PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Dinámica
Segundo Semestre 2018

Interrogación 02

Duración total: 150 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de éste. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

   Adulterar el acta de asistencia

   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Reglas preguntas de selección múltiple:

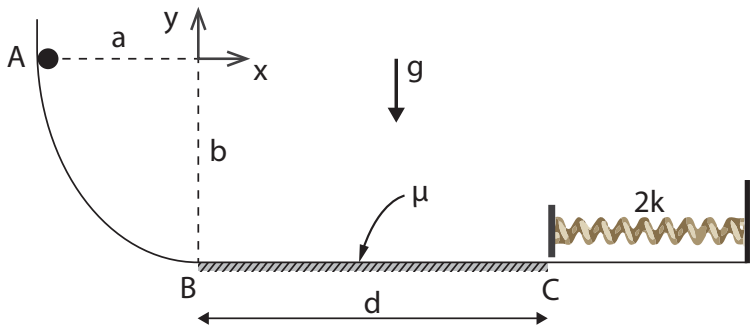
1. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
2. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** 1/4 **de punto**.
3. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).

Problema 1 [1 punto]

Una partícula de masa m desliza por una rampa cuya forma está definida por la ecuación:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

La partícula parte desde el reposo en el punto A y al alcanzar el punto B sigue deslizando sobre una superficie horizontal rugosa de largo d para finalmente chocar con la plataforma de masa despreciable que está fija a dos resortes, como indica la figura. Como resultado del impacto, la partícula se detiene cuanto el resorte se comprime una distancia s. Considerando que la constante elástica del resorte es $2k$, calcule el coeficiente de roce cinético μ que debe existir entre la partícula y la superficie horizontal entre los puntos B y C.



a) $\mu = \dfrac{b}{mgd} - \dfrac{ks^2}{b}$

b) $\mu = \dfrac{b}{d} - \dfrac{ks^2}{mgd}$

c) $\mu = \dfrac{d}{ks^2} + \dfrac{s^2}{kmg}$

d) $\mu = \dfrac{d}{b} - \dfrac{s^2}{2kmg}$

e) $\mu = \dfrac{d}{b} + \dfrac{s^2}{2kmg}$

Solución

Usando conservación de energía con el trabajo de las fuerzas no-conservativas (pérdida de energía), entre los puntos A y el punto con el resorte comprimido (pasado el punto C), se obtiene:

$$V_1 + T_1 + U^{\star}_{12} = V_2 + T_2$$

$$mgb + 0 - (\mu N)(d) = \frac{1}{2}(2k)s^2 + 0$$

, donde $N = mg$. Se obtiene finalmente:

$$mgb - \mu mgd = ks^2$$

$$\mu = \frac{b}{d} - \frac{ks^2}{mgd}$$

Problema 2 [1 punto]

Un extraterrestre se cae de su platillo volador dentro de la atmósfera de un planeta. En este planeta, el peso es igual que en la tierra, es decir tiene magnitud mg. La atmósfera de este planeta ejerce una fuerza de roce viscoso dada por ke^{2v}, donde v es la rapidez y k es una constante positiva. Determine la velocidad terminal v_{term} que alcanza el extraterrestre al caer.

a) $v_{\text{term}} = \ln \dfrac{mg}{2k}$

b) $v_{\text{term}} = \ln \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$

c) $v_{\text{term}} = \ln \left(\dfrac{mg}{k}\right)^2$

d) $v_{\text{term}} = \ln \dfrac{2mg}{k}$

e) $v_{\text{term}} = \dfrac{mg}{2k}$

Solución

Para obtener la velocidad terminal no es necesario resolver la ecuación diferencial, y se puede obtener igualando la fuerza de roce al peso:

$$\begin{aligned} ke^{2v_{\text{term}}} &= mg \\ 2v_{\text{term}} &= \ln \frac{mg}{k} \\ v_{\text{term}} &= \frac{1}{2} \ln \frac{mg}{k} \\ v_{\text{term}} &= \ln \sqrt{\frac{mg}{k}} \end{aligned}$$

Problema 3 [1 punto]

Dos partículas $P1$ y $P2$, de masas m y $2m$ respectivamente, se encuentran inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin roce. Si en cierto instante, sobre la partícula $P1$ actúa una fuerza de módulo constante $2F$ y sobre la partícula $P2$ actúa una fuerza de módulo constante F, ambas en la misma dirección y sentido ¿cuál es la razón entre sus energías cinéticas trascurrido un intervalo de tiempo Δt?

a) 1

b) 2

c) 4

d) 8

e) 16

Solución

La partícula $P1$ acelerará con:

$$a_1 = \frac{f_1}{m_1} = \frac{2F}{m}$$

, mientras que la partícula $P2$ lo hará con:

$$a_2 = \frac{f_2}{m_2} = \frac{F}{2m}$$

Transcurrido un Δt, ambas tendrán velocidades:

$$v_1 = \frac{2F}{m}(\Delta t) \qquad \text{y} \qquad v_2 = \frac{F}{2m}(\Delta t)$$

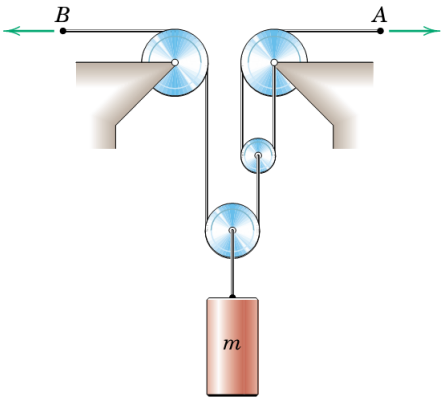
La razón entre sus energías cinéticas es:

$$R = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_2 v_2^2} = \frac{\frac{1}{2}(m)\left(\frac{2F}{m}(\Delta t)\right)^2}{\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{F}{2m}(\Delta t)\right)^2}$$

$$R = \frac{2}{1/4} = 8$$

Problema 4 [1 punto]

En el sistema de poleas mostrado en la figura, cada uno de los cables en A y B se tira con una velocidad de $2\,m/s$ en el sentido indicado por la flecha respectiva. El módulo de la velocidad ascendente v de la carga m está dado por:



a) $v = 2\,m/s$

b) $v = 4\,m/s$

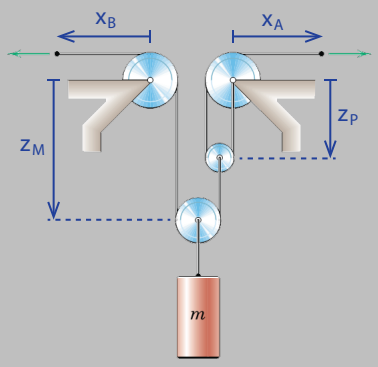
c) $v = 3\,m/s$

d) $v = 1{,}5\,m/s$

e) $v = 0{,}5\,m/s$

Solución

Se definen posiciones en el esquema que permiten definir los largos de las cuerdas:



Notar que en el sentido en que se definieron las posiciones x_A y x_B, del enunciado sabemos que $\dot{x}_A = 2\,m/s$ y $\dot{x}_B = 2\,m/s$ (ambas positivas). Los largos de las cuerdas son:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= x_B + z_M + (z_M - z_P) + \text{cte} \\ L_2 &= 2z_P + x_A + \text{cte} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \dot{x}_B + 2\dot{z}_M - \dot{z}_P \\ 0 &= 2\dot{z}_P + \dot{x}_A \end{aligned}$$

, donde eliminando la posición (velocidad) auxiliar de la polea, se obtiene:

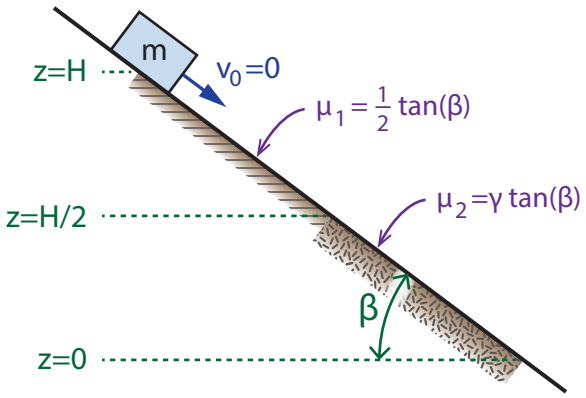
$$\dot{z}_M = -\frac{1}{2}\dot{x}_B - \frac{1}{4}\dot{x}_A$$

, y reemplazando valores los $\dot{x}_A = 2\,m/s$ y $\dot{x}_B = 2\,m/s$, se obtiene:

$$\dot{z}_M = -\frac{1}{2}(2) - \frac{1}{4}(2) = -\frac{3}{2} = -1{,}5\,m/s \qquad \text{(la masa sube)}$$

Problema 5 [1 punto]

Un bloque de masa m se suelta desde el reposo por un plano inclinado con ángulo β respecto a la horizontal, desde una altura $z = H$. El primer y segundo tramo de la superficie de deslizamiento, ambos de igual longitud, tienen coeficientes de roce $\mu_1 = (1/2) \cdot \tan(\beta)$ y $\mu_2 = \gamma \cdot \tan(\beta)$, respectivamente. Determine el valor de γ para que el bloque llegue con velocidad nula a $z = 0$.



a) $\gamma = \dfrac{7}{4}$

b) $\gamma = 2$

c) $\gamma = \dfrac{5}{4}$

d) $\gamma = \dfrac{4}{3}$

e) $\gamma = \dfrac{3}{2}$

Solución

Llamando d al trayecto (total) recorrido por el bloque, y usando el principio de conservación de energía incluyendo el trabajo de fuerzas no-conservativas:

$$V_1 + T_1 + U_{12}^{\star} = V_2 + T_2$$

$$mg(H) + 0 - \left[(\mu_1 N)\left(\frac{d}{2}\right) + (\mu_2 N)\left(\frac{d}{2}\right)\right] = mg(0) + 0$$

$$mgH = (N)\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\tan(\beta) + \gamma\tan(\beta)\right)$$

, pero de la geometría del problema se tiene que $d = {}^{H}/_{\sin\beta}$, y además $N = mg\cos\beta$. Con ello:

$$mgH = (mg\cos\beta)\left(\frac{H}{2\sin\beta}\right)\left(\frac{1}{2}\tan(\beta) + \gamma\tan(\beta)\right)$$

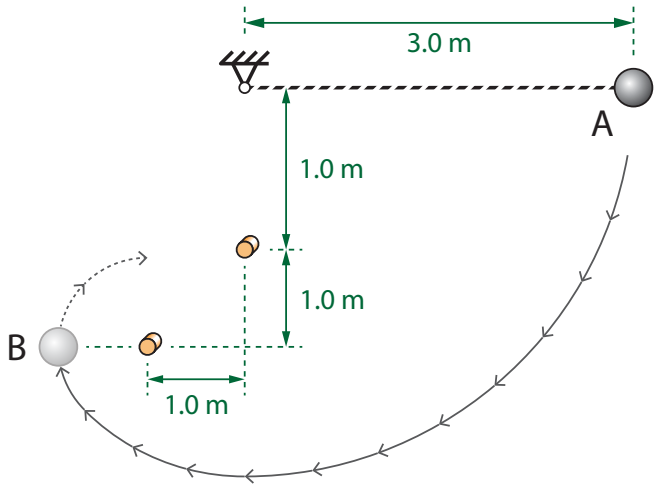
$$mgH = \frac{mgH}{2}\left(\frac{1}{2} + \gamma\right)$$

$$2 = \frac{1}{2} + \gamma$$

$$\gamma = \frac{3}{2}$$

Problema 6 [1 punto]

Un péndulo ideal de masa m cae desde el plano horizontal (indicado como A en la figura). El su caída, la cuerda golpea 2 *pines* (palitos), con lo que la cuerda llega a la posición indicada como B. Si la masa comenzó inicialmente en reposo; ¿Cuál será su velocidad tangencial en B?



a) $v_t = 2\sqrt{g}$

b) $v_t = \sqrt{2}\sqrt{g}$

c) $v_t = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{g}$

d) $v_t = \sqrt{2\sqrt{2}-2}\sqrt{g}$

e) $v_t = \sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{g}$

Solución

Usando el principio de conservación de energía:

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$
$$mg\,(3) + 0 = mg\,(3-2) + \frac{1}{2}mv_t^2$$
$$2mg = \frac{1}{2}mv_t^2$$
$$v_t^2 = 4g$$
$$v_t = 2\sqrt{g}$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Estática & Dinámica
Segundo Semestre 2018

Interrogación 02
Preguntas de desarrollo

Duración: 150 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado en su respuesta.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de éste. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

   Adulterar el acta de asistencia

   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Reglas preguntas de desarrollo:

1. Está permitido el uso de lápiz mina en las preguntas de desarrollo pero pierde el derecho a recorrección.

Nombre: _____

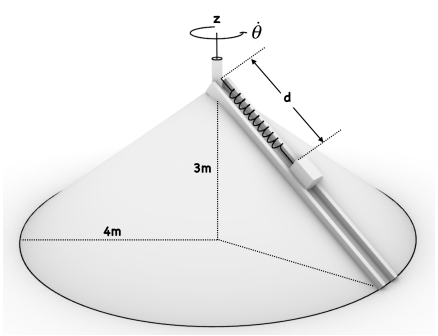
RUT: _____

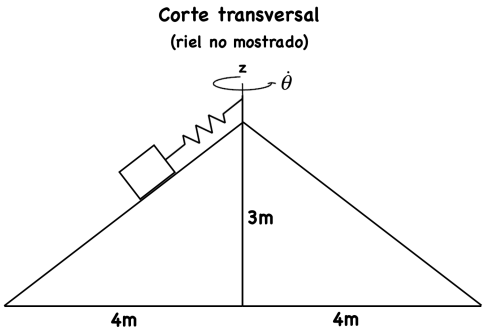
N lista: _____

Problema 1 [7 puntos]

Nota: suponga $g = 10$ m/s^2 para todo el problema.

Se tiene un bloque de masa $m = 5$ kg sobre la superficie de un cono, como muestra la figura. El bloque está amarrado a un punto sobre la punta del cono con un resorte de constante $k = 30$ N/m y longitud natural $l_0 = 2$ m. El cono puede girar respecto al eje z con una velocidad angular constante $\dot{\theta}$. El riel que rodea el bloque lo obliga a rotar a la misma velocidad angular que el cono. Sin embargo, no hay roce entre el bloque y el cono o el riel, por lo que el bloque se puede mover libremente a lo largo del riel.

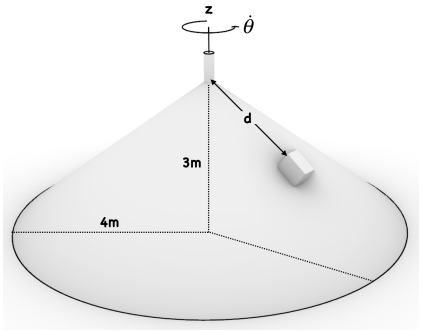




a) Determine la longitud total del resorte d para el caso en el que $\dot{\theta} = 0$ [2 puntos]

b) Determine la longitud total del resorte d para el caso en el que el cono gira a una velocidad angular constante $\dot{\theta} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ rad/s [2 puntos]

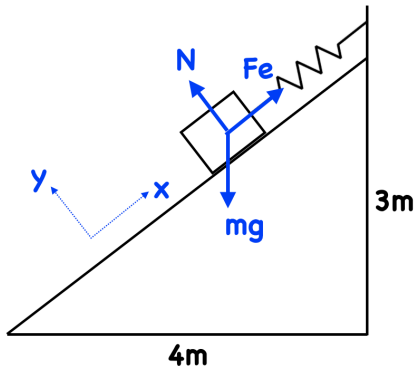
Ahora considere que se quita el riel, se desconecta el resorte, y entre el bloque y el cono hay un coeficiente de roce estático $\mu_e = \frac{4}{5}$ (ver siguiente figura).



c) Si el bloque se posiciona a una distancia $d = 1$ m, determine la velocidad angular máxima a la que puede rotar el cono para que el bloque no deslice sobre el cono [3 puntos]

Solución 1

a) El diagrama de fuerzas para el bloque en el caso de $\dot{\theta} = 0$ nos queda:



(0.75 pts. por considerar las 3 fuerzas en la dirección correcta, mismo si después se equivocó en las magnitudes).

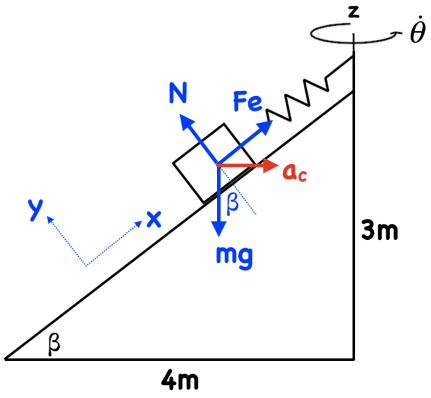
La longitud total del cono (es decir el máximo valor de d posible) está dada por $\sqrt{3^2+4^2} = 5$ m (0.25 pts.). Por ende, $\cos\beta = \frac{4}{5}$ y $\sin\beta = \frac{3}{5}$. Orientamos los ejes como mostrado ya que así sólo nos debemos preocupar por la dirección x. El balance de fuerzas en esa dirección nos queda:

$$\Sigma F_x : -mg\sin\beta + k(d - l_0) = 0 \text{ (0.75 pts.)}$$

por lo que llegamos a

$$\begin{aligned} d &= \frac{3mg}{5k} + l_0 \\ d &= \frac{3}{5(30)}(5)(10) + 2 \\ d &= 3 \text{ m (0.25 pts.)} \end{aligned}$$

b) El diagrama de fuerzas ahora nos queda:



(0.5 pts. por considerar las 3 fuerzas en la dirección correcta y 0.5 pts. por considerar la aceleración centrípeta en la dirección correcta, mismo si después se equivocó en las magnitudes).

La diferencia es que como el bloque está en movimiento circular en torno al eje z, debe haber una aceleración centrípeta a_c de magnitud $R\dot{\theta}^2$, con $R = d\cos\beta$. El balance de fuerzas en la dirección x nos queda:

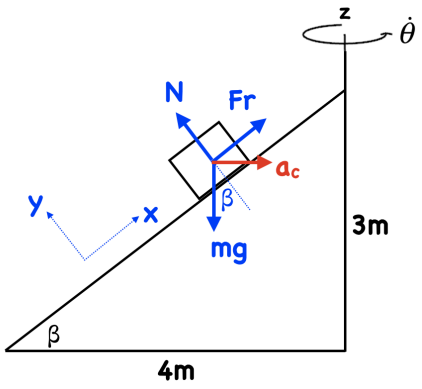
$$\Sigma F_x : -mg\sin\beta + k(d - l_0) = mR\dot{\theta}^2\cos\beta \text{ (0.75 pts.)}$$

que nos deja con:

$$\begin{aligned} -\frac{3mg}{5} + kd - kl_0 &= \frac{4}{5}mR\dot{\theta}^2 \\ -30 + 30d - 60 &= \frac{4}{5}(5)\frac{4d}{5}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 \\ 30d - 90 &= 10d \end{aligned}$$

por lo que concluimos que $d = 4.5$ m. (0.25 pts.)

c) El diagrama de fuerzas para el bloque queda:



(0.5 pts. por considerar las 3 fuerzas en la dirección correcta y 0.5 pts. por considerar la aceleración centrípeta en la dirección correcta, mismo si después se equivocó en las magnitudes).

Aquí consideramos el caso extremo, en el que la fuerza de roce es máxima ($F_r = \mu_e N$) (0.25 pts.). Ahora necesitamos considerar ambas dimensiones en el balance de fuerzas:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y : N - mg\cos\beta &= -mR\dot{\theta}^2_{\max}\sin\beta \text{ (0.5 pts.)} \\ \Sigma F_x : -mg\sin\beta + \mu_e N &= mR\dot{\theta}^2_{\max}\cos\beta \text{ (0.5 pts.)} \end{aligned}$$

En este caso $R = \frac{4}{5}$ m ya que $d = 1$ m. De la primera ecuación obtenemos $N(\dot{\theta}_{\max})$:

$$\begin{aligned} N &= -5\frac{4}{5}\dot{\theta}^2_{\max}\frac{3}{5} + 5(10)\frac{4}{5} \\ N &= -\frac{12}{5}\dot{\theta}^2_{\max} + 40 \text{ (0.25 pts.)} \end{aligned}$$

Remplazando esto en la segunda ecuación llegamos a:

$$-30 + \frac{4}{5}(-\frac{12}{5}\dot{\theta}^2_{\max} + 40) = \frac{16}{5}\dot{\theta}^2_{\max}$$

de donde concluimos que:

$$\begin{aligned} \frac{128}{25}\dot{\theta}^2_{\max} &= 2 \\ \dot{\theta}_{\max} &= \sqrt{\frac{25}{64}} \text{ rad/s (0.5 pts.)} \end{aligned}$$

Nombre: _____

RUT: _____

N lista: _____

Problema 2 [5 puntos]

Nota: suponga $g = 10$ m/s^2 para todo el problema.

Un bloque de masa $m = 1$ kg está conectado a un bloque de masa $M = 2$ kg por una cuerda ideal que pasa sobre una polea ligera que rota sin fricción. La masa M está amarrada al extremo de un resorte que tiene una masa despreciable y una constante de fuerza $k = 2$ N/m. El otro extremo del resorte está amarrado al piso. El resorte no está estirado cuando el sistema está como se muestra en la figura, es decir cuando M está a $L = 3$ m por encima de piso.

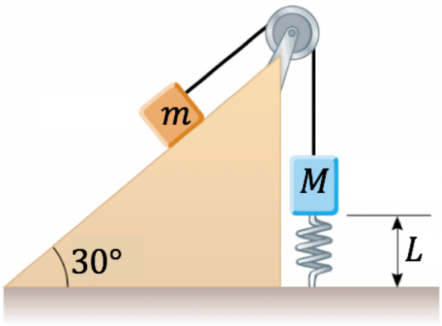


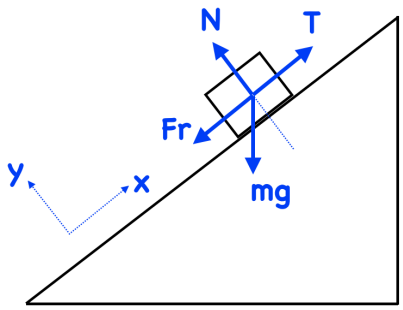
Figura 1

a) Si el coeficiente de fricción cinético es $\mu = 1/\sqrt{3}$, y el sistema se suelta desde el reposo cuando M está a $3L$ del suelo, ¿Cuánto trabajo hace el roce hasta que M se encuentra a la distancia L del suelo? [2 puntos]

b) Ahora suponga que la masa m se tira hacia abajo del plano inclinado de modo que M esté a $2L$ por encima del piso, y se libera del reposo. Suponiendo que no hay fricción entre la masa m y el plano inclinado, encuentre la velocidad de cada bloque cuando M esté L metros por encima del piso (es decir, cuando el resorte no esté estirado) [3 puntos]

Solución 2

a) Debido a que están atados con la misma cuerda, los bloques se mueven con la misma rapidez. Por ende, cuando el bloque M ha bajado $2L$, el bloque m ha subido la misma distancia (0.25 pts). La fuerza de roce va en la misma dirección pero con sentido opuesto al movimiento, como se ve en el diagrama de cuerpo libre del bloque m:



Puesto que la fuerza de roce es constante, su trabajo está dado por:

$$W_{F_r} = F_r d \cos\phi, \text{ (0.5 pts.)}$$

donde F_r es la magnitud de la fuerza de roce, d es el desplazamiento, y $\cos\phi$ es el ángulo que hace la fuerza respecto al movimiento. El balance de fuerzas en la dirección y nos deja con:

$$N - mg\cos 30 = 0 \rightarrow N = \frac{\sqrt{3}mg}{2}.$$

por lo que $F_r = \mu N = \frac{mg}{2} = 5$ N (0.5 pts). Nos queda entonces que:

$W_{F_r} = 5 \times 2 \times 3 \times (-1) = -30$ J. (0.5 pts. por magnitud y 0.25 pts. por signo.)

b) Como no hay roce, la energía mecánica se conserva y llegamos a

$$\Delta K + \Delta U = 0 \text{ (0.6 pts)}$$

Cuando el bloque M baja L en la dirección vertical, el bloque m sube $L\sin 30$. Por ende, el cambio de energía potencial gravitatoria para los dos bloques es

$$\Delta U_g = -MgL + mgL\sin 30 = -(2)(10)(3) + (1)(10)\frac{3}{2} = -45 \text{ } J. \text{ (0.6 pts)}$$

Puesto que en la posición final el resorte está en equilibrio y que en la posición inicial el resorte está alargado una distancia $2L - L = L$, el cambio de energía potencial elástica está dado por

$$\Delta U_e = 0 - \frac{1}{2}k(L)^2 = -9 \text{ } J. \text{ (0.6 pts)}$$

Por último, el cambio de energía cinética está dado por

$$\Delta K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}v^2 \text{ (0.6 pts)},$$

ya que los dos bloques se mueven con la misma rapidez v. Juntando todo llegamos a:

$$\frac{3}{2}v^2 - 45 - 9 = 0$$
$$\rightarrow v = 6 \text{ m/s} \text{ (0.6 pts)}$$