PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2022

Interrogación 01

Duración total: 120 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. **Sólo se aceptarán preguntas de enunciado**. Si la pregunta no es de enunciado o una aclaración de este, no se le dará respuesta alguna.
5. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
6. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** 1/5 **de una respuesta correcta**.
7. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).
8. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y será calificado con la nota mínima. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

   Adulterar el acta de asistencia

   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Problema 1 [0.5 puntos]

Un campo electromagnético oscilante acelera una partícula según:

$$\ddot{x} = \frac{1}{9}\sin(3t) \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

Si la partícula comienza en $x_0 = 0$ con $\dot{x}_0 = -1/27\,\mathrm{m/s}$, determine las posiciones máxima $x_{\max}$ y mínima $x_{\min}$ de la partícula en el tiempo.

a) $x_{\min} = -\frac{1}{81}\,\mathrm{m}$ $\quad x_{\max} = \frac{1}{81}\,\mathrm{m}$

b) $x_{\min} = -1\,\mathrm{m}$ $\quad x_{\max} = 1\,\mathrm{m}$

c) $x_{\min} = 0\,\mathrm{m}$ $\quad x_{\max} = \frac{1}{81}\,\mathrm{m}$

d) $x_{\min} = -1\,\mathrm{m}$ $\quad x_{\max} = 0\,\mathrm{m}$

e) $x_{\min} = -\frac{1}{27}\,\mathrm{m}$ $\quad x_{\max} = \frac{1}{27}\,\mathrm{m}$

Solución

La velocidad de la partícula se obtiene de resolver la ecuación diferencial (integrando):

$$\dot{x} = -\frac{1}{27}\cos(3t) + C_1$$

Utilizando la condición inicial $\dot{x}_0 = -1/27\,\mathrm{m/s}$ se tiene que $C_1 = 0$. La posición de la partícula se obtiene de resolver la ecuación diferencial (integrando):

$$x = -\frac{1}{81}\sin(3t) + C_2$$

Utilizando la condición inicial $x_0 = 0$ se tiene que $C_2 = 0$. Finalmente, la velocidad y posición de la partícula están dadas por:

$$\dot{x} = -\frac{1}{27}\cos(3t) \qquad\qquad x = -\frac{1}{81}\sin(3t)$$

, donde la amplitud del movimiento es $1/81\,\mathrm{m}$. Es decir, las posiciones máxima y mínima son $\pm 1/81\,\mathrm{m}$.

Problema 2 [0.5 puntos]

Una partícula se mueve siguiendo la hélice de la figura y con posición definida por:

$$x = R\cos(\omega t) \qquad y = R\sin(\omega t) \qquad z = -\frac{h}{2\pi}\omega t$$

, donde ω es constante. Determine la rapidez de la partícula en el tiempo $|\dot{\mathbf{u}}(t)|$.

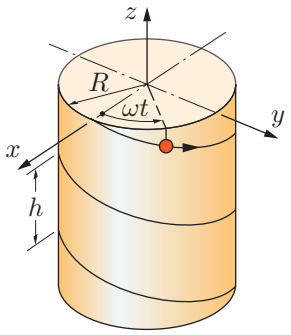
a) $|\dot{\mathbf{u}}(t)| = \dfrac{\omega}{2\pi}\sqrt{4\pi^2R^2 + h^2}$

b) $|\dot{\mathbf{u}}(t)| = \dfrac{\omega t}{2\pi}\sqrt{4\pi^2R^2 + h^2}$

c) $|\dot{\mathbf{u}}(t)| = \dfrac{\omega}{2\pi}\sqrt{4\pi^2R^2\,t + h^2}$

d) $|\dot{\mathbf{u}}(t)| = \dfrac{\omega\,t}{2\pi}$

e) $|\dot{\mathbf{u}}(t)| = \dfrac{\omega}{2\pi\,t}$



Solución

La velocidad de la partícula es:

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \begin{Bmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega\cos(\omega t) \\ -\frac{h}{2\pi}\omega \end{Bmatrix}$$

La norma del vector de velocidad (la rapidez de la partícula) resulta ser:

$$|\dot{\mathbf{u}}| = \sqrt{R^2\omega^2\sin^2(\omega t) + R^2\omega^2\cos^2(\omega t) + \frac{h^2}{4\pi^2}\omega^2}$$

$$|\dot{\mathbf{u}}| = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{4\pi^2R^2 + h^2}$$

Problema 3 [0.5 puntos]

El péndulo AB está suspendido desde un carro que se mueve con aceleración constante a hacia la derecha. Determine el ángulo constante θ en función de la aceleración constante a, la aceleración de gravedad g, el largo del péndulo ℓ, la masa concentrada del péndulo m, y la masa del carro M.

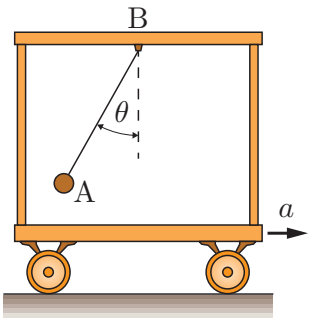
a) $\theta = \text{atan}\left(\dfrac{a}{g}\right)$

b) $\theta = \text{atan}\left(\dfrac{ma}{[m+M]\,g}\right)$

c) $\theta = \sqrt{\dfrac{ma}{g\ell}}$

d) $\theta = \text{atan}\left(\dfrac{ma}{g\ell}\right)$

e) $\theta = \text{asin}\left(\dfrac{ma}{[m+M]\,g}\right)$



Solución

El DCL del péndulo se muestra al costado, donde la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton resulta en:



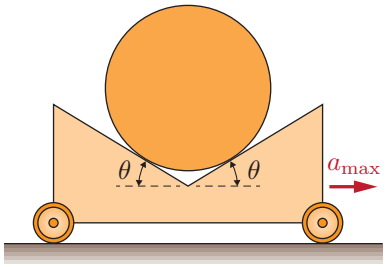
$$mg\begin{Bmatrix}0\\-1\end{Bmatrix} + T\begin{Bmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix}a\\0\end{Bmatrix}$$

La solución de dicho sistema resulta en:

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} \qquad\qquad \theta = \text{atan}\left(\frac{a}{g}\right)$$

Problema 4 [0.5 puntos]

Un cilindro uniforme se posiciona sobre un carro con forma de V definida por un ángulo θ. El roce del cilindro con las paredes el carro es despreciable (i.e $\mu = 0$). Determine la máxima aceleración constante $a_{\max}$ que puede tener el carro sin que se caiga el cilindro del mismo. Exprese su resultado en términos del ángulo θ, la aceleración de la gravedad g, la masa del cilindro m, y la masa del carro M.



a) $a_{\max} = g\ \tan\theta$

b) $a_{\max} = g\ \sin\theta$

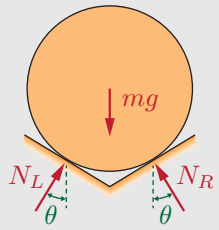
c) $a_{\max} = g\ \left(1 - \frac{1}{\cos\theta}\right)$

d) $a_{\max} = \frac{mg}{M}\ \sin\theta$

e) $a_{\max} = g\ (1 - \cos\theta)$

Solución

El DCL del cilindro se muestra al costado, donde la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton resulta en:



$$mg\begin{Bmatrix}0\\-1\end{Bmatrix} + N_L\begin{Bmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{Bmatrix} + N_R\begin{Bmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix}a\\0\end{Bmatrix}$$

El caso límite ocurre cuando $N_R = 0$, ya que la superficie no puede jalar del cilindro para mantenerlo en su lugar ($N_R < 0$). Con ello, el sistema de ecuaciones anterior para el caso límite resulta ser:

$$mg\begin{Bmatrix}0\\-1\end{Bmatrix} + N_L\begin{Bmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix}a_{\max}\\0\end{Bmatrix}$$

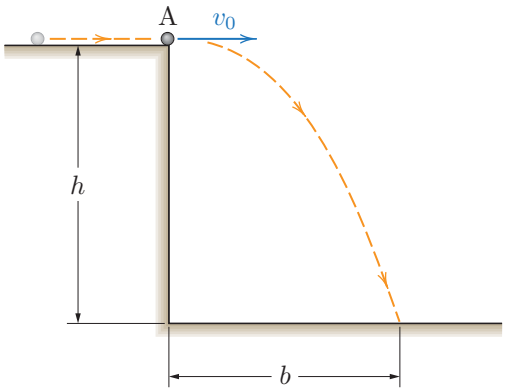
La segunda ecuación resulta en:

$$N_L = \frac{mg}{\cos\theta}$$

La normal izquierda es positiva, lo que es una buena señal. Luego, reemplazando en la primera ecuación resulta:

$$a_{\max} = g\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = g\ \tan\theta$$

Problema 5 [0.5 puntos]



Una partícula se lanza desde el punto A con velocidad horizontal $\mathbf{v}_0 = v_0\,\hat{\mathbf{i}}$. Determine la rapidez inicial v_0 para que la partícula choque con el suelo a una distancia b. Exprese sus resultados en términos de la aceleración de gravedad g, la altura h, y la distancia b.

a) $v_0 = b\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$

b) $v_0 = \sqrt{\dfrac{g\,h^2}{b}}$

c) $v_0 = \sqrt{\dfrac{g\,b^2}{h}}$

d) $v_0 = \dfrac{b^2}{h}\sqrt{g}$

e) $v_0 = \dfrac{b^2}{2h}\sqrt{g}$

Solución

Considerando como origen del sistema coordenado el pie del muro, se tiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$\mathbf{u}\,(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{Bmatrix} v_0 \\ 0 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 0 \\ h \end{Bmatrix}$$

La ecuación del eje vertical permite obtener el tiempo en que la partícula toca el suelo:

$$-\frac{g}{2}\,(t^\star)^2 + h = 0$$

$$t^\star = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

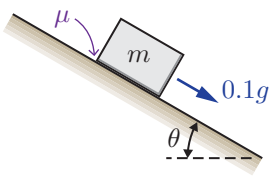
, donde la solución negativa se descartó por no tener sentido físico en este problema en particular. Reemplazando el tiempo $t^\star$ en la ecuación de posición horizontal y despejando la rapidez inicial v_0, se obtiene:

$$v_0\,t^\star = b$$

$$v_0 = b\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Problema 6 [0.5 puntos]

Un bloque de masa m está apoyado en un plano inclinado con ángulo θ sobre la horizontal. El coeficiente de fricción dinámica entre el bloque y la superficie es μ. Determine la ecuación que permite obtener el ángulo θ para que el bloque tenga una aceleración constate de $0{,}1g$ en la dirección del plano inclinado.



a) $\sin\theta - \mu\,\cos\theta = 0{,}1$

b) $\sin\theta + \mu\,\cos\theta = 0{,}1$

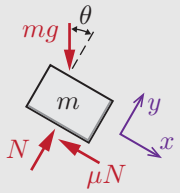
c) $\sin\theta\,\cos\theta - \mu = 0{,}1\,\cos\theta$

d) $\cos\theta - \mu\,\sin\theta = 0{,}1$

e) $\cos\theta + \mu\,\sin\theta = 0{,}1$

Solución

La figura al costado muestra el DCL del bloque. La fuerza de roce dinámica es $f_r = \mu N$. Luego, considerando un sistema coordenado orientado según el plano inclinado se tiene que:



$$mg\begin{Bmatrix}\sin\theta\\-\cos\theta\end{Bmatrix} + \mu N\begin{Bmatrix}-1\\0\end{Bmatrix} + N\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix}0{,}1\,g\\0\end{Bmatrix}$$

La segunda ecuación resulta en:

$$N = mg\,\cos\theta$$

Reemplazando el valor de N en la primera ecuación:

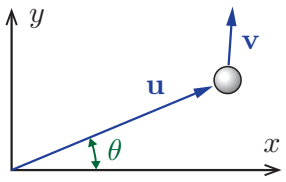
$$mg\,\sin\theta - \mu mg\,\cos\theta = m\,(0{,}1\,g)$$
$$\sin\theta - \mu\,\cos\theta = 0{,}1$$

Problema 7 [0.5 puntos]

La trayectoria de una partícula se define utilizando coordenadas polares. En cierto instante, el ángulo θ es tal que

$$\tan\theta = \frac{5}{12}$$

en el primer cuadrante, como muestra la Figura. En ese instante, la velocidad de la partícula es:



$$\mathbf{v} = 2\,\hat{\mathbf{e}}_r + 4\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Determine la velocidad $\mathbf{v}$ en coordenadas cartesianas (x e y).

a) $\mathbf{v} = \frac{4}{13}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{58}{13}\,\hat{\mathbf{j}}$

b) $\mathbf{v} = \frac{38}{13}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{44}{13}\,\hat{\mathbf{j}}$

c) $\mathbf{v} = \frac{44}{13}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{58}{13}\,\hat{\mathbf{j}}$

d) $\mathbf{v} = -\frac{38}{13}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{44}{13}\,\hat{\mathbf{j}}$

e) $\mathbf{v} = \frac{58}{13}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{4}{13}\,\hat{\mathbf{j}}$

Solución

La hipotenusa de un triángulo con $\tan\theta = 5/12$ es 13, y con ello:

$$\cos\theta = \frac{12}{13} \qquad\qquad \sin\theta = \frac{5}{13}$$

Los vectores base polares escritos en formato cartesiano son:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \begin{Bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{Bmatrix} \qquad\qquad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \begin{Bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{Bmatrix}$$

Reemplazando en el vector de velocidad dado:

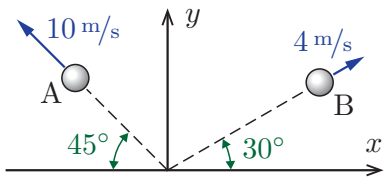
$$\mathbf{v} = 2\begin{Bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{Bmatrix} + 4\begin{Bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix}12/13\\ 5/13\end{Bmatrix} + 4\begin{Bmatrix}-5/13\\ 12/13\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{13}\begin{Bmatrix}24-20\\ 10+48\end{Bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{Bmatrix}4\\ 58\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \frac{4}{13}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{58}{13}\,\hat{\mathbf{j}}$$

Problema 8 [0.5 puntos]

Dos personas comienzan a correr desde el origen, pero en direcciones distintas. La persona A corre con rapidez 10 m/s, mientras que la persona B lo hace a 4 m/s, como muestra la Figura. Determine la velocidad relativa de la persona A respecto a la persona B.



a) $\left(-5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\,\hat{\mathbf{i}}+\left(5\sqrt{2}-2\right)\,\hat{\mathbf{j}}$ [m/s]

b) $\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\,\hat{\mathbf{i}}+\left(2-5\sqrt{2}\right)\,\hat{\mathbf{j}}$ [m/s]

c) $\left(2\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)\,\hat{\mathbf{i}}+\left(5\sqrt{2}+2\right)\,\hat{\mathbf{j}}$ [m/s]

d) $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\,\hat{\mathbf{i}}+\left(-5\sqrt{2}-2\right)\,\hat{\mathbf{j}}$ [m/s]

e) $\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\,\hat{\mathbf{i}}+\left(5\sqrt{2}-2\right)\,\hat{\mathbf{j}}$ [m/s]

Solución

Las velocidades de las personas son:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{A}} = 10\begin{Bmatrix}-\cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2}\end{Bmatrix} \qquad \mathbf{v}_{\mathrm{B}} = 4\begin{Bmatrix}\cos 30^\circ \\ \sin 30^\circ\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}2\sqrt{3} \\ 2\end{Bmatrix}$$

Con ello, la velocidad relativa de la persona A respecto a la persona B es:

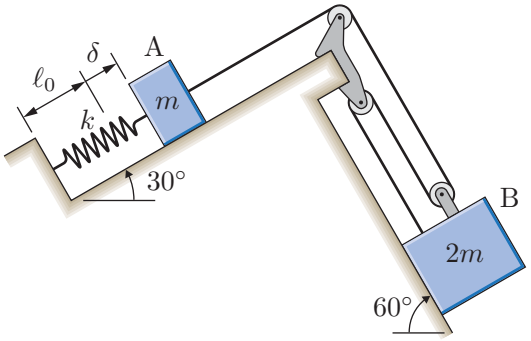
$$\mathbf{v}_{\mathrm{A/B}} = \mathbf{v}_{\mathrm{A}} - \mathbf{v}_{\mathrm{B}} = \begin{Bmatrix}-5\sqrt{2}-2\sqrt{3} \\ 5\sqrt{2}-2\end{Bmatrix}\ [\mathrm{m/s}]$$

Problema de Desarrollo [2.0 puntos]

Dos bloques de masa m y $2m$ están en planos inclinados opuestos cuyas superficies tienen roce despreciable (i.e. $\mu = 0$). El bloque de masa m se conecta a un resorte ideal de largo natural ℓ_0 y rigidez k. Inicialmente el resorte no se ha estirado, es decir $\delta = 0$. Desde esa posición se suelta el sistema y se deja evolucionar. Se pide determinar:

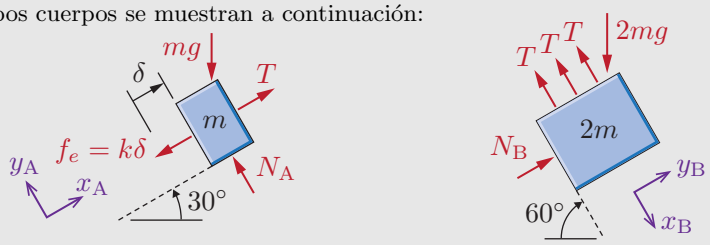
a) La aceleración del bloque de masa $2m$ (bloque B) el instante que se suelta el sistema si $\delta = 0$.

b) La deformación del resorte δ necesaria para que el sistema no acelere cuando se suelta.



Solución

Los DCL de ambos cuerpos se muestran a continuación:



La aplicación de la 2da ley de Newton a ambos bloques resulta en:

$$\text{Bloque A}: \quad T\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + f_e\begin{Bmatrix}-1\\0\end{Bmatrix} + N_A\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} + mg\begin{Bmatrix}-\sin 30^\circ\\-\cos 30^\circ\end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix}\ddot{x}_A\\0\end{Bmatrix}$$

$$\text{Bloque B}: \quad 3T\begin{Bmatrix}-1\\0\end{Bmatrix} + N_B\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} + 2mg\begin{Bmatrix}\sin 60^\circ\\-\cos 60^\circ\end{Bmatrix} = 2m\begin{Bmatrix}\ddot{x}_B\\0\end{Bmatrix}$$

En este caso en particular las ecuaciones asociadas a y_A e y_B no son necesarias ya que no hay roce en la superficie (i.e. no es necesario calcular N_A o N_B).

La ecuación de ligadura se puede obtener llamando c_A y c_B a las distancias iniciales de cada bloque a la polea superior. Con ello, llamando ℓ_T al largo total de la cuerda se tiene que:

$$\begin{aligned}\ell_T &= C_A - x_A + s_{AB} + 3\,(C_B + x_B) \pm \text{constantes}\\ 0 &= -\dot{x}_A + 3\,\dot{x}_B\\ \ddot{x}_A &= 3\,\ddot{x}_B\end{aligned}$$

En el caso en que $\delta = 0$ se tiene que $f_e = 0$, y con ello las ecuaciones del sistema son:

$$\begin{aligned}T - mg\,\sin 30^\circ &= m\,\ddot{x}_A\\ -3T + 2mg\,\sin 60^\circ &= 2mg\,\ddot{x}_B\\ \ddot{x}_A &= 3\,\ddot{x}_B\end{aligned}$$

, cuya solución es:

$$T = \frac{3\sqrt{3}+1}{11}\,mg \qquad \ddot{x}_A = \frac{6\sqrt{3}-9}{22}\,g \qquad \ddot{x}_B = \frac{2\sqrt{3}-3}{22}\,g$$

Es decir, el bloque B acelera descendiendo por el plano inclinado a $\left[{}^{(2\sqrt{3}-3)}/_{22}\right] g$.

En el segundo caso se tiene que $f_e = k\,\delta$, donde ya se ha considerado que la fuerza f_e va en el sentido contrario al desplazamiento δ (ver Figura). Se busca el desplazamiento δ que cumple con $\ddot{x}_{\mathrm{A}} = \ddot{x}_{\mathrm{B}} = 0$. Es decir, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} T - f_e - mg\,\sin 30^\circ &= 0 \\ -3T + 2mg\,\sin 60^\circ &= 0 \\ f_e &= k\,\delta \end{aligned}$$

, cuya solución es:

$$T = \frac{\sqrt{3}}{3}\,mg \qquad f_e = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}\,mg \qquad \delta = \frac{f_e}{k} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}\left(\frac{mg}{k}\right)$$

Es decir, si el sistema comienza desde el reposo con una deformación inicial del resorte igual a $\delta = \left[{}^{(2\sqrt{3}-3)}/_{6}\right]\left(\frac{mg}{k}\right)$, entonces el sistema permanece estático.