PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2023

Examen

Duración total: 135 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. **Sólo se aceptarán preguntas de enunciado**. Si la pregunta no es de enunciado o una aclaración de este, no se le dará respuesta alguna.
5. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
6. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** 1/5 **de una respuesta correcta**.
7. Al finalizar el examen, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).
8. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y será calificado con la nota mínima. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

   Adulterar el acta de asistencia

   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Problema 1 [0.5 puntos]

Un carrete de cable flexible con una longitud total de 100 m y una masa de 1,2 $\mathrm{kg/m}$ ($\frac{6}{5}$ $\mathrm{kg/m}$) se despliega horizontalmente con ayuda de un carro de masa 40 kg (sin incluir el carrete). Un extremo del cable se fija en un poste en A, y el cable se desenrolla del carro saliendo de forma perfectamente horizontal. En determinado instante, el carro se mueve a 2 $\mathrm{m/s}$ cuando restan 30 m de cable en el carrete, y la tensión en el poste es de 2,4 N ($\frac{12}{5}$ N).

Determine la fuerza P necesaria para que el carro tenga una aceleración de 0,3 $\mathrm{m/s^2}$ ($\frac{3}{10}$ $\mathrm{m/s^2}$). Desprecie toda fricción.

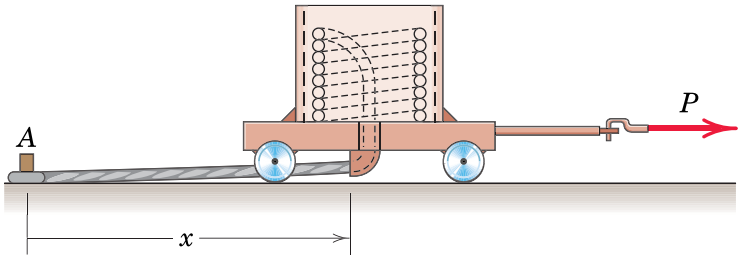
a) $P = \dfrac{102}{5}\,\mathrm{N}$

b) $P = \dfrac{203}{5}\,\mathrm{N}$

c) $P = \dfrac{71}{5}\,\mathrm{N}$

d) $P = 30\,\mathrm{N}$

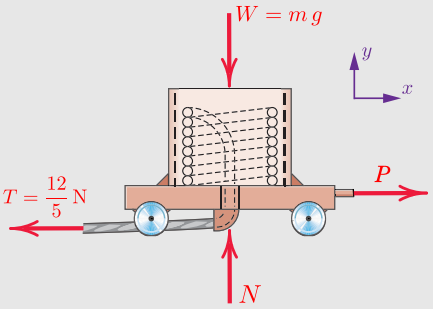
e) $P = 75\,\mathrm{N}$



Solución

En el instante mencionado, el carro cuenta con un largo de cuerda de 30 m, por lo que la masa total en este momento es:

$$\begin{aligned} m &= m_{\text{carro}} + m_{\text{cuerda}} \\ &= m_c + \rho\,\ell \\ &= (40\,\mathrm{kg}) + \left(\frac{6}{5}\,\mathrm{kg/m}\right)(30\,\mathrm{m}) \\ &= 76\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$



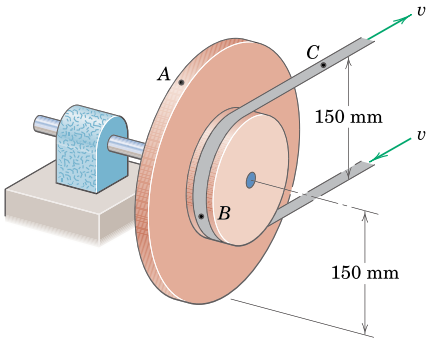
Como ρ del cable es constante, la variación de masa en ese instante es:

$$\dot{m} = -v_{c/e}\,\rho = -(2\,\mathrm{m/s})\left(\frac{6}{5}\,\mathrm{kg/m}\right) = -\frac{12}{5}\,\mathrm{kg/s}$$

Con ello, se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_i f_i &= m\,\dot{v} + v_{c/e}\,\dot{m} \\ -\frac{12}{5} + P &= (76)\left(\frac{3}{10}\right) + (2)\left(-\frac{12}{5}\right) \\ P &= \frac{(38)(3)}{5} - \frac{24}{5} + \frac{12}{5} \\ &= \frac{102}{5}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Problema 2 [0.5 puntos]



La polea mostrada en la figura está rotando con una velocidad angular creciente. En un cierto instante la velocidad v de la correa es $1{,}5\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}}$, y la aceleración total del punto A es $75\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$.

Para este instante, determine la aceleración del punto B.

a) $a_B = \dfrac{75}{2}\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$

b) $a_B = \dfrac{45}{2}\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$

c) $a_B = 75\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$

d) $a_B = \dfrac{15}{2}\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$

e) $a_B = 45\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$

Solución

El radio interior y exterior de la polea es:

$$r_o = \frac{150}{1000} = \frac{3}{20}\,\text{m} \qquad\qquad r_i = \frac{r_o}{2} = \frac{3}{40}\,\text{m}$$

La velocidad angular se obtiene a partir de la velocidad $v = 1{,}5 = {}^{3}/_{2}\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}}$:

$$v = r_i\,\omega \;\longrightarrow\; \omega = \frac{v}{r_i} = \frac{{}^{3}/_{2}}{{}^{3}/_{40}} = 20\,{}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$$

Del módulo de la aceleración, en coordenadas polares, del punto A se puede obtener la aceleración angular α:

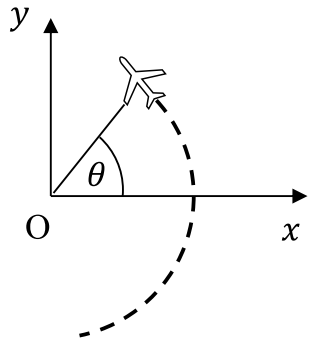
$$\begin{aligned}
a_A^2 &= (\ddot{r}_o - r_o\,\omega^2)^2 + (r_o\,\alpha + 2\,\dot{r}_o\,\omega)^2 \\
75^2 &= \left[0 - \left(\frac{3}{20}\right)(20)^2\right]^2 + \left[\left(\frac{3}{20}\right)(\alpha) + (2)(0)(20)\right]^2 \\
5625 &= 60^2 + \left(\frac{3}{20}\right)^2(\alpha)^2 \\
2025 &= \left(\frac{3}{20}\right)^2(\alpha)^2 \\
\alpha &= \frac{20}{3}\sqrt{2025} \\
&= \frac{(20)(45)}{3} \\
&= 300\,{}^{\text{rad}}/_{\text{s}^2}
\end{aligned}$$

La aceleración del punto B es entonces:

$$
\begin{aligned}
a_B &= \sqrt{(\ddot{r}_i - r_i\,\omega^2)^2 + (r_i\,\alpha + 2\,\dot{r}_i\,\omega)^2} \\
&= \sqrt{\left[0 - \left(\frac{3}{40}\right)(20)^2\right]^2 + \left[\left(\frac{3}{40}\right)(300) + (2)(0)(20)\right]^2} \\
&= \sqrt{(30)^2 + \left(\frac{45}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{900 + \frac{2025}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{5625}{4}} \\
&= \frac{75}{2}\ {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}^2}
\end{aligned}
$$

Problema 3 [0.5 puntos]

Un avión se está acercando a la pista de aterrizaje de un aeropuerto. La trayectoria del avión se puede representar usando coordenadas cilíndricas. El radio r de la trayectoria es 1000 m, $\dot{\theta}$ es 0,02 $^{\text{rad}}/_{\text{s}}$ y la velocidad de descenso vertical es $\dot{z} = -5\,^{\text{m}}/_{\text{s}}$.



Determine el módulo de la velocidad con que se mueve el avión.

a) $|\mathbf{v}| = \sqrt{425}\,^{\text{m}}/_{\text{s}}$

b) $|\mathbf{v}| = 20\,^{\text{m}}/_{\text{s}}$

c) $|\mathbf{v}| = \sqrt{125}\,^{\text{m}}/_{\text{s}}$

d) $|\mathbf{v}| = \sqrt{225}\,^{\text{m}}/_{\text{s}}$

e) $|\mathbf{v}| = \sqrt{1025}\,^{\text{m}}/_{\text{s}}$

Solución

Los datos de la trayectoria del avión son:

$$r = 1000\,\text{m} \qquad \dot{r} = 0\,^{\text{m}}/_{\text{s}}$$
$$\theta = 0{,}02\,t + C_1\,\text{rad} \qquad \dot{\theta} = 0{,}02\,^{\text{rad}}/_{\text{s}}$$
$$z = -5\,t + C_2\,\text{m} \qquad \dot{z} = -5\,^{\text{m}}/_{\text{s}}$$

La velocidad en coordenadas polares del avión es:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\,\hat{\mathbf{k}}$$

El módulo de la velocidad pedido es:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}| &= \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\,\dot{\theta})^2 + (\dot{z})^2} \\ &= \sqrt{0 + [(1000)(0{,}02)]^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{20^2 + 25} \\ &= \sqrt{425}\,^{\text{m}}/_{\text{s}} \end{aligned}$$

Problema 4 [0.5 puntos]

Un cilindro hueco de radio r y masa m se suelta desde el reposo en una superficie inclinada desde una altura $h = 20\,r$. El cilindro rueda sin deslizar. Determine la velocidad que tiene el centro de masa del cilindro (v_f) cuando este rueda en el tramo horizontal. El momento de inercia de un cilindro hueco es $\overline{I} = m\,r^2$.

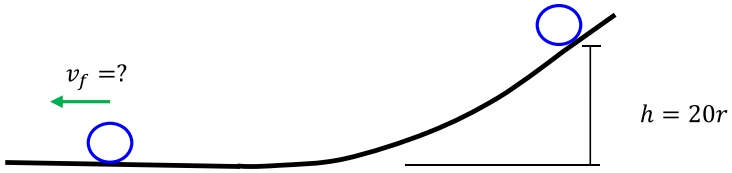
a) $v_f = \sqrt{20\,g\,r}$

b) $v_f = \sqrt{40\,g\,r}$

c) $v_f = \sqrt{10\,g\,r}$

d) $v_f = \sqrt{2\,g\,r}$

e) $v_f = \sqrt{6\,g\,r}$



Solución

Aplicando conservación de energía desde el estado de reposo (estado 1) hasta cuando está sobre la superficie horizontal (estado 2) se obtiene:

$$T_1 + V_1 + U_{12}^{*} = T_2 + V_2$$
$$0 + m\,g\,h + 0 = \frac{1}{2}\,m\,v_f^2 + \frac{1}{2}\,\overline{I}\,\omega^2$$

La condición de rodadura es:

$$v_f = r\,\omega \;\longrightarrow\; \omega = \frac{v_f}{r}$$

Reemplazando en la ecuación de energía:

$$20\,m\,g\,r = \frac{1}{2}\,m\,v_f^2 + \left(\frac{1}{2}\right)(m\,r^2)\left(\frac{v_f}{r}\right)^2$$
$$20\,m\,g\,r = \frac{1}{2}\,m\,v_f^2 + \frac{1}{2}\,m\,v_f^2$$
$$20\,m\,g\,r = m\,v_f^2$$
$$\sqrt{20\,g\,r} = v_f$$

Problema 5 [0.5 puntos]

El vehículo B se encuentra detenido en un semáforo cuando el vehículo A lo choca por detrás. Determine la velocidad v del auto A, para que después del choque, el auto B tenga una velocidad de $30\,^{\text{km}}/_{\text{h}}$. Considere que los dos autos tienen la misma masa y que el coeficiente de restitución del impacto es 0,5.

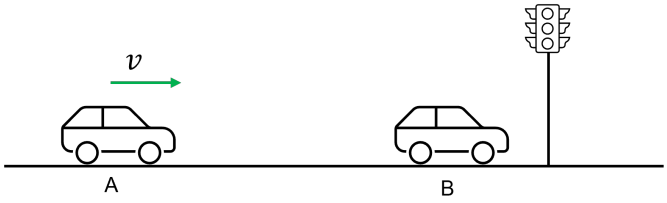
a) $v = 40\,^{\text{km}}/_{\text{h}}$

b) $v = 30\,^{\text{km}}/_{\text{h}}$

c) $v = 90\,^{\text{km}}/_{\text{h}}$

d) $v = 60\,^{\text{km}}/_{\text{h}}$

e) $v = 50\,^{\text{km}}/_{\text{h}}$



Solución

Aplicando conservación del momentum lineal en el sistema se obtiene:

$$\begin{aligned} L_i + I &= L_f \\ m_A\, v_A + m_B\, v_B &= m_A\, v'_A + m_B\, v'_B \\ m_A\, v &= m_A\, v'_A + m_B\, v'_B \\ v &= v'_A + v'_B \end{aligned} \tag{1}$$

De la definición del coeficiente de restitución se obtiene:

$$\begin{aligned} e &= \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} \\ \frac{1}{2} &= \frac{v'_B - v'_A}{v} \end{aligned} \tag{2}$$

Despejando la velocidad v'_B de (2) se obtiene:

$$v'_B = \frac{1}{2}\, v + v'_A$$

Reemplazando en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} v &= v'_A + \left(\frac{1}{2}\, v + v'_A\right) \\ 2\, v'_A &= v - \frac{1}{2}\, v \\ 2\, v'_A &= \frac{1}{2}\, v \\ v'_A &= \frac{1}{4}\, v \end{aligned}$$

Por lo tanto:

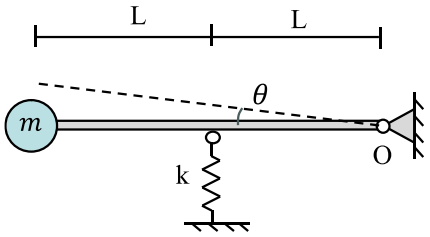
$$v'_B = \frac{1}{2}\, v + \frac{1}{4}\, v = \frac{3}{4}\, v \;\longrightarrow\; v = \frac{4}{3}\, v'_B$$

Se tiene que después del impacto, la velocidad v'_B es de $30\,^{\text{km}}/_{\text{h}}$, por lo que la velocidad inicial del vehículo 1 es:

$$v = \left(\frac{4}{3}\right)(30) = 40\,^{\text{km}}/_{\text{h}}$$

Problema 6 [0.5 puntos]

La figura muestra la vista superior de un sistema compuesto por una barra rígida de masa despreciable que en un extremo sujeta a una masa m. La barra está conectada a un resorte de rigidez k. La barra puede girar respecto al punto O y el resorte se encuentra en su estado natural cuando $\theta = 0$. Considere que en ángulo de rotación θ es pequeño y por lo tanto el alargamiento del resorte se obtiene como $\theta\, l$. Considere también que $k/m = 1\ 1/s^2$ y que la masa m es una partícula de radio despreciable.



Determine el periodo de vibración del sistema.

a) $T_n = 4\pi$ s

b) $T_n = 2\pi$ s

c) $T_n = \pi$ s

d) $T_n = \sqrt{2}\pi$ s

e) $T_n = \sqrt{4}\pi$ s

Solución

La masa se puede suponer como una partícula, por lo que su momento de inercia respecto al punto O es:

$$\begin{aligned} I_O &= \overline{I} + m\, d^2 \\ &= 0 + (m)(2L)^2 \\ &= 4\, m\, L^2 \end{aligned}$$

Aplicando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton para rotaciones respecto al punto O, despreciando el peso de la masa m, se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_i M_i &= I_O\, \ddot{\theta} \\ f_e\, L &= -4\, m\, L^2\, \ddot{\theta} \\ 4\, m\, L^2\, \ddot{\theta} + k\, \theta\, L^2 &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{k}{4\, m}\, \theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \omega_n^2\, \theta &= 0 \end{aligned}$$

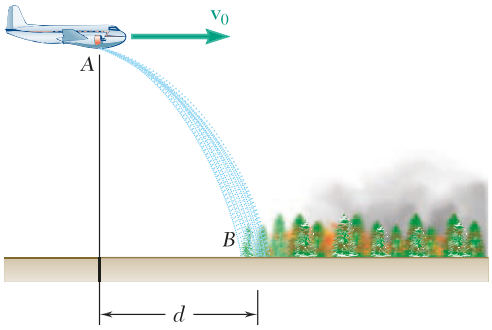
La frecuencia angular del sistema es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{4\, m}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$$

El periodo es:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi \text{ s}$$

Problema 7 [0.5 puntos]



Un avión diseñado para dejar caer agua sobre incendios forestales vuela sobre una línea recta horizontal a $90\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ a una altura de 80 m. Asuma $g = 10\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$.

Determine la distancia d a la que el piloto debe soltar el agua de manera que caiga sobre el incendio.

a) $d = 360\,\mathrm{m}$

b) $d = 120\,\mathrm{m}$

c) $d = 534\,\mathrm{m}$

d) $d = 890\,\mathrm{m}$

e) $d = 57\,\mathrm{m}$

Solución

La ecuación que describe la trayectoria del agua es:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 80 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 90 \\ 0 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2}\ \mathrm{m}$$

Para determinar la distancia a la que debe solar el agua el pilota para que caiga sobre el incendio se debe cumplir lo siguiente:

$$\mathbf{u}(t^*) = \begin{Bmatrix} d \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Esto representa las siguientes dos ecuaciones:

$$d = 90\,t^* \tag{1}$$

$$0 = 80 - 5\,(t^*)^2 \tag{2}$$

De (1) se obtiene t^*:

$$t^* = \frac{d}{90}$$

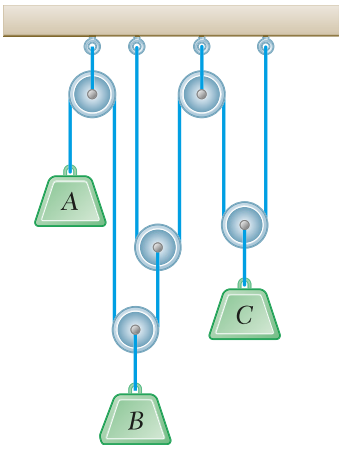
y se reemplaza en (2) para obtener d:

$$0 = 80 - (5)\left(\frac{d^2}{90^2}\right)$$

$$d^2 = \left(\frac{80}{5}\right)(90^2)$$

$$d = \sqrt{(16)(90^2)} = 360\,\mathrm{m}$$

Problema 8 [0.5 puntos]



El bloque C se mueve hacia arriba con una velocidad constante de $25\,\text{mm/s}$ y el bloque A se mueve hacia abajo con una velocidad constante de $75\,\text{mm/s}$.

Determine la velocidad del bloque B.

a) $\dot{z}_B = 25\,\text{mm/s}\ (\uparrow)$

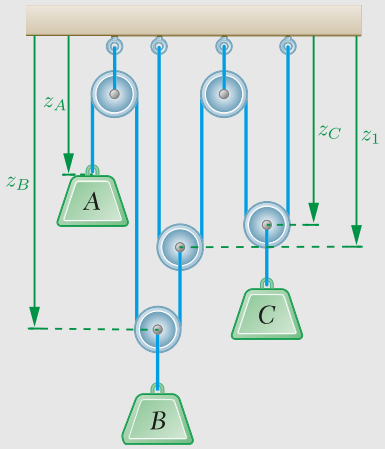
b) $\dot{z}_B = 25\,\text{mm/s}\ (\downarrow)$

c) $\dot{z}_B = \dfrac{25}{2}\,\text{mm/s}\ (\uparrow)$

d) $\dot{z}_B = \dfrac{25}{2}\,\text{mm/s}\ (\downarrow)$

e) $\dot{z}_B = 36\,\text{mm/s}\ (\uparrow)$

Solución



Fijando el origen del sistema coordenado de cada bloque, se tiene que el largo de cada cuerda es:

$$\ell_1 = z_A + z_B + (z_B - z_1) + \text{ctes}$$
$$\ell_2 = 2\,z_1 + 2\,z_C + \text{ctes}$$

Derivando con respecto al tiempo se obtiene:

$$0 = \dot{z}_A + 2\,\dot{z}_B - \dot{z}_1$$
$$0 = 2\,\dot{z}_1 + 2\,\dot{z}_C$$

Resolviendo se obtiene que la condición de ligadura entre el movimiento del bloque A, B y C es la siguiente:

$$\dot{z}_B = -\frac{1}{2}(\dot{z}_A + \dot{z}_C)$$

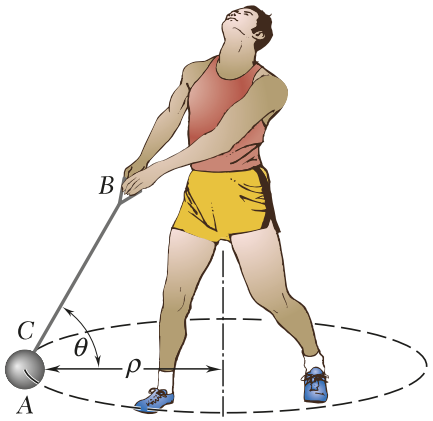
Se sabe que el bloque C sube con velocidad $25\,\text{mm/s}$ y el bloque A baja con velocidad $75\,\text{mm/s}$:

$$\dot{z}_C = -25\,\text{mm/s} \qquad\qquad \dot{z}_A = 75\,\text{mm/s}$$

Por lo tanto, la velocidad del bloque B es:

$$\dot{z}_B = -\left(\frac{1}{2}\right)(75 - 25) = -\left(\frac{1}{2}\right)(50) = -25\,\text{mm/s} = 25\,\text{mm/s}\ (\uparrow)$$

Problema 9 [0.5 puntos]



Durante la práctica de un lanzador de martillo, la cabeza A del martillo de 7.1 kg gira a una velocidad constante v en un circulo horizontal, como se muestra en la figura. Si $\rho = 1\,\text{m}$ y $\theta = 60°$. Considere $g = 10\,\text{m/s}^2$.

Determine la rapidez de la cabeza del martillo.

a) $v = \sqrt{\dfrac{10}{\sqrt{3}}}\,\text{m/s}$

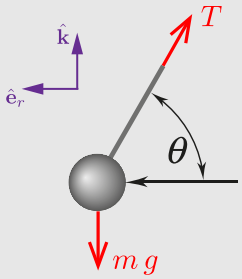
b) $v = \sqrt{\dfrac{10}{3}}\,\text{m/s}$

c) $v = \sqrt{\dfrac{10}{\sqrt{6}}}\,\text{m/s}$

d) $v = \sqrt{10}\,\text{m/s}$

e) $v = \dfrac{10}{\sqrt{3}}\,\text{m/s}$

Solución



Aplicando 2$^{\text{da}}$ ley de Newton sobre la cabeza del martillo se obtiene:

$$\sum_i \mathbf{f}_i = m\,\ddot{\mathbf{u}}$$

$$-T\,\cos(60°)\,\hat{\mathbf{e}}_r + [T\,\sin(60°) - m\,g]\,\hat{\mathbf{k}} = -m\,\frac{v^2}{\rho}\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

De la ecuación del eje $\hat{\mathbf{k}}$ se obtiene el valor de la tensión:

$$T\,\sin(60°) - m\,g = 0$$
$$(T)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = m\,g$$
$$T = \frac{2}{\sqrt{3}}\,m\,g$$

De la ecuación del eje radial se obtiene el valor de la velocidad:

$$T\,\cos(60°) = m\,\frac{v^2}{\rho}$$
$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,m\,g\right)\left(\frac{1}{2}\right) = m\,\frac{v^2}{\rho}$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\,g = \frac{v^2}{\rho}$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}\, g\, \rho}$$

Reemplazando con los datos numéricos se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{10}{\sqrt{3}}}\ {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}}$$

Problema 10 [0.5 puntos]

Un resorte cargado imparte una velocidad inicial de $50\,\mathrm{m/s}$ a una pelota de masa $0{,}15\,\mathrm{kg}$. La fuerza de fricción que el aire aplica a la pelota es $f_v = 0{,}002\,v$, donde f_v está en Newtons y la velocidad v está en $\mathrm{m/s}$.

Determine la ecuación de la velocidad en función del tiempo de la pelota. Utilice $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

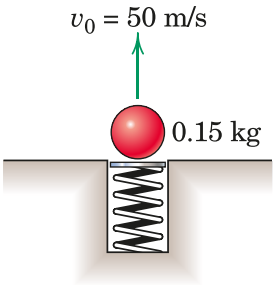
a) $v(t) = 800\,e^{-\frac{1}{75}\,t} - 750\,\mathrm{m/s}$

b) $v(t) = 800\,e^{-\frac{1}{75}\,t} + 750\,\mathrm{m/s}$

c) $v(t) = -800\,e^{-\frac{1}{75}\,t} - 750\,\mathrm{m/s}$

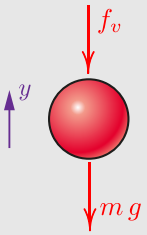
d) $v(t) = 800\,e^{\frac{1}{75}\,t} - 750\,\mathrm{m/s}$

e) $v(t) = 800\,e^{-75\,t} - 750\,\mathrm{m/s}$



Solución

Aplicando 2$^{\mathrm{da}}$ ley de Newton sobre la pelota se obtiene:



$$\sum_i f_{zi} = m\,\ddot{u}_z$$
$$-f_v - m\,g = m\,\ddot{u}_z$$
$$-0{,}002\,v - m\,g = m\,\ddot{u}_z$$

Esta es una EDO con condición de borde $v(0) = 50\,\mathrm{m/s}$, entonces:

$$-\int \frac{1}{m}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}v}{0{,}002v + m\,g}$$
$$-\frac{1}{m}\,t = \frac{1}{0{,}002}\ln(0{,}002\,v + m\,g) + C$$
$$-\frac{0{,}002}{m}\,t + C = \ln(0{,}002\,v + m\,g)$$
$$A\,e^{-\frac{0{,}002}{m}\,t} = 0{,}002\,v + m\,g$$
$$v(t) = A\,e^{-\frac{0{,}002}{m}\,t} - \frac{m\,g}{0{,}002}$$

Además:

$$0{,}002 = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500} \qquad 0{,}15 = \frac{15}{100} \qquad \frac{0{,}002}{0{,}15} = \frac{1}{75}$$

Por lo tanto:

$$v(t) = A\,e^{-\frac{1}{75}\,t} - 750$$

De la condición de borde se obtiene:

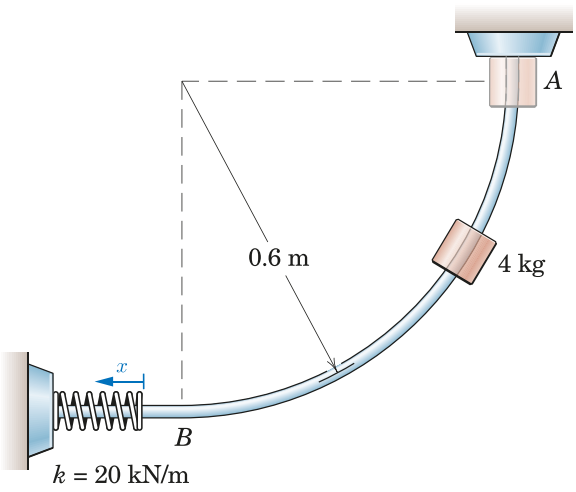
$$v(0) = 50$$
$$A - 750 = 50$$
$$A = 800$$

La ecuación de velocidad de la pelota es:

$$v(t) = 800\,e^{-\frac{1}{75}\,t} - 750\,\mathrm{m/s}$$

Problema 11 [0.5 puntos]

El cilindro deslizante se suelta desde el reposo en el punto A y viaja por el tubo circular de fricción despreciable hasta llegar al punto más que colisiona con un resorte de rigidez $k = 20\,\text{kN/m}$ y se queda unido a el. Inicialmente el resorte está en su longitud natural y asuma $g = 10\,\text{m/s}^2$.



Determine la ecuación de movimiento del sistema masa−resorte en función del tiempo. Asuma que el sistema masa−resorte oscila horizontalmente sin llegar al punto B.

a) $x(t) = \dfrac{\sqrt{6}}{50}\,\sin\left(50\sqrt{2}\,t\right)\ \text{m}$

b) $x(t) = \dfrac{\sqrt{6}}{50}\,\cos\left(50\sqrt{2}\,t\right)\ \text{m}$

c) $x(t) = \dfrac{\sqrt{6}}{50}\,\sin\left(5000\,t\right)\ \text{m}$

d) $x(t) = \sqrt{\dfrac{6}{\sqrt{50}}}\,\sin\left(50\sqrt{2}\,t\right)\ \text{m}$

e) $x(t) = \dfrac{\sqrt{6}}{50}\,\sin\left(100\,t\right)\ \text{m}$

Solución

Aplicando el principio de trabajo y energía entre A y B se puede obtener la velocidad antes de que impacte con el resorte:

$$\begin{aligned} T_A + V_A + U^*_{AB} &= T_B + V_B \\ 0 + m\,g\,h + 0 &= \frac{1}{2} m\,(\dot{x}_B)^2 + 0 \\ \dot{x}_B &= \sqrt{2\,g\,h} \\ &= \sqrt{(2)(10)(0{,}6)} = \sqrt{12}\,\text{m/s} \end{aligned}$$

Cuando el cilindro se queda anclado en el resorte, entonces este describe un movimiento armónico no amortiguado, el cual tiene una ecuación general igual a:

$$x(t) = A\,\cos(\omega_n\,t) + B\,\sin(\omega_n\,t)$$

donde:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20000}{4}} = \sqrt{5000} = 50\sqrt{2}\,\text{rad/s}$$

$$A = x_{B0} = 0\,\text{m} \qquad B = \frac{\dot{x}_B}{\omega_n} = \frac{\sqrt{12/2}}{50} = \frac{\sqrt{6}}{50}\,\text{m}$$

Entonces, la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = \frac{\sqrt{6}}{50}\,\sin\left(50\sqrt{2}\,t\right)\ \text{m}$$

Problema 12 [0.5 puntos]

El sistema de freno hidráulico para un camión con remolque está configurado para producir fuerzas de frenado iguales para las dos unidades. Si los frenos son aplicados uniformemente por t segundos para detener el camión que tiene inicialmente una velocidad de v. El camión pesa m_1 y el remolque pesa m_2 $(m_1 > m_2)$.

Determine la fuerza P de acoplamiento entre el camión y el remolque.

Hint: En primer lugar determine la fuerza de frenado total del sistema (i.e. camión con remolque).

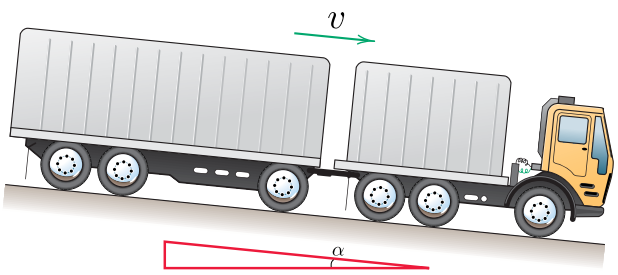
a) $P = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)\left[\frac{v}{t} + g\,\sin(\alpha)\right]$

b) $P = (m_1 - m_2)\left[\frac{v}{t} + g\,\sin(\alpha)\right]$

c) $P = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)\left[\frac{v}{t} - g\,\cos(\alpha)\right]$

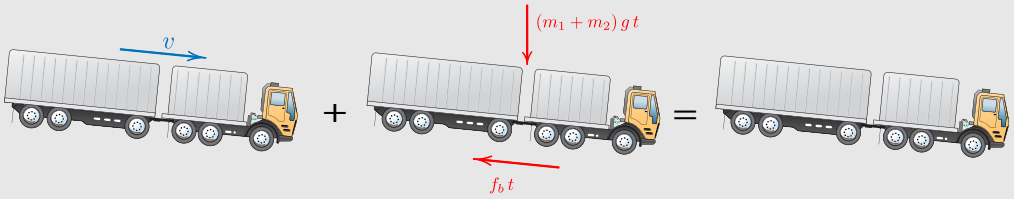
d) $P = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)\left[\frac{v}{t} - g\sin(\alpha)\right]$

e) $P = (m_1 + m_2)\left(\frac{v}{t} + g\right)$



Solución

Aplicando el principio de trabajo y momentum sobre el sistema de camión con remolque se obtiene:



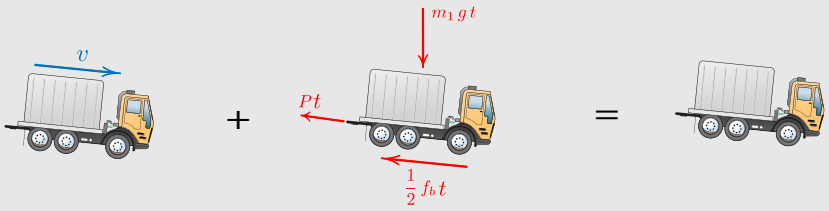
$$\begin{aligned} L_i + I &= L_f \\ (m_1 + m_2)\,v - f_b\,t + (m_1 + m_2)\,g\,\sin(\alpha)\,t &= 0 \\ (m_1 + m_2)\,v + (m_1 + m_2)\,g\,\sin(\alpha)\,t &= f_b\,t \\ (m_1 + m_2)\left[\frac{v}{t} + g\,\sin(\alpha)\right] &= f_b \end{aligned}$$

donde f_b es la fuerza de frenado del sistema, por lo tanto, cada cuerpo experimenta una fuerza de frenado igual a la mitad del valor total, es decir:

$$f_{b(\text{camión})} = f_{b(\text{remolque})} = \frac{1}{2}\,f_b = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\left[\frac{v}{t} + g\,\sin(\alpha)\right]$$

La fuerza P de acoplamiento del camión y el remolque se obtiene analizando cada cuerpo por separado:

Alternativa 1: Analizando el camión aplicando impulso y momentum, se obtiene:



$$L_i + I = L_f$$

$$m_1\,v - P\,t - \frac{1}{2}\,f_b\,t + m_1\,g\,\sin(\alpha)\,t = 0$$

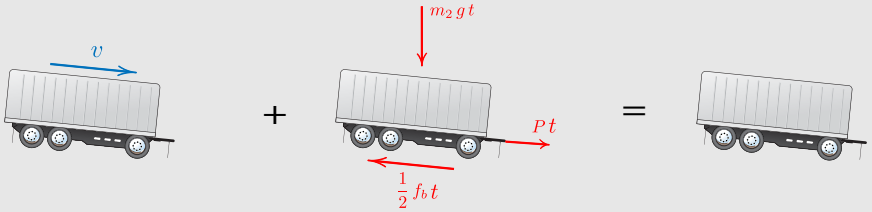
$$m_1\,v - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left[\frac{v}{t} + g\,\sin(\alpha)\right]\,t + m_1\,g\,\sin(\alpha)\,t = P\,t$$

$$\frac{1}{2}\,m_1\,v - \frac{1}{2}\,m_2\,v + \frac{1}{2}\,m_1\,g\,\sin(\alpha)\,t - \frac{1}{2}\,m_2\,g\,\sin(\alpha)\,t = P\,t$$

$$\frac{1}{2}\,(m_1 - m_2)[v + g\,\sin(\alpha)\,t] = P\,t$$

$$\frac{1}{2}\,(m_1 - m_2)\left[\frac{v}{t} + g\,\sin(\alpha)\right] = P$$

Alternativa 2: Analizando el tráiler aplicando impulso y momentum, se obtiene:



$$L_i + I = L_f$$

$$m_2\,v + P\,t - \frac{1}{2}\,f_b\,t + m_2\,g\,\sin(\alpha)\,t = 0$$

$$-m_2\,v + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left[\frac{v}{t} + g\,\sin(\alpha)\right]\,t - m_2\,g\,\sin(\alpha)\,t = P\,t$$

$$\frac{1}{2}\,m_1\,v - \frac{1}{2}\,m_2\,v + \frac{1}{2}\,m_1\,g\,\sin(\alpha)\,t - \frac{1}{2}\,m_2\,g\,\sin(\alpha)\,t = P\,t$$

$$\frac{1}{2}\,(m_1 - m_2)\,[v + g\,\sin(\alpha)\,t] = P\,t$$

$$\frac{1}{2}(m_1 - m_2)\left[\frac{v}{t} + g\,\sin(\alpha)\right] = P$$

Es decir, la fuerza de acoplamiento entre e camión y el remolque es:

$$P = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)\left[\frac{v}{t} + g\,\sin(\alpha)\right]$$