PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2024

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Control 02 – Pauta

Duración total: 70 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de ésta. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:
   - Cometer fraude en la evaluación.
   - Adulterar el acta de asistencia.
   - Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas.
   - Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica.
   - Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Nota El control 02 consideraba 3 formas diferentes. La presente pauta de solución contiene la solución de todos los problemas utilizados.

Problema 1 [3.0 puntos]

Se dispara un bala al aire a una velocidad inicial v_0 (Figure 1). Luego de alcanzar su máxima altura, cuando vuelve a una altura H por sobre el nivel de lanzamiento, ya ha perdido la mitad de su energía inicial producto del roce con el aire. Calcule la velocidad de la bala en dicho instante.

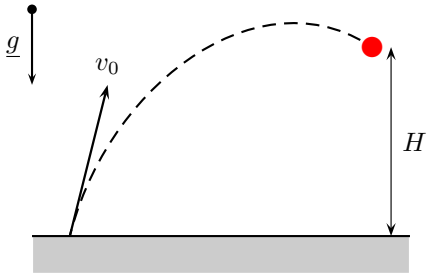


Figura 1: Bala disparada al aire

Solución

Tomando la referencia a nivel del suelo, cuando se efectúa el disparo (momento inicial) sólo hay energía cinética:

$$T_i = \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$$

Cuando alcanza el punto solicitado (momento final), existe una energía cinética y potencial de

$$T_f = \frac{1}{2}\, m\, v^2 \qquad \text{y} \qquad V_{gf} = m\, g\, H$$

De enunciado se tiene que la energía pérdida por roce del aire (trabajo externo no conservativo) es la mitad de la energía inicial:

$$U^*_{i-f} = -\frac{1}{2}\, T_i = -\frac{1}{4}\, m\, v_0^2$$

Aplicando el principio de trabajo y energía entre el instante inicial y final se obtiene la velocidad pedida:

$$\begin{aligned} T_i + V_{gi} + U^*_{i-f} &= T_f + V_{gf} \\ \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 + 0 - \frac{1}{4}\, m\, v_0^2 &= \frac{1}{2}\, m\, v^2 + m\, g\, H \\ v_0^2 &= 2\, v^2 + 2\, g\, H \\ v &= \sqrt{\frac{v_0^2}{2} - 2\, g\, H} \end{aligned}$$

Problema 2 [3.0 puntos]

Considere el sistema de la Figura 2. Las cuerdas y poleas son ideales. El coeficiente de roce entre la masa M y el plano inclinado es μ. Asumiendo que se cumplen las condiciones para que la masa m descienda, obtenga la aceleración del bloque M.

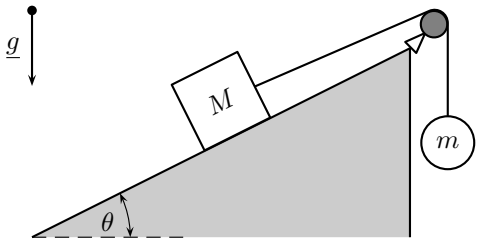


Figura 2: Sistema de polea–masas en un plano inclinado

Solución

Asumiendo que la masa m desciende, el bloque M debe subir. Suponiendo que la cuerda es inextensible, se utilizan ejes en dirección a cada masa con origen en la polea fija (i.e. dirección positiva x_1 $\swarrow$ para la masa M y x_2 positiva $\downarrow$ para la masa m), en base a esto se tiene la condición de ligadura:

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 \tag{1}$$

La aplicación de la 2^{da} ley de Newton se hará en base a los ejes definidos anteriormente. Tomando el equilibrio sobre el bloque M en la dirección normal al plano de deslizamiento se obtiene que $N = Mg\cos(\theta)$. Si la tensión en la cuerda es T, aplicando 2^{da} ley de Newton en la dirección x_1 se obtiene:

$$\sum f_{x_1} \ : \ -T + M\,g\,[\mu\cos(\theta) + \sin(\theta)] = M\,\ddot{x}_1 \tag{2}$$

Considerando ahora un diagrama de cuerpo libre en la masa suspendida y utilizando 2^{da} ley de Newton se obtiene:

$$\sum f_{x_2} \ : \ m\,g - T = m\,\ddot{x}_2 \tag{3}$$

Luego, utilizando la condición de ligadura (1), despejando T y combinando las expresiones (2) y (3) se obtiene la aceleración del bloque M:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\frac{m\,g - M\,g\,[\mu\cos(\theta) + \sin(\theta)]}{M+m} \\ &= \frac{m\,g - M\,g\,[\mu\cos(\theta) + \sin(\theta)]}{M+m} \quad (\nearrow)\end{aligned}$$

Problema 3 [3.0 puntos]

Dos resortes ideales idénticos, de constante de rigidez k, sostienen una piedra que se dispara verticalmente desde una posición H por debajo del nivel donde se ubican los resortes tal como se indica en la Figura 3. El largo natural de los resortes es l_0 y corresponde exactamente al largo cuando se ubican en posición horizontal. Obtenga el valor de la velocidad de la piedra cuando los resortes recuperan su largo indeformado. Asuma que inicialmente la piedra se encuentra estática.

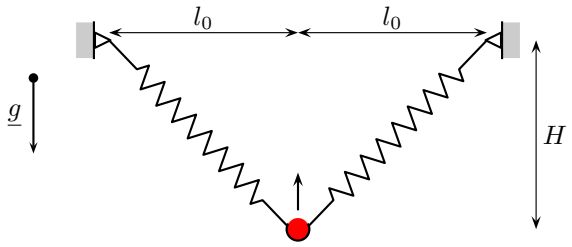


Figura 3: Piedra en honda o resortera

Solución

Tomando la referencia en el extremo superior de los resortes, antes de soltar la piedra (instante inicial) existe una energía potencial ligada a los resortes y a la gravedad:

$$V_{gi} = -m\,g\,H \quad \text{y} \quad V_{ei} = 2 \times \frac{1}{2}\,k\left(\sqrt{H^2 + l_0^2} - l_0^2\right)^2$$

Una vez que la piedra se suelta y se alcanza la posición horizontal (instante final), desaparece la energía potencial gravitatoria y la elástica pues los resortes alcanzan su largo indeformado, sin embargo la piedra tiene velocidad y por lo tanto energía cinética

$$T_f = \frac{1}{2}mv^2$$

Debido a que no hay presencia de fuerzas no conservativas, aplicando conservación de energía entre el instante inicial y final se obtiene:

$$T_i + V_{gi} + V_{ei} = T_f + V_{gf} + V_{ef}$$

$$0 - m\,g\,H + k\left(\sqrt{H^2 + l_0^2} - l_0^2\right)^2 = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

$$-2\,g\,H + \frac{2\,k}{m}\left(\sqrt{H^2 + l_0^2} - l_0^2\right)^2 = v^2$$

, por lo tanto, la velocidad de la piedra cuando los resortes recuperan su largo indeformado es:

$$v = \sqrt{\frac{2\,k}{m}\left(\sqrt{H^2 + l_0^2} - l_0^2\right)^2 - 2\,g\,H}$$

Problema 4 [3.0 puntos]

Un bloque entra con velocidad v_0 a una zona caracterizada por dos rugosidades asociadas a coeficientes de roce cinéticos μ_1 y μ_2. La longitud de cada tramo es L_1 y L_2, respectivamente, según se muestra en la Figura 4. Si en el punto A, su velocidad ya es la mitad de la inicial y se detiene justo en B, obtenga una expresión para la razón de rugosidades $\frac{\mu_1}{\mu_2}$

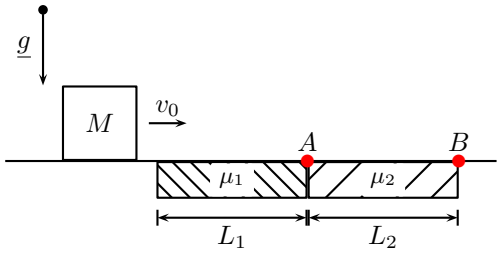


Figura 4: Rugosidades

Solución

Antes de ingresar a la zona rugosa (instante inicial), la energía cinética del bloque es:

$$T_i = \frac{1}{2} M\, v_0^2$$

En el punto A, esta ya se ha reducido al 50 % la velocidad de forma que

$$T_A = \frac{1}{2} M \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} M\, v_0^2$$

Luego, el trabajo efectuado por el roce en el primer tramo es de $U^*_{i-A} = -\Delta T = \frac{3}{8} m\, v_0^2$. Por equilibrio en sentido vertical, la normal es $N = Mg$ y luego igualando el trabajo no conservativo a la diferencia de energía cinética:

$$\mu_1\, M\, g\, L_1 = \frac{3}{8}\, m\, v_0^2 \qquad \rightarrow \qquad \mu_1 = \frac{3}{8} \frac{v_0^2}{g\, L_1}$$

Siguiendo el mismo razonamiento para el segundo tramo, se obtiene que

$$\mu_2 = \frac{1}{8} \frac{v_0^2}{g\, L_2}$$

Por lo tanto, la razón entre coeficientes de roce cinético o rugosidades resulta

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = 3\, \frac{L_2}{L_1}$$

Problema 5 [3.0 puntos]

Un bloque desliza por un tobogán semi-circular de radio R hasta alcanzar un plano horizontal. El bloque se suelta desde el reposo según se muestra en la Figura 5. Para frenar el bloque, se ha instalado a una distancia $\frac{3R}{4}$ del tobogán un resorte de rigidez k. El tobogán está lubricado de forma que tiene un roce despreciable, sin embargo en la superficie horizontal existe roce caracterizado por un coeficiente de roce cinético de μ. Obtenga el valor de la rigidez del resorte para que el resorte se deforme exactamente $\frac{R}{4}$ antes de detener al bloque.

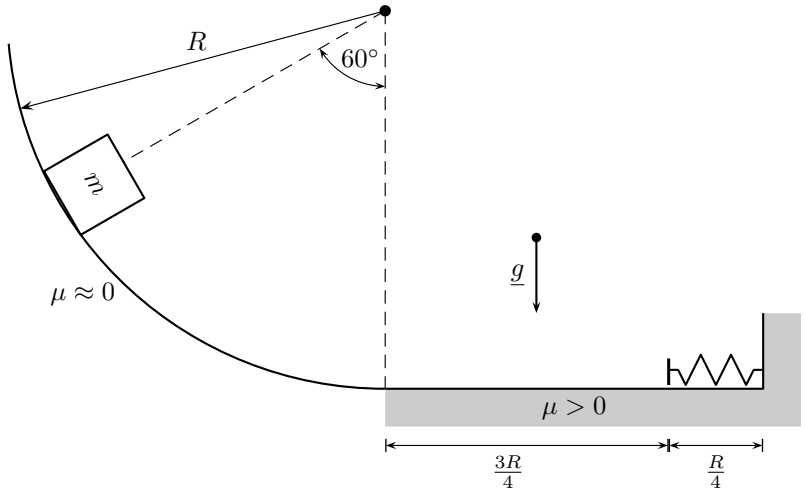


Figura 5: Tobogán

Solución

Ubicando la referencia al nivel del plano horizontal, inicialmente sólo hay energía potencial gravitatoria:

$$V_{gi} = m\,g\,[R - R\cos(60^\circ)] = \frac{1}{2}\,m\,gR$$

Cuando el bloque se detiene (instante final), sólo el resorte tiene energía potencial de deformación elástica:

$$V_{ef} = \frac{1}{2}\,k\left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{k\,R^2}{32}$$

El tramo horizontal, la normal se puede determinar tomando equilibrio en sentido vertical, entonces $N = mg$, luego la fuerza de roce es $F_R = \mu\,m\,g$ ($\leftarrow$). Por lo tanto, el trabajo ejercido en todo el trayecto horizontal será:

$$U^*_{i-f} = -\mu\,m\,g\left(\frac{3}{4}\,R + \frac{R}{4}\right) = \mu\,m\,g\,R$$

Finalmente, la diferencia entre la energía potencial gravitatoria inicial y la elástica cuando el bloque se detiene tiene que corresponder al trabajo efectuado por la fricción:

$$\frac{k\,R}{32} = \frac{m\,g\,R}{2} - \mu\,m\,g\,R = m\,g\left(\frac{1}{2} - \mu\right) \quad \rightarrow \quad k = 32\,\frac{m\,g}{R}\left(\frac{1}{2} - \mu\right)$$

Problema 6 [3.0 puntos]

Una masa ciíndrica puede deslizar a través de una guía horizontal sin roce. La masa está unida a un resorte de rigidez k como se indica en la Figura 6. Sea l_0 el largo indeformado o natural del resorte. Si la masa se suelta desde el reposo desde la posición inicial indicada en la Figura 6, determine su velocidad cuando cruza la posición vertical del resorte (punto A).

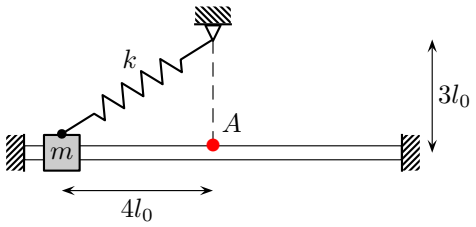


Figura 6: Masa deslizante

Solución

Como el largo indeformado del resorte es l_0, la energía potencial elástica inicial resulta igual a

$$V_{ei} = \frac{1}{2}\,k\,(5\,l_0 - l_0)^2 = \frac{1}{2}\,k(4\,l_0)^2 = 8\,k\,l_0^2$$

Cuando la masa pasa por la posición vertical, lleva energía cinética y potencial son:

$$T_f = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \qquad\qquad V_{ef} = \frac{1}{2}\,k(3\,l_0 - l_0)^2 = 2\,k\,l_0^2$$

Como no existen fuerzas no conservativas, por conservación de energía entre el instante inicial y el final se obtiene la velocidad en A:

$$\begin{aligned} T_i + V_{ei} &= T_f + V_{ef} \\ 0 + 8\,k\,l_0^2 &= \frac{1}{2}\,m\,v^2 + 2\,k\,l_0^2 \\ v^2 &= 16\,\frac{k}{m}\,l_0^2 - 4\,k\,l_0^2 \\ v &= l_0\sqrt{\frac{12\,k}{m}} \end{aligned}$$