PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2019

Interrogación 03

Duración total: 120 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de éste. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

   Adulterar el acta de asistencia

   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Reglas preguntas de selección múltiple:

1. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
2. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** 1/4 **de punto**.
3. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).

Nota Este semestre no fue posible realizar una interrogación 3.
El equipo docente de ICE1514 ha creado esta interrogación simbólica para ser usada como una *evaluación formativa* (a diferencia de una interrogación normal que es *sumativa*). El objetivo de esto es que le sirva de práctica y estudio, para llegar así mejor preparado al examen final del curso.

Problema 1 [1 punto]

Suponiendo que los cables y poleas son ideales, y que el plano inclinado no tiene roce, determine la frecuencia natural (circular) ω de oscilación del sistema.
Asuma que las cuerdas están siempre tensas (i.e. las 3 masas se mueven de manera ligada).

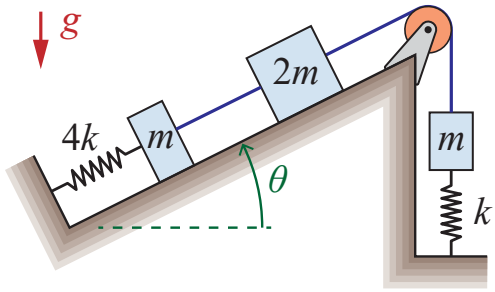
a) $\omega = \sqrt{\frac{4k}{5m}}$

b) $\omega = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$

c) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

d) $\omega = \sqrt{\frac{5k}{4m}}$

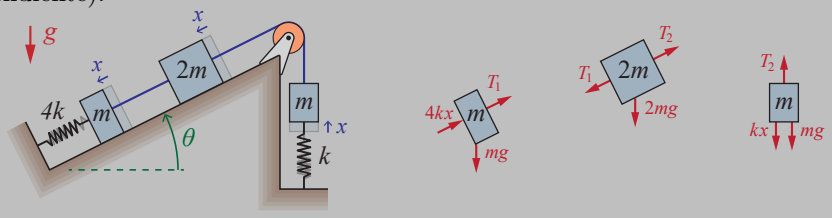
e) $\omega = \sqrt{\frac{5k}{8m}}$



Solución

Las fuerzas estáticas (gravedad) no tienen efectos sobre la frecuencia natural del sistema. Con ello se puede fácilmente deducir que $\omega = \sqrt{5k/4m}$.

Análisis detallado: con una única variable x se define la posición del sistema completo (movimiento dependiente).



Haciendo un DCL y planteando la 2^a ley de newton para una perturbación $x > 0$:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - T_1 + mg\sin(\theta) \\ 2m\ddot{x} &= T_1 - T_2 + 2mg\sin(\theta) \\ m\ddot{x} &= T_2 - mg - kx \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} T_1 &= \tfrac{1}{4}\{mg - 11kx + mg\sin(\theta)\} \\ T_2 &= \tfrac{1}{4}\{3mg - kx + 3mg\sin(\theta)\} \\ 4m\ddot{x} &= 5kx + mg\{3\sin(\theta) - 1\} \end{aligned}$$

Las tensiones en las cuerdas no son de interés. La 3^a ecuación es la del oscilador definida desde la posición de reposo de los resortes ($x = 0$). La fuerza estática (gravedad) hará que el oscilador tenga un nuevo punto de equilibrio. Definiendo $y = x + \delta_{\text{st}}$ y haciendo un cambio de variables:

$$5ky = 5kx + mg\{3\sin(\theta) - 1\} \longrightarrow \begin{aligned} 5k\ddot{y} &= 5k\ddot{x} \\ \ddot{y} &= \ddot{x} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación del oscilador:

$$4m\ddot{y} = 5ky \longrightarrow 4m\ddot{x} = 5kx + \delta_{\text{st}} \longrightarrow 4m\ddot{x} = 5kx + \frac{mg}{5k}\{3\sin(\theta) - 1\}$$

Las fuerzas estáticas no alteran $\omega = \sqrt{5k/4m}$ del oscilador; sólo desplazan el punto de equilibrio. Con el fin de completar la solución, el movimiento del oscilador queda definido por:

$$y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \longrightarrow \begin{aligned} x(t) &= A'\cos(\omega t) + B'\sin(\omega t) + \delta_{\text{st}} \\ x(t) &= A'\cos(\omega t) + B'\sin(\omega t) + \frac{mg}{5k}\{3\sin(\theta) - 1\} \end{aligned}$$

Problema 2 [1 punto]

Se tiene un péndulo de masa m y largo $\ell = 2.5\,\text{m}$, con condiciones iniciales $\theta_0 = 0$ y $v_0 = \sqrt{5}\,\text{m/s}$. Suponga ángulo de oscilación pequeño, y que $g = 10\,\text{m/s}^2$. Determine el menor tiempo que transcurre para que el péndulo llegue a $\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

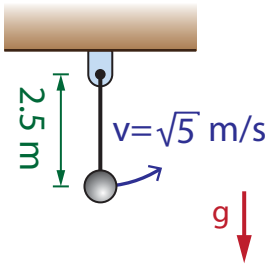
a) $t = \dfrac{\pi}{12}$ s

b) $t = \dfrac{\pi}{3}$ s

c) $t = \dfrac{\pi}{2}$ s

d) $t = \dfrac{\pi}{6}$ s

e) $t = \dfrac{5\pi}{6}$ s



Solución

La frecuencia natural (circular) del péndulo es:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{10}{2.5}} = 2\,\text{rad/s}$$

Las condiciones iniciales del péndulo son:

$$\theta_0 = 0\,rad \qquad \text{y} \qquad \dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{\ell} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\text{rad/s}$$

Usando la ecuación del oscilador armónico:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = \theta_0\cos(\omega t) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$\theta(t) = \frac{2/\sqrt{5}}{2}\sin(2t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(2t)$$

El péndulo se encontrará en $\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{10}$ en:

$$\theta(t^\star) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(2t^\star) = \frac{\sqrt{5}}{10} \qquad \rightarrow \qquad \sin(2t^\star) = \frac{1}{2}$$

Es decir, el péndulo pasa por el ángulo pedido para:

$$2t^\star = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \text{y} \qquad 2t^\star = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Nos interesa el menor $t^\star$. Es decir, el primer cruce por el ángulo pedido:

$$2t^\star = \frac{\pi}{6} \qquad \rightarrow \qquad t^\star = \frac{\pi}{12}\,\text{s}$$

Problema 3 [1 punto]

Un tambor de 1 m de alto y área transversal a constante se llena con barro/lodo. El tambor se deja quieto y el lodo comienza a decantar/sedimentar, lo que resulta en una densidad variable definida por $\rho(z) = 2 - z$. Despreciando el peso del tambor, determine altura a la que se ubica el centro de masa $\overline{z}$.

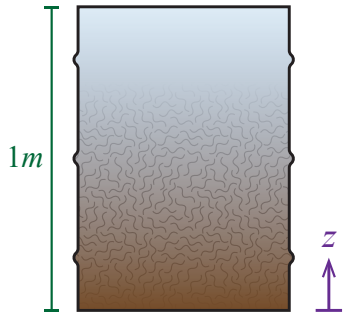
a) $\overline{z} = \dfrac{4}{9}\,\mathrm{m}$

b) $\overline{z} = \dfrac{2}{3}\,\mathrm{m}$

c) $\overline{z} = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{m}$

d) $\overline{z} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{m}$

e) $\overline{z} = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{m}$



Solución

La coordenada z del centro de masa es:

$$\overline{z} = \frac{\int z\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int (z\rho)\,\mathrm{d}v}{\int \rho\,\mathrm{d}v} = \frac{\int_{z=0}^{z=1} (z\rho a)\,\mathrm{d}z}{\int (\rho a)\,\mathrm{d}z} = \frac{a \cdot \int_{z=0}^{z=1} (z\rho)\,\mathrm{d}z}{a \cdot \int \rho\,\mathrm{d}z}$$

$$\overline{z} = \frac{\int_{z=0}^{z=1} \left(2z - z^2\right)\,\mathrm{d}z}{\int_{z=0}^{z=1} (2 - z)\,\mathrm{d}z} = \frac{z^2 - \frac{z^3}{3}\Big|_{z=0}^{z=1}}{2z - \frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=1}} = \frac{2/3}{3/2}$$

$$\overline{z} = \frac{4}{9}\,\mathrm{m}$$

Es decir, la masa total del tambor es $m_t = a \cdot \frac{3}{2}$, y la ubicación vertical del centro de masa es $\overline{z} = \frac{4}{9}\,\mathrm{m}$.

Problema 4 [1 punto]

Los autos A y B de la figura tienen velocidades iniciales $v\hat{\mathbf{i}}$ y $v\hat{\mathbf{j}}$, respectivamente. La colisión es *perfectamente plástica*: los autos quedan unidos luego de la colisión. Si el auto A tiene masa m_A, calcule la masa que debe tener el auto B para que luego de la colisión sigan en la dirección mostrada en la figura y definida por el ángulo θ.

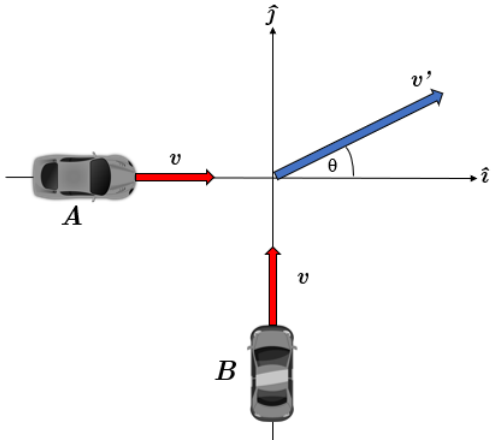
a) $m_B = m_A \tan(\theta)$

b) $m_B = m_A \sin(2\theta)$

c) $m_B = m_A(1 + \tan(\theta))$

d) $m_B = \dfrac{\tan(\theta)}{m_A}$

e) $m_B = \dfrac{m_A}{\sin(2\theta) + 1}$



Solución

Expresamos el momentum antes y después de la colisión:

$$\text{Antes de la colisión} : \mathbf{P}_i = m_A v\,\hat{\mathbf{i}} + m_B v\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\text{Después de la colisión} : \mathbf{P}_f = (m_A + m_B)\,v'\,\left[\cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}}\right]$$

Como el momentum se conserva, podemos igualar ambos en los dos ejes:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$$

En $\hat{\mathbf{i}}$:

$$m_A v = (m_A + m_B)v' \cos(\theta) \tag{1}$$

En $\hat{\mathbf{j}}$:

$$m_B v = (m_A + m_B)v' \sin(\theta) \tag{2}$$

De (2) podemos despejar v':

$$v' = \frac{m_B v}{(m_A + m_B)\sin(\theta)}$$

Y reemplazar en (1):

$$m_A v = (m_A + m_B)\frac{m_B v}{(m_A + m_B)\sin(\theta)}\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow m_B = m_A \tan(\theta)$$

Problema 5 [1 punto]

Una bola A de masa m está amarrada a una cuerda de longitud $L/2$ y se suelta desde el reposo en $\phi = \frac{\pi}{2}$ rad hasta llegar a $\phi = 0$ rad para chocar a una bola B de masa $2m$ amarrada a una cuerda de largo L. Determine el ángulo máximo θ al que la bola B oscilará. Considere un choque perfectamente elástico.

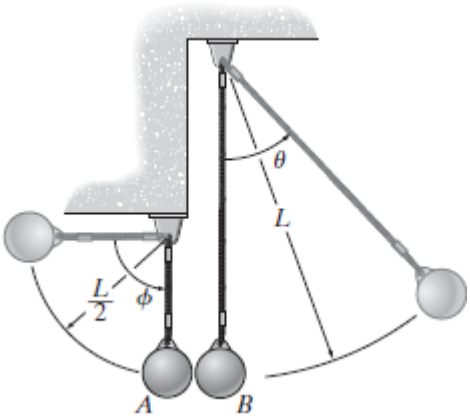
a) $\theta = \arccos\left(\frac{2}{9}\right)$ rad

b) $\theta = \arccos\left(\frac{7}{9}\right)$ rad

c) $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ rad

d) $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad

e) $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad



Solución

Primero debemos calcular la velocidad con que la bola A llega a encontrarse con B. Por conservación de energía mecánica durante la caída:

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}m\left(v_A\right)^2$$
$$v_A = \sqrt{gL}$$

Las fuerzas de colisión son internas del sistema A–B, y por ende se conserva el momentum lineal:

$$mv_A = mv'_A + 2mv'_B \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{gL} = v'_A + 2v'_B \tag{1}$$

Por enunciado se tiene que el choque es perfectamente elástico, i.e., $e = 1$. Por lo tanto:

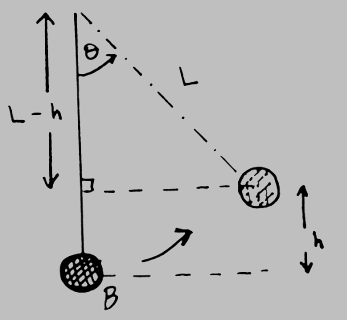
$$1 = \frac{v'_B - v'_A}{v_A} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{gL} = v'_B - v'_A \tag{2}$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2) se deduce que $v'_B = \frac{2}{3}\sqrt{gL}$.

Sea h la altura máxima a la que sube la bola B. Nuevamente por conservación energética se tiene que:

$$2mgh = \frac{1}{2}2m\left(v'_B\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{\left(v'_B\right)^2}{2g} = \frac{2}{9}L \tag{3}$$

La figura nos permite concluir que $L - h = L\cos\theta$, que resulta en $h = L(1 - \cos\theta)$. Reemplazando esto último en (3) se obtiene que:



$$L\left(1 - \cos\theta\right) = \frac{2}{9}L$$

Finalmente: $\cos\theta = \frac{7}{9} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arccos\left(\frac{7}{9}\right)$.

Problema 6 [1 punto]

Un jugador de fútbol patea una pelota de 0.5 kg a una rapidez de 25 m/s en el punto A como se muestra. Si el coeficiente de restitución entre la pelota y el campo es $e = 0.6$, determine el vector velocidad de la pelota al rebotar en B.

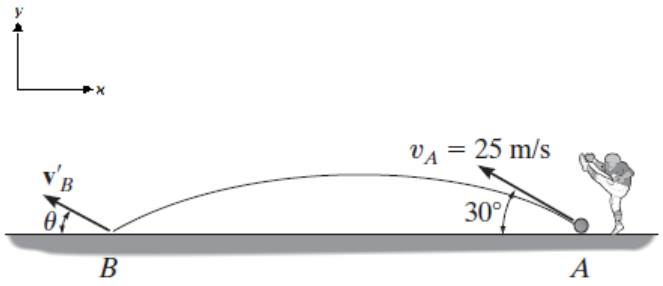
a) $\mathbf{v}'_B = -\dfrac{25\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{15}{2}\,\hat{\mathbf{j}}$ $[m/s]$

b) $\mathbf{v}'_B = -\dfrac{25\sqrt{2}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{15}{4}\,\hat{\mathbf{j}}$ $[m/s]$

c) $\mathbf{v}'_B = -10\sqrt{3}\,\hat{\mathbf{i}} + 5\,\hat{\mathbf{j}}$ $[m/s]$

d) $\mathbf{v}'_B = -\dfrac{25}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + 5\,\hat{\mathbf{j}}$ $[m/s]$

e) $\mathbf{v}'_B = -\dfrac{25\sqrt{3}}{4}\,\hat{\mathbf{i}} + 10\,\hat{\mathbf{j}}$ $[m/s]$



Solución

La velocidad en el punto A es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A &= -25\cos 30^\circ\,\hat{\mathbf{i}} + 25\sin 30^\circ\,\hat{\mathbf{j}}\ [m/s]\\ &= -\frac{25\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{25}{2}\,\hat{\mathbf{j}}\ [m/s]\end{aligned}$$

Notemos que la componente x de la velocidad se mantiene constante, pues no hay fuerzas externas en dicho eje. Además, al llegar al punto B la componente y de la velocidad en módulo es igual a la del punto A, pero con un menos antepuesto. Por lo tanto,

$$\mathbf{v}_B = -\frac{25\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{25}{2}\,\hat{\mathbf{j}}\ [m/s]$$

Dado que el choque ocurre en el eje y y el suelo se puede consider inmóvil, el coeficiente de restitución se puede escribir como

$$e = \frac{0 - v'_{By}}{v_{By} - 0} \qquad \Rightarrow \qquad v'_{By} = -0.6 v_{By} = \frac{15}{2}\ [m/s]$$

Finalmente, la velocidad luego de rebotar en B es:

$$\mathbf{v}'_B = -\frac{25\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{15}{2}\,\hat{\mathbf{j}}\ [m/s]$$

Problema 7 [1 punto]

El *super tanker* arroja $\alpha\, m_0$ kilos de agua de una sola pasada, donde m_0 es la masa del avión sin agua. El agua se arroja con velocidad de escape (relativa al avión) v_e de forma horizontal durante Δt segundos. Al momento de expulsar el agua, el *super tanker* lleva una velocidad de v_o puramente horizontal.
Determine la velocidad horizontal del avión una vez expulsada el agua.

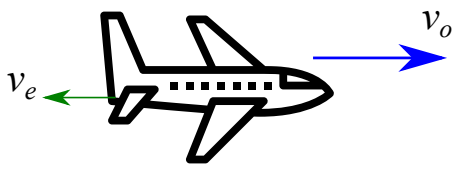
a) $v_f = v_0 - v_e \ln(1+\alpha)$

b) $v_f = v_0 + v_e \ln(1+\alpha)$

c) $v_f = v_0 - v_e \ln(1-\alpha)$

d) $v_f = v_e \ln(1+\alpha)$

e) $v_f = v_0 \ln(1+\alpha)$



Solución
Ocupando la segunda ley de Newton de masa variable:

$$\sum F_{ext} = m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \dot{m}\, v_e$$

En nuestro caso, se tiene:

$$\dot{m} = \alpha\frac{m_0}{\Delta t}$$
$$m(t) = (1+\alpha)\, m_0 - \dot{m}\, t$$
$$\sum F_{ext} = 0$$

Es decir:

$$0 = m(t)\frac{dv}{dt} - \dot{m}\, v_e \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v_e \dot{m}}{m(t)}$$
$$\int_{v_0}^{v_f} \mathrm{d}v = v_e\, \dot{m} \int_0^{\Delta t} \frac{1}{(1+\alpha)\, m_0 - \dot{m}t}\, \mathrm{d}t$$
$$v_f - v_0 = v_e \cdot \ln\left[(1+\alpha)\, m\right] - v_e \cdot \ln\left[(1+\alpha)\, m - \dot{m}\Delta t\right]$$
$$\rightarrow \quad v_f = v_0 + v_e \cdot \ln(1+\alpha)$$

Problema 8 [1 punto]

Dos hombres ejercen fuerzas mediante cuerdas amarradas a un poste como se indica en la figura. El hombre de la izquierda ejerce una fuerza $P = 200\,\text{N}$, mientras que el de la derecha ejerce una fuerza F desconocida. Determine la magnitud de la fuerza F para que el poste no quiera girar. Es decir, que el momento (torque) respecto a el punto A sea igual a cero.

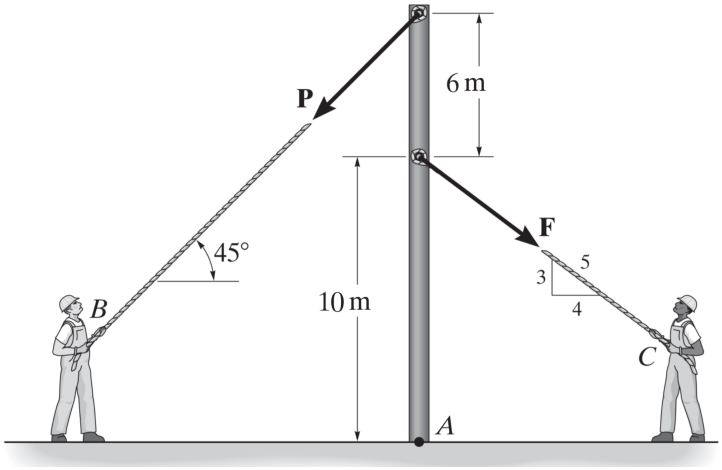
a) $F = 200\sqrt{2}\,\text{N}$

b) $F = \dfrac{800}{3}\sqrt{2}\,\text{N}$

c) $F = \dfrac{200}{\sqrt{2}}\,\text{N}$

d) $F = 400\sqrt{2}\,\text{N}$

e) $F = 100\sqrt{2}\,\text{N}$



Solución

Para que el poste no gire, es decir, que haya equilibrio rotacional:

$$\Sigma M = 0$$
$$M_{\text{izq}} + M_{\text{der}} = 0$$

Podemos plantear el momento ejercido por los hombres de dos maneras diferentes:
1) Consideramos únicamente las componentes horizontales de las fuerzas ya que las componentes verticales no ejercen momento sobre A. Si sólo se considera la componente horizontal de las fuerzas, el brazo de palanca corresponde simplemente a la distancia vertical entre los puntos de aplicación y A.
2) Consideramos el brazo de palanca de las fuerzas como la distancia mínima y perpendicular entre la "línea de acción de la fuerza" y el punto A.
Ambos métodos llegan a los mismos valores:

$$M_{\text{izq}} = (200)\,(16 \cdot \cos 45°) = (200 \cdot \cos 45°)\,(16) = 1600\sqrt{2}$$
$$M_{\text{der}} = (-F)\left(10 \cdot \frac{4}{5}\right) = \left(-F \cdot \frac{4}{5}\right)(10) = -8F$$

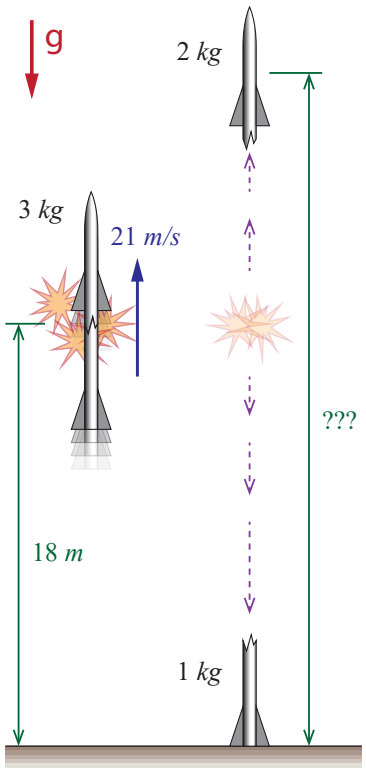
Planteamos la ecuación de equilibrio y resulta:

$$\Sigma M = 1600\sqrt{2} - 8F = 0$$
$$F = 200\sqrt{2}\,\text{N}$$

Es decir, la fuerza que debe ejercer el hombre de la derecha es de $200\sqrt{2}\,\text{N}$.

Problema 9 [1 punto]

El club de cohetería amateur de la PUC lanza un cohete a escala de 3 kg. El cohete estalla en dos pedazos cuando se encuentra a una altura $z = 18\,\text{m}$ y a velocidad $\dot{z} = 21\,\text{m/s}$. El pedazo $m_1 = 1\,\text{kg}$ viaja directo al suelo y lo toca $\Delta t = 1\,\text{s}$ después del estallido. Determine la altura del pedazo $m_2 = 2\,\text{kg}$ el instante que m_1 toca el suelo.
Asuma que $g = 10\,\text{m/s}^2$.



a) $z_2 = 51\,\text{m}$

b) $z_2 = 27\,\text{m}$

c) $z_2 = 54\,\text{m}$

d) $z_2 = \dfrac{117}{2}\,\text{m}$

e) $z_2 = \dfrac{39}{2}\,\text{m}$

Solución
Si tomamos las dos piezas como un sistema, entonces la fuerza de la explosión es una fuerza interna que no altera la posición del centro de masa respecto a su trayectoria original. Es decir, transcurrido $\Delta t = 1\,\text{s}$ el centro de masa estará ubicado en:

$$\overline{z} = z_0 + \dot{z}_0\,(\Delta t) + \frac{1}{2}\,(-g)\,(\Delta t)^2 = 34\,\text{m}$$

Si la posición de la masa m_1 es $z_1 = 0$, entonces podemos determinar la posición de la masa m_2 a través del centro de masa del sistema:

$$\overline{z} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m1 + m2} = \frac{(1)\,(0) + (2)\,z_2}{3}$$

$$34 = \frac{2z_2}{3}$$

$$\rightarrow \quad z_2 = 51\,\text{m}$$

Es decir, el segundo pedazo se encuentra a 51 m de altura.

Problema 10 [1 punto]

Un ingeniero ha decidido crear la silla de ruedas más rápida del mundo. Para ello le ha puesto un cohete que expulsa masa a una tasa de $\dot{m} = -\frac{1}{3}\,\mathrm{kg/s}$. La masa es expulsada a una velocidad constante de $v_{c/p} = 2100\,\mathrm{m/s}$. El roce con el aire es proporcional a la velocidad e igual a $f_r = -2\,v$.
¿Cuál es la velocidad máxima teórica que puede alcanzar el ingeniero en su silla?

a) $v_{\max} = 350\,\mathrm{m/s}$

b) $v_{\max} = 2100\,\mathrm{m/s}$

c) $v_{\max} = 700\,\mathrm{m/s}$

d) $v_{\max} = 1400\,\mathrm{m/s}$

e) No se puede determinar sin conocer la masa inicial m_0.



Solución
Cuando se alcance la velocidad límite, el sistema dejará de acelerar. Es decir:

$$a = \dot{v} = 0$$

La única fuerza externa que actúa sobre el sistema es el roce con el aire:

$$\sum f = -2\,v$$

Reemplazando en la ecuación de un sistema de masa variable, se tiene:

$$\sum f = m \cdot \dot{v} + v_{c/p} \cdot \dot{m}$$

$$-2\,v_{\max} = 0 + (2100)\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\rightarrow \qquad v_{\max} = \frac{2100}{(2)\,(3)} = 350\,\mathrm{m/s}$$

La velocidad máxima teórica es de $350\,\mathrm{m/s}$ (si antes no se le acaba el combustible).