (-0{,}1204)\,\hat{\mathbf{k}} \\ &= -6{,}0390\,\hat{\mathbf{e}}_r - 0{,}9939\,\hat{\mathbf{e}}_\theta - 0{,}1204\,\hat{\mathbf{k}} \quad \text{m/s}^2\end{aligned}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Nota: En un movimiento helicoidal, a diferencia de un movimiento circular, se tiene que $v_t \neq v_\theta$ pese a tener $r = R =$ constante. Por la misma razón $a_t \neq a_\theta$.

2.5. Movimiento relativo

En ciertos casos es conveniente describir el movimiento de una partícula con respecto a un sistema de referencia móvil, lo que es llamado *movimiento relativo*. Lo opuesto, que hemos hecho hasta ahora, se llama *movimiento absoluto* y usa un sistema de referencia fijo.

En la Figura 2.6, el origen B del sistema móvil es definido por un vector $\mathbf{u}_B$ medido desde un sistema de referencia fijo (sistema inercial primario). Notar que asumimos que el segundo sistema no rota, sólo se traslada (usa los mismos vectores base unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$).

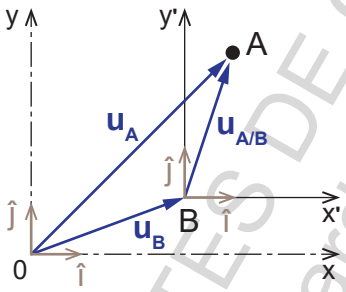


Figura 2.6: Posición de una partícula A respecto a: **(1)** un sistema de referencia absoluto; **(2)** un sistema de referencia móvil cuyo origen está en B.

Llamando a:

- La posición de la partícula A medida desde el origen en B: $\mathbf{u}_{A/B}$
- La posición absoluta del origen en B: $\mathbf{u}_B$

La posición absoluta de la partícula A se puede entonces expresar como: $\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_B + \mathbf{u}_{A/B}$. Tomando derivadas respecto al tiempo, se obtienen relaciones adicionales para la velocidad y aceleración en términos relativos:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{u}_A &= \mathbf{u}_B + \mathbf{u}_{A/B} && (2.13a)\\ \dot{\mathbf{u}}_A &= \dot{\mathbf{u}}_B + \dot{\mathbf{u}}_{A/B} && (2.13b)\\ \ddot{\mathbf{u}}_A &= \ddot{\mathbf{u}}_B + \ddot{\mathbf{u}}_{A/B} && (2.13c) \end{aligned}}$$

En realidad, cualquier punto podría ser usado como el origen del sistema de referencia móvil. Es decir, podríamos poner un nuevo sistema en el punto B, y usarlo para describir el movimiento del origen del sistema en móvil en A (ahora nuestra partícula de interés):

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + \mathbf{u}_{B/A}$$

Reemplazando $\mathbf{u}_A$ de la Ecuación (2.13a) en esta, se obtiene:

$$\mathbf{u}_B = \left[\mathbf{u}_B + \mathbf{u}_{A/B}\right] + \mathbf{u}_{B/A}$$

Simplificando, y luego tomando derivadas respecto al tiempo, se llega a:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{u}_{B/A} &= -\mathbf{u}_{A/B} && (2.14a)\\ \dot{\mathbf{u}}_{B/A} &= -\dot{\mathbf{u}}_{A/B} && (2.14b)\\ \ddot{\mathbf{u}}_{B/A} &= -\ddot{\mathbf{u}}_{A/B} && (2.14c) \end{aligned}}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

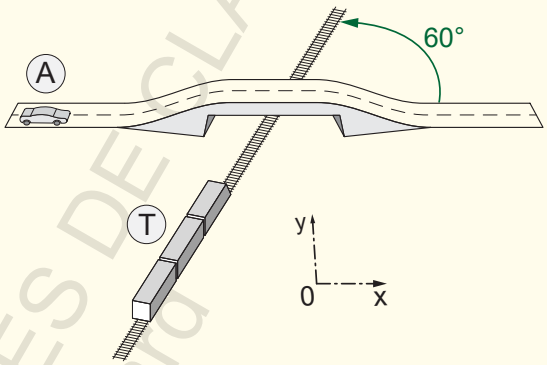
Una consecuencia importante de la Ecuación (2.13c) es que la aceleración de una partícula es la misma si se mide en un sistema con velocidad constante $\ddot{\mathbf{u}}_B = \mathbf{0}$ o en un sistema fijo, i.e., $\ddot{\mathbf{u}}_A = \ddot{\mathbf{u}}_{A/B}$.

Es decir, cualquier sistema que se mueve con velocidad constante es un *sistema inercial* y sirve para determinar aceleraciones.

APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

Un automóvil se aproxima a un paso sobrenivel ferroviario. El auto y el tren se mueven a velocidad constante de $100\,\text{km/h}$ y $72\,\text{km/h}$, respectivamente. Determine la velocidad y rapidez del tren desde la perspectiva del automóvil.



Las velocidades del automóvil y tren medidas desde el sistema de referencia absoluto son:

$$\dot{\mathbf{u}}_a = 100\,\hat{\mathbf{i}}\ \text{km/h}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_t &= 72\cos(60°)\,\hat{\mathbf{i}} + 72\sin(60°)\,\hat{\mathbf{j}} \\ &= 36\,\hat{\mathbf{i}} + 62{,}3538\,\hat{\mathbf{j}}\ \text{km/h}\end{aligned}$$

Luego, utilizando las ecuaciones de movimiento relativo despejamos el vector de interés $\dot{\mathbf{u}}_{t/a}$. Es decir:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t/a} = \dot{\mathbf{u}}_t - \dot{\mathbf{u}}_a = \begin{Bmatrix}36\\62{,}3538\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}100\\0\end{Bmatrix} = -64\,\hat{\mathbf{i}} + 62{,}3538\,\hat{\mathbf{j}}\ \text{km/h}$$

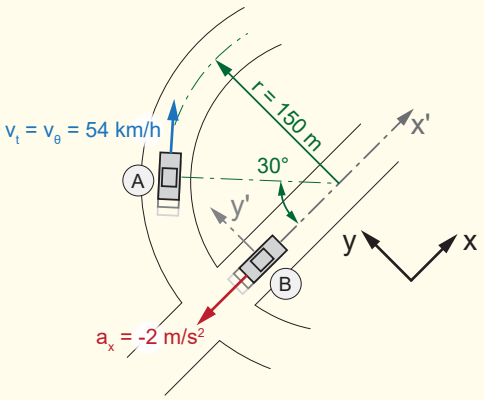
La magnitud de la velocidad (rapidez) es:

$$v_{t/a} = \left|\dot{\mathbf{u}}_{t/a}\right| = \sqrt{(-64)^2 + (62{,}3538)^2} = \sqrt{7984} = 89{,}3532\,\text{km/h}$$

Ejemplo

Basado en Meriam 7th ed, Problem 2/184

El automóvil A avanza por la rotonda a velocidad constante e igual a $54\,\text{km/h}$. El automóvil B está desacelerando a $2\,\text{m/s}^2$ Determine la magnitud de la aceleración que tiene el automóvil A para un observador en el automóvil B.



Para simplificar los cálculos, se orienta el eje x' según la trayectoria del automóvil B. Con ello, la aceleración de dicho automóvil es:

$$\ddot{\mathbf{u}}_B = -2\,\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}^2$$

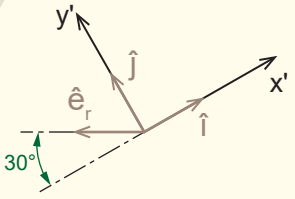
El automóvil B, pese a estar moviéndose a velocidad constante (en realidad lo hace a rapidez constante, ya que el vector cambia de dirección), está acelerando ya que el vector de velocidad cambia de dirección. Usando coordenadas polares, la aceleración que experimenta es clara:

$$\ddot{\mathbf{u}}_A = \left(\overbrace{\ddot{r}}^{0} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(\overbrace{r\,\ddot{\theta}}^{0} + \overbrace{2\,\dot{r}\,\dot{\theta}}^{0}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta = -r\,\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_r = -r\left(\frac{v_t}{r}\right)^2\hat{\mathbf{e}}_r = -\frac{v_\theta^2}{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

El único término de la aceleración es la *aceleración centrípeta*, cuyo signo negativo indica que apunta hacia el centro de la rotonda. Por otro lado, sabemos que $54\,\mathrm{km/h} = 15\,\mathrm{m/s}$, y con ello:

$$\ddot{\mathbf{u}}_A = -\frac{v_\theta^2}{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r = -\frac{15^2}{150}\,\hat{\mathbf{e}}_r = -1{,}5\,\hat{\mathbf{e}}_r\ \mathrm{m/s^2}$$

La aceleración del automóvil A está en coordenadas cartesianas, mientras que la aceleración del automóvil B está en coordenadas polares: no podemos comparar ambas si están en sistemas diferentes. Llevaremos la aceleración del automóvil B (en coordenadas polares) a coordenadas cartesianas escribiendo los vectores base polares en términos de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$. En realidad, sólo necesitamos $\hat{\mathbf{e}}_r$ en este problema específico y sabemos que $\theta = 30°$ medidos desde el eje $-x$ en sentido del reloj, como muestra la Figura al costado:



$$\hat{\mathbf{e}}_r = -\cos(30°)\,\hat{\mathbf{i}} + \sin(30°)\,\hat{\mathbf{j}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{j}}$$

Con ello, la aceleración en coordenadas cartesianas es:

$$\ddot{\mathbf{u}}_A = -1{,}5\,\hat{\mathbf{e}}_r = (-1{,}5)\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\,\hat{\mathbf{j}}\right] = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{4}\,\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s^2}$$

Usando las ecuaciones de movimiento relativo, tenemos que:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_{A/B} &= \ddot{\mathbf{u}}_A - \ddot{\mathbf{u}}_B \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{4}\,\hat{\mathbf{j}} - \left(-2\,\hat{\mathbf{i}}\right) = \left(\frac{8+3\sqrt{3}}{4}\right)\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{4}\,\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s^2}\end{aligned}$$

Finalmente, la magnitud es:

$$a_{A/B} = \left|\ddot{\mathbf{u}}_{A/B}\right| = \sqrt{\left(\frac{8+3\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{-3}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{25+12\sqrt{3}} = 3{,}3832\ \mathrm{m/s^2}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Sugerido

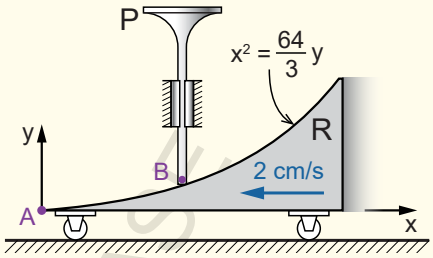
Vuelva a resolver el problema anterior, pero sin inclinar los ejes x e y.

En este caso se tiene que $\ddot{\mathbf{u}}_B = (-2)\left[\cos(30°)\,\hat{\mathbf{i}} + \sin(30°)\,\hat{\mathbf{j}}\right] = -\sqrt{3}\,\hat{\mathbf{i}} - 1\,\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s^2}$
La aceleración $\ddot{\mathbf{u}}_A$ en coordenadas polares no cambia, pero ahora $\hat{\mathbf{e}}_r = -1\,\hat{\mathbf{i}}$

Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Example 1.10

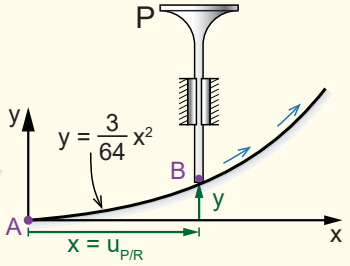
La rampa R tiene una curva definida por una parábola $x^2 = \frac{64}{3}y$. La rampa se mueve a la izquierda con velocidad constante $v_R = -2\,\text{cm/s}$. Su punta B se apoya sobre la rampa de modo que un movimiento de la rampa fuerza al pistón a subir. El pistón P, comienza con su punta B en contacto con el inicio de la rampa en A. Determine la aceleración del pistón.



La rampa se mueve hacia la izquierda con respecto al suelo que un sistema de referencia fijo. El pistón también está fijo en el sentido $\hat{\mathbf{i}}$, y la rampa se mueve bajo el mismo. Usando movimiento relativo se puede tomar la rampa como un sistema de referencia. La velocidad con que se "mueve" el pistón para un observador en la rampa es:

$$\dot{x} = (\dot{u}_x)_{P/R} = (\dot{u}_x)_P - (\dot{u}_x)_R = 0 - (-2)\,\hat{\mathbf{i}} = 2\,\hat{\mathbf{i}}\ \text{cm/s}$$

Es decir, el pistón se "mueve" a la derecha respecto a la rampa y producto de ello "sube" por la parábola, como muestra la Figura al costado. Como la rampa no se mueve verticalmente, una velocidad en el eje $\hat{\mathbf{j}}$ del pistón es igual a su velocidad absoluta:



$$\dot{y} = (\dot{u}_y)_{P/R} = (\dot{u}_y)_P - (\dot{u}_y)_R = (\dot{u}_y)_P$$

No tenemos información directa de cómo sube el pistón, pero sí de cómo sube respecto a un movimiento horizontal. Usando la regla de la cadena:

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{3}{64}x^2\right](2) = \frac{3}{16}x\ \text{cm/s}$$

Podemos utilizar nuevamente la regla de la cadena para obtener la segunda derivada (aceleración):

$$\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}x}\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{3}{16}x\right](2) = \frac{3}{8}\ \text{cm/s}^2$$

Es decir, el pistón se eleva con aceleración $a_y = 0{,}375\,\text{cm/s}^2$, y no tiene aceleración horizontal asociada.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard