PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2019

Taller 03

Cinemática III & Cinética I

Problema 1.

La barra OA rota en sentido antihorario con velocidad angular $\omega = \dot{\theta} = 2t^2$, como muestra la Figura 1. Un anillo B se mueve a través de la barra a una velocidad $\dot{r} = 4t^2$. Determine la velocidad y aceleración del anillo si sabe que $\theta(t = 0) = 0$ y $r(t = 0) = 0$.

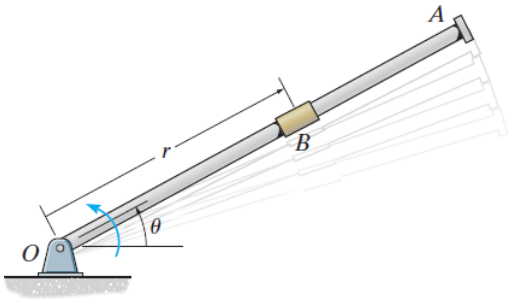


Figura 1: Barra con anillo móvil.

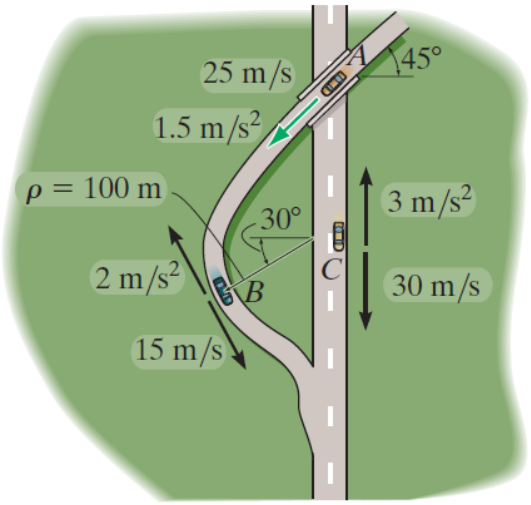


Figura 2: Automóviles en rampa de autopista.

Problema 2.

Tres automóviles circulan por una rampa de autopista, como muestra la Figura 2. El auto A se mueve con rapidez $v_{A0} = 25\ m/s$ y una **aceleración** $a_A = 1{,}5\ m/s^2$. El auto B viaja en una curva con rapidez $v_{B0} = 15\ m/s$ y una **desaceleración** $a_B = 2\ m/s^2$. El auto C se mueve en linea recta con velocidad de $v_{C0} = 30\ m/s$ y una **desaceleración** de $a_C = 3\ m/s^2$.
Se pide determinar:

a) La velocidad relativa del auto A con respecto al auto B.

b) La aceleración relativa del auto B con respecto al auto C.

Nota: Requiere de calculadora.

Problema 3. 🌶🌶

El bloque B tiene una masa m y se libera del reposo que está encima del carro–rampa A el cual tiene una masa de $3m$. El coeficiente de roce cinético entre A y B es μ_k.
Se pide determinar la tensión en el cable DC necesaria para sostener el carro mientras que B se desliza hacia abajo, en las condiciones:

a) No hay roce entre la caja y la rampa; i.e. $\mu_k = 0$.

b) Hay roce cinético entre la caja y la rampa.

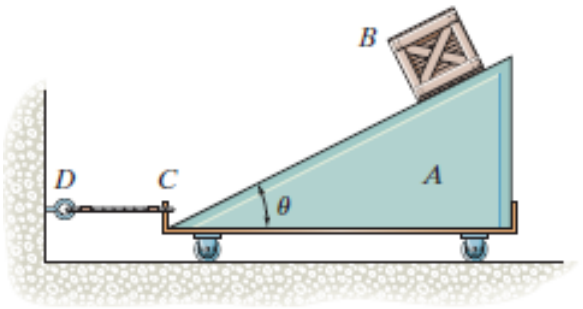


Figura 3: Caja que desliza por un carro–rampa

- **Problema 1**

Conocemos $\dot{\theta}(t)$ y $\dot{r}(t)$. Derivando se obtiene fácilmente $\ddot{\theta}$ y $\ddot{r}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2) = 4t$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(4t^2) = 8t$$

Integrando y usando las condiciones iniciales podemos obtener las expresiones para $\theta(t)$ y $r(t)$:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 2t^2 \longrightarrow d\theta = (2t^2)\,dt \rightarrow \theta = \int (2t^2)\,dt + C_{1\theta}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = 4t^2 \longrightarrow dr = (4t^2)\,dt \rightarrow r = \int (4t^2)\,dt + C_{1r}$$

Es decir: $\theta(t) = \frac{2}{3}t^3 + C_{1\theta}$ y $r(t) = \frac{4}{3}t^3 + C_{1r}$

Usando las condiciones iniciales $\theta(t=0) = 0$ y $r(t=0) = 0$, se determina que $C_{1\theta} = C_{1r} = 0$. Resumiendo, tenemos las siguientes expresiones:

$$r(t) = \frac{4}{3}t^3 \qquad \theta(t) = \frac{2}{3}t^3$$
$$\dot{r}(t) = 4t^2 \qquad \dot{\theta}(t) = 2t^2$$
$$\ddot{r}(t) = 8t \qquad \ddot{\theta}(t) = 4t$$

La velocidad y aceleración en coordenadas polares son:

$$\underset{\sim}{u} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta = (4t^2)\,\hat{e}_r + \left(\frac{4}{3}t^3\right)(2t^2)\,\hat{e}_\theta = (4t^2)\,\hat{e}_r + \left(\frac{8}{3}t^5\right)\hat{e}_\theta$$

$$\begin{aligned}\ddot{\underset{\sim}{u}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{e}_\theta \\ &= \left[8t - \left(\frac{4}{3}t^3\right)(2t^2)^2\right]\hat{e}_r + \left[\left(\frac{4}{3}t^3\right)(4t) + (2)(4t^2)(2t^2)\right]\hat{e}_\theta \\ &= \left(8t - \frac{16}{3}t^7\right)\hat{e}_r + \left(\frac{64}{3}t^3\right)\hat{e}_\theta\end{aligned}$$

- **Problema 2**

Comenzamos por escribir las velocidades y aceleraciones de cada automóvil en el sistema coordenado X-Y:

$$\underset{\sim}{v}_A = v_A \cdot \hat{u}_A = (25)\begin{Bmatrix}-\cos 45 \\ -\sin 45\end{Bmatrix} = \frac{25}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}-1 \\ -1\end{Bmatrix}\ m/s$$

$$\underset{\sim}{a}_A = a_A \cdot \hat{a}_A = (1.5)\begin{Bmatrix}-\cos 45 \\ -\sin 45\end{Bmatrix} = \frac{1.5}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}-1 \\ -1\end{Bmatrix}\ m/s^2$$

$$\underset{\sim}{v}_B = v_B \cdot \hat{u}_B = (15)\begin{Bmatrix}\sin 30 \\ -\cos 30\end{Bmatrix} = \frac{15}{2}\begin{Bmatrix}1 \\ -\sqrt{3}\end{Bmatrix}\ m/s$$

$$\underset{\sim}{a}_B = a_B \cdot \hat{a}_B = (2)\begin{Bmatrix} -\sin 30 \\ \cos 30 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} \ m/s^2$$

$$\underset{\sim}{v}_C = v_C \cdot \hat{v}_C = (30)\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \ m/s$$

$$\underset{\sim}{a}_C = a_C \cdot \hat{a}_C = (3)\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \ m/s^2$$

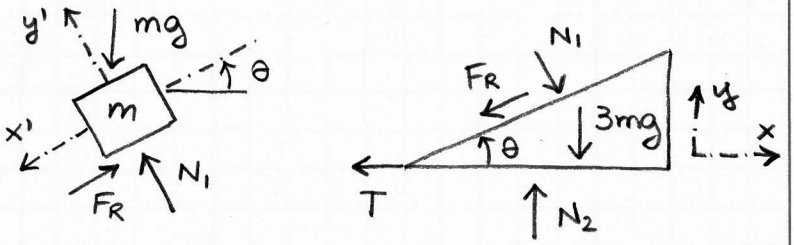
Ahora es muy sencillo determinar lo pedido:

$$\underset{\sim}{v}_{A/B} = \underset{\sim}{v}_A - \underset{\sim}{v}_B = \frac{25}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} - \frac{15}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -25.178 \\ -4.687 \end{Bmatrix} \ m/s \ //$$

$$\underset{\sim}{a}_{B/C} = \underset{\sim}{a}_B - \underset{\sim}{a}_C = \begin{Bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} - (3)\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -1.268 \end{Bmatrix} \ m/s^2 \ //$$

- Problema 3

Comenzamos haciendo los DCL del bloque y rampa:



Usando la 2ª ley de Newton sobre el bloque, y sabiendo que en la dirección y' el bloque no acelera:

$$\sum f_{y'} = m \cdot a_{y'} \rightarrow -mg \cdot \cos\theta + N_1 = m \cdot a_{y'} = 0$$

$$N_1 = mg \cdot \cos\theta$$

Usando la 2ª ley de Newton sobre la rampa, y sabiendo que en la dirección x la rampa no acelera:

$$\sum f_x = m \cdot a_x \longrightarrow -T + N_1 \cdot \sin\theta = m \cdot a_x = 0$$

$$T = N_1 \cdot \sin\theta = mg \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta \ //$$

Repetimos el análisis con $F_R = \mu_K \cdot N_1 = \mu_K \cdot mg\cos\theta$:

$$\sum f_x = m \cdot a_x \longrightarrow -T - F_R \cdot \cos\theta + N_1 \cdot \sin\theta = 0$$

$$T = mg \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta - \mu_K \cdot mg \cdot \cos^2\theta$$

$$T = mg \cdot \cos\theta \left(\sin\theta - \mu_K \cdot \cos\theta\right) \ //$$