PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2024

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Control 03 – Pauta

Duración total: 70 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de ésta. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:
   - Cometer fraude en la evaluación.
   - Adulterar el acta de asistencia.
   - Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas.
   - Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica.
   - Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Nota El control tiene dos formas diferentes. La presente pauta de solución contiene todos los problemas utilizados.

Problema 1 [3.0 puntos]

Una bala de masa m viaja a una rapidez v_0 y se incrusta en un carro de masa M inicialmente en reposo. Después del choque, el sistema formado por el carro y la bala incrustada se mueve a una rapidez de v_1. Determine la razón entre las masas del carro y de la bala $\frac{M}{m}$.

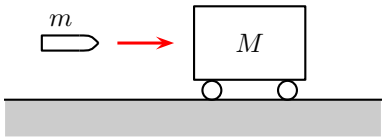


Figura 1: Bala incrustada en carro

Solución

La colisión es de tipo "perfectamente plástica": se conserva el momentum lineal y ambos objetos finalizan la colisión desplazándose con la misma velocidad y juntos. La conservación del momentum lineal resulta en:

$$m\,v_0 = m\,v_1 + M\,v_1$$

Despejando la masa M en función de las otras variables:

$$M = m\left(\frac{v_0 - v_1}{v_1}\right)$$

Con ello, se puede obtener la razón (cociente) pedida:

$$\frac{M}{m} = \frac{v_0 - v_1}{v_1}$$

Problema 2 [3.0 puntos]

Una barra de densidad no uniforme y de largo L, puede girar libremente en torno a un eje fijo 0. La barra permanece en equilibrio unida a una cuerda horizontal en la posición indicada en la figura. Si el peso de la barra y la tensión de la cuerda son idénticos e iguales a 800 N, determine la distancia entre el punto O y el centro de masas CM de la barra. Considere $\cos\theta = 0{,}6$ y $\sin\theta = 0{,}8$.

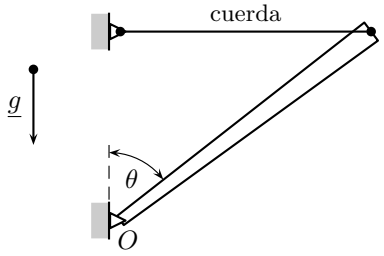


Figura 2: Barra unida a cuerda

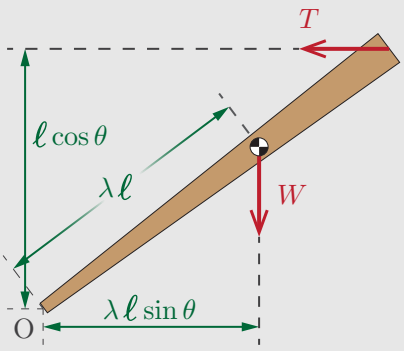
Solución

Consideremos que el centro de masa de la barra se encuentra a distancia $\lambda\ell$ medida desde O, donde ℓ es el largo de la barra y $0 < \lambda \leq 1$. Las dos fuerzas que actúan sobre la barra son el peso W y la tensión en la cuerda T. La barra está en equilibrio de momentos en O debido a que no rota (está quieta). Es decir:

$$+(T)\,(\ell\,\cos\theta) - (W)\,(\lambda\,\ell\,\sin\theta) = 0$$

Dividiendo por ℓ, y simplificando la expresión gracias a que $W = T$, se tiene que:

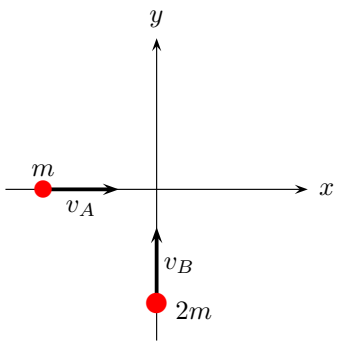
$$\frac{3}{5} - \lambda\,\frac{4}{5} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \lambda = \frac{3}{4}$$



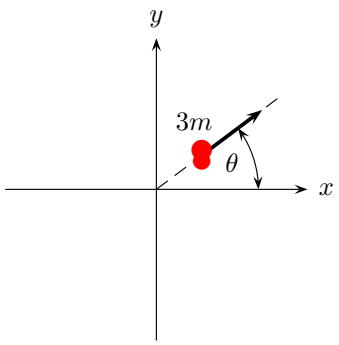
Es decir, el centro de masa de la barra se encuentra a $\frac{3}{4}\ell$ medidos desde el pivote en O.

Problema 3 [3.0 puntos]

Una partícula de masa m viaja a lo largo del eje x con rapidez v_A, y choca con otra partícula de masa $2m$ que viaja a lo largo del eje y con rapidez v_B. Las partículas quedan unidas después del choque y se mueven en dirección θ con respecto el eje x. Determine la razón $\frac{v_B}{v_A}$ entre las rapideces de las partículas antes de chocar ($\cos\theta = \frac{4}{5}$ y $\sin\theta = \frac{3}{5}$).



Antes de la colisión



Después de la colisión

Solución

La colisión es de tipo "perfectamente plástica": se conserva el momentum lineal y ambos objetos finalizan la colisión desplazándose con la misma velocidad y juntos. La conservación del momentum lineal resulta en:

$$m\,v_{\mathrm{A}}\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + 2\,m\,v_{\mathrm{B}}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} = 3\,m\,v\begin{Bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{Bmatrix}$$

$$m\begin{Bmatrix}v_{\mathrm{A}}\\ 2\,v_{\mathrm{B}}\end{Bmatrix} = m\,v\begin{Bmatrix}12/5\\ 9/5\end{Bmatrix}$$

Despejando v_{A} y v_{B} de cada ecuación, se tiene que:

$$v_{\mathrm{A}} = \frac{12}{5}\,v \qquad\qquad v_{\mathrm{B}} = \frac{9}{10}\,v$$

Finalmente, la razón (cociente) pedida es:

$$\frac{v_{\mathrm{B}}}{v_{\mathrm{A}}} = \left(\frac{9\,v}{10}\right)\left(\frac{5}{12\,v}\right) = \frac{3}{8}$$

Problema 4 [3.0 puntos]

El cilindro A se mueve hacia la derecha con rapidez v e impacta al cilindro B que está inicialmente en reposo y conectado a un resorte de rigidez k. Ambos cilindros tienen masa m y el coeficiente de restitución del choque es e. Determine una expresión para la compresión máxima del resorte δ en términos de v, m, k, y e.

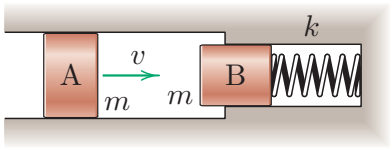


Figura 3: Cilindros de igual masa m que colisionan.

Solución

Las ecuaciones que rigen el impacto central son dos: conservación de momentum (lineal), y coeficiente de restitución. En este caso específico, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} m\,v = m\,v'_{\mathrm{A}} + m\,v'_{\mathrm{B}} \\ e = \dfrac{v'_{\mathrm{B}} - v'_{\mathrm{A}}}{v - 0} \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad v'_{\mathrm{A}} = \frac{v}{2}\,(1-e) \quad , \quad v'_{\mathrm{B}} = \frac{v}{2}\,(1+e)$$

En el instante de máxima compresión del resorte, la energía cinética del bloque B se convierte en su totalidad en energía potencial elástica. Es decir, utilizando el principio de trabajo y energía se tiene que:

$$\begin{aligned} T_1 + V_{g1} + V_{e1} + U^{\star}_{12} &= T_2 + V_{g2} + V_{e2} \\ \frac{1}{2}\,m\left(v'_{\mathrm{B}}\right)^2 + 0 + 0 + 0 &= 0 + 0 + \frac{1}{2}\,k\,\delta^2 \\ \delta &= \pm\frac{v}{2}\,(1+e)\,\sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

, donde sólo la solución positiva tiene sentido físico (y es de interés) en nuestro caso.

Problema 5 [3.0 puntos]

Una placa vertical de altura 4 m y profundidad 1 m (fuera del plano) sirve de compuerta de aguas. La placa está rotulada (tiene un pivote) en el punto A y bloquea agua de altura h gracias a un apoyo en su punto inferior B, el cual ejerce una fuerza horizontal neta B. El empuje del agua tiene forma triangular, y se puede representar equivalentemente por una única fuerza $R = \frac{1}{2}h\gamma_w$, donde γ_w es el peso específico del agua. La fuerza R se ubica en el centroide (centro de masa) del triángulo de empuje del agua. Determine la magnitud de la fuerza B si la placa está en equilibrio. Exprese su resultado en términos de h y γ_w.

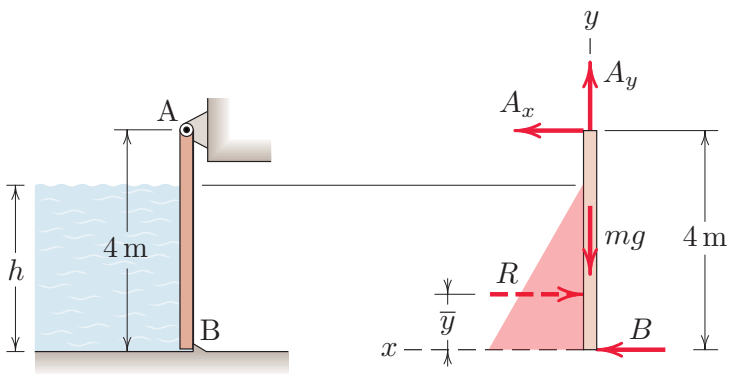


Figura 4: Compuerta de agua y su DCL.

Solución

Consideraremos el datum (origen del sistema coordenado) como el punto B (base de la placa). El centro de masa del triángulo de presiones se ubica en el promedio de sus vértices. Es decir, la coordenada vertical se encuentra en:

$$\overline{y} = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) = \frac{1}{3}(0 + h + 0) = \frac{h}{3}$$

La compuerta debe cumplir con el equilibrio de momento Debido a que la compuerta no está rotando. Calculando la sumatoria de momento en el punto A (para evitar calcular las fuerzas A_x y A_y), se tiene que:

$$\sum m_z = 0$$
$$+(R)(4 - \overline{y}) - (B)(4) = 0$$

Despejando B y reemplazando los valores de R y $\overline{y}$, se tiene:

$$B = \frac{R(12 - h)}{12} = \frac{h\gamma_w}{24}(12 - h)$$

Problema 6 [3.0 puntos]

Una placa cuadrangular de espesor uniforme t y densidad uniforme ρ tiene la geometría que muestra la Figura. Se pide determinar:

a) La masa total de la placa. **[1 punto]**

b) La ubicación del centro de masa en el plano x—y. **[2 puntos]**

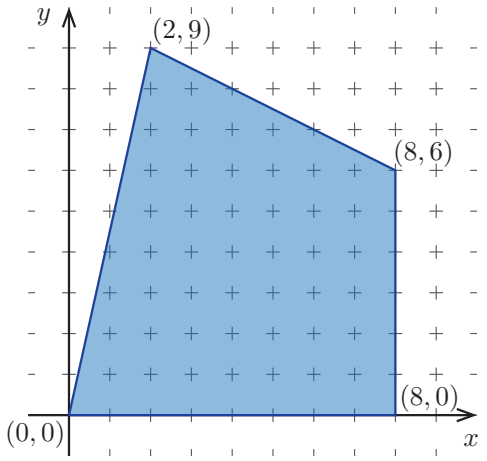


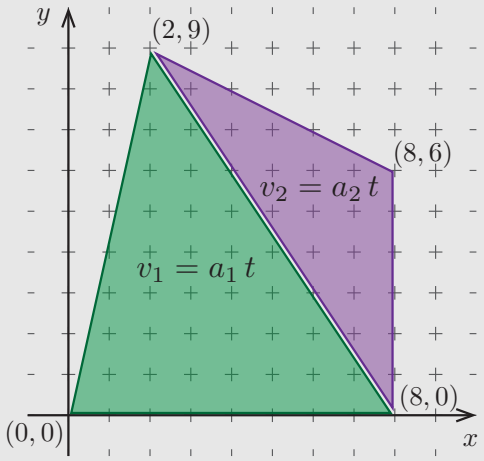
Figura 5: Placa cuadrangular de espesor y densidad uniforme.

Solución

La placa se divide en dos triángulos como muestra la figura al costado. La razón para ello radica en que es sencillo determinar el área de cada triángulo (cualquier otra división bien hecha llega al mismo resultado final). En nuestro caso se tiene:

$$a_1 = \frac{1}{2}\, b_1\, h_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(8)\,(9) = 36$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\, b_2\, h_2 = \left(\frac{1}{2}\right)(6)\,(8-2) = 18$$



Luego, como el espesor y la densidad son uniformes:

$$m_1 = \rho\, v_1 = \rho\, a_1\, t = 36\,\rho\, t$$

$$m_2 = \rho\, v_2 = \rho\, a_2\, t = 18\,\rho\, t$$

Los centroides de cada triángulo se encuentran en:

$$\begin{Bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{y}_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3}\left[\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 8 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 9 \end{Bmatrix}\right] = \begin{Bmatrix} 10/3 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{x}_2 \\ \overline{y}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3}\left[\begin{Bmatrix} 8 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 8 \\ 6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 9 \end{Bmatrix}\right] = \begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

Finalmente, el centro de masa (centroide) de la placa completa se encuentra ubicado en:

$$\begin{Bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{Bmatrix} = \frac{36\,\rho\, t \begin{Bmatrix} 10/3 \\ 3 \end{Bmatrix} + 18\,\rho\, t \begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \end{Bmatrix}}{36\,\rho\, t + 18\,\rho\, t} = \frac{2\begin{Bmatrix} 10/3 \\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \end{Bmatrix}}{3} = \begin{Bmatrix} 38/9 \\ 11/3 \end{Bmatrix}$$