Control 03

Fecha: 6 de Noviembre 2020

1. Un pedazo de plastilina, de masa m_1, se mueve con velocidad de v_1 y choca, quedando incrustada, en un bloque de madera de masa m_2 que está en reposo. El bloque está unido a un muelle que se contrae de una cantidad L. Si no hay rozamiento entre el suelo y el bloque, determine la velocidad inicial del conjunto v_i, la constante elástica del muelle k y el periodo de oscilación del movimiento vibratorio generado. ¿Que pasa en el caso $m_1 \ll m_2$?

Durante el choque se conserva la cantidad del movimiento del conjunto. Después del choque, el conjunto formado por la plastilina y el bloque de madera contrae el muelle, la fuerza elástica detiene al conjunto y la energí a cinética se almacena en forma de energía potencial elástica en el resorte. Una vez que el bloque se detiene, la fuerza elástica obliga al bloque a describir un movimiento vibratorio armónico simple de amplitud L, durante el cual la energía mecánica del conjunto permanece constante. Elegimos un sistema de referencia con el eje x horizontal y el origen en el punto en el que se produce el impacto. Aplicando la ley de la conservación de la cantidad de movimiento en el instante del choque, y como el bloque está inicialmente en reposo, se tiene

$$m_1 v_1 \;=\; (m_1 + m_2) v_i \qquad \Rightarrow \qquad v_i \;=\; \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

con v_i la velocidad inicial del movimiento oscilatorio. La energía cinética de la plastilina y del bloque de madera se emplea en contraer el resorte y se convierte en energíia elástica:

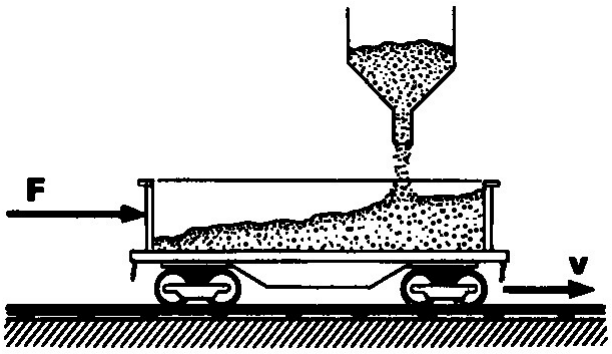
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_i^2 \;=\; \frac{1}{2} k L^2 \qquad \Rightarrow \qquad k \;=\; \frac{(m_1 + m_2)}{L^2} v_i^2 \;=\; \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \left(\frac{v_1}{L}\right)^2 .$$

El período del movimiento oscilatorio es

$$T \;=\; 2\pi \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{k}} \;=\; 2\pi \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{L}{v_1} .$$

Si $m_1 \ll m_2$ entonces $v_i \simeq 0$ y por lo tanto el tiempo T necesario para hacer una oscilación se vuelve infinito. ■

2. La arena cae de una tolva estacionaria sobre un vagón de carga que se está moviendo con velocidad constante **v**. La arena cae a una tasa dm/dt. ¿Cuánta fuerza se necesita para mantener el vagón moviendose con velocidad constante **v**?



El momentum total del sistema en el tiempo t está dado por la expresión

$$\mathbf{P}(t) = M(t)\mathbf{v} + (\Delta m)\mathbf{u}$$

donde $M(t)$ es la masa de la arena en el vagón de carga y Δm es la masa de la arena que en ese instante cae de la tolva con una velocidad vertical $\mathbf{u}$. En el instante $t + \Delta t$ la expresión del momentun total es

$$\mathbf{P}(t + \Delta t) = M(t)\mathbf{v} + (\Delta m)\mathbf{v}$$

donde la cantidad de arena Δm ya cayó en dentro del vagón de carga. La variación del momentum es:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{P} &= \mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t) \\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{u})\Delta m.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta t} = (\mathbf{v} - \mathbf{u})\frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

En el límite $\Delta t \to 0$ se obtiene

$$\mathbf{F} = (\mathbf{v} - \mathbf{u})\frac{dm}{dt}.$$

La componente de esta expresión sobre el eje horizontal es

$$F = (v - u)\left(\frac{dm}{dt}\right) = v\frac{dm}{dt}$$

donde la componente horizontal de la velocidad que cae de la tolva es cero. ■