ICE1514 – Dinámica

Apuntes de clase para un curso universitario de *Dinámica para Ingenieros*.

Autor
Tomás Zegard

Pontificia Universidad Católica de Chile
Santiago, Chile

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Version: **2022.04–beta1**

21 de octubre de 2022

Preámbulo

Este es un curso introductorio de *dinámica* (rama de la física) para estudiantes de ingeniería. El estudio de la *dinámica* considera varios tópicos pero este curso se centra en: cinemática, cinética, trabajo–energía, e impulso–momentum; todos estos inicialmente para partículas, pero luego también para cuerpos rígidos.

El estudio de estos apuntes requiere ciertos conocimientos previos de cálculo básico, geometría, y ecuaciones diferenciales. No se espera un dominio absoluto de estos y se hace un breve repaso de ellos al comienzo.

El contenido tiene reputación de ser difícil. La frustración con el contenido hace cuestionarse si este guarda relación con el desempeño profesional del ingeniero. Lo cierto es que la ingeniería resuelve problemas a través de la *ciencia aplicada*. Es decir, la ingeniería hace uso de la física, química, matemática, biología, y otras, para resolver problemas relevantes para la sociedad. Aquí es donde radica el primer problema del estudiante: la educación primaria y secundaria se basan en reconocer *patrones de problemas*. La mecánica frecuentemente observada en la educación escolar es: (1) en clase se presenta un nuevo tipo de problema al estudiante; (2) se ejercita con problemas idénticos pero cuyos números han sido cambiados; y finalmente (3) la evaluación es nuevamente el mismo problema, pero con otros números. Es decir, la solución en la educación escolar consiste en: (a) reconocer el patrón del problema, y (b) aplicar la mecánica de solución... algo que algunos llaman *mecanizar los problemas*. En la educación superior (universidad) esto deja de ser válido ya que los problemas de la práctica profesional (problemas reales) no siguen patrones.

El contenido del curso resultará difícil para aquellos que buscarán mecanizar el contenido. Es fácil caer en la tentación de leer cientos de problemas como *forma de estudio*, con la esperanza de que en la evaluación sepan reconocer un patrón conocido. En cambio, el alumno que "comprende el contenido" tendrá mejor desempeño cuando se le presente un problema que nunca ha visto antes. Esto será también cierto en los problemas que en el futuro encontrará en su desempeño profesional. Es decir, se recomienda **privilegiar la comprensión de pocos problemas por sobre la lectura de muchos**.

El alumno que comprende el contenido considerará el curso fácil y hasta quizás entretenido. Lamentablemente, este cambio de paradigma en el aprendizaje se ve obstaculizado por la porfía del estudiante hacia mecanizar. Comportamiento que es esperable: esta metodología de estudio les ha funcionado por muchos años. Por la misma razón se evita entregar un *formulario*; e.g., tener un formulario con las ecuaciones de relatividad especial no significa que sepa cómo usarlas. Este documento explica el origen de las ecuaciones de la dinámica, haciendo hincapié en los supuestos y restricciones. Se espera entonces desarrollar el pensamiento crítico para **resolver un problema teniendo conciencia de los alcances y limitaciones de su solución**.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Historia del Curso

El curso ICE1514 *Dinámica* es el fruto de cambios curriculares recientes en el plan de formación de los ingenieros dentro de la *Pontificia Universidad Católica de Chile* (PUC). Los cambios buscan dar la mayor flexibilidad posible, y al mismo tiempo acortar la duración del plan de estudio. La historia es relevante porque explica el contenido actual del curso, y algunas dificultades que presenta para los alumnos.

Mi versión de la historia comienza en 1998. El curso introductorio de "física para ingenieros" era un *curso de servicio* dictado por la facultad de física llamado FIS1512 *Física Clásica*. Paralelamente existía un curso equivalente del *Departamento de Ingeniería Estructural & Geotécnica* (DIEG) llamado ICE1013 *Dinámica*. En ese entonces una generación de ingeniería tenía sólo 400 alumnos (hoy tiene 800). Aproximadamente 350 de los 400 tomaban el camino de FIS1512, y sólo un reducido grupo de valientes lo hacía con ICE1013. ICE1013 tenía reputación de ser más difícil, pero también de lograr mayor encanto y aprendizaje en aquellos que lo hacían[1].

El cambio curricular de 2009 introdujo grandes cambios en la formación de los ingenieros de la PUC. Se hicieron esfuerzos para acortar el plan de formación, lo que impactó FIS1512 e ICE1003. Para continuar el relato, es necesario comprender que hay dos disciplinas complementarias pero diferentes: la *estática* (física de cuerpos que no se mueven) y la *dinámica* (física de cuerpos en movimiento). Se decidió que 1 sólo curso combinaría ambas disciplinas y producto de ello nacen FIS1513 e ICE1513, ambos llamados *Estática y Dinámica*. Casi paralelamente, el curso ICE1513 permanecería inactivo por años por razones varias, dejando FIS1513 como la única alternativa para avanzar por la malla curricular. Con este cambio, el curso donante de contenido ICE1003 *Estática*, se esperaba quedara redundante dentro del plan de estudios para así ser eliminado.

La debilidad del nuevo plan era evidente: comprime dos cursos en uno, cada uno difícil por sí solo. Era imposible lograr la profundidad necesaria en los temas. Algunos pocos lograban el nivel de dominio deseado, pero eso sería la excepción y no la regla, y dependedía fuertemente de la voluntad y motivación propia del estudiante. Las especialidades (*majors* en jerga actual) que necesitan dominio de la estática no tardaron en notar el problema *aguas abajo*. Los alumnos no manejaban las competencias esperadas al llegar a cursos más avanzados. En una jugada de marketing, ICE1003 se transforma en ICE2005 *Mecánica Estructural*, e introduce algunos cambios en el programa. El curso ICE2005 se transformó en el nuevo bastión donde se enseñaba la estática, pero a costa de no reducir el número de cursos de la malla curricular.

Regresé como profesor a la misma casa de estudios donde hice mi pregrado[2], donde me tocó dictar ICE2005 el año 2017. Me explicaron que ya no era necesario comenzar de cero porque los principios básicos de la estática se estudiaban en el curso previo. La idea era prometedora; podríamos lograr mayor profundidad y tocar temas avanzados de estática, lo que contribuirá a la formación de estos nuevos ingenieros civiles[3]. La verdad es que de estática comprendían poco o nada. Esto se reflejaba también en el "examen de licenciatura" (*fundamentals exam* en jerga actual), cuyos resultados mostraban un dominio pobre de las competencias asociadas.

Al mismo tiempo que yo dictaba ICE2005 se decidió reactivar ICE1513. Nuevamente aparecía la opción de adquirir las competencias por dos caminos paralelos en la malla curricular. La esperanza era que los interesados en las especialidades civiles escogerían ICE1513 porque los prepararía mejor para lo que venía (similar a ICE1013 en el pasado). La respuesta del alumnado fue poco cálida: habiendo combinado dos cursos en un semestre, el curso ya era lo suficientemente difícil.

El semestre siguiente se me pidió dictar ICE1513. Además, se solicitó que ICE y FIS trabajaran conjuntamente para que contribuyendo ambas facultades el curso resulte mejor y contribuya eficazmente a la formación de los estudiantes. Habiendo experimentado el problema aguas abajo (en

[1] Yo cursé FIS1512: no era un alumno muy destacado en mis primeros años.

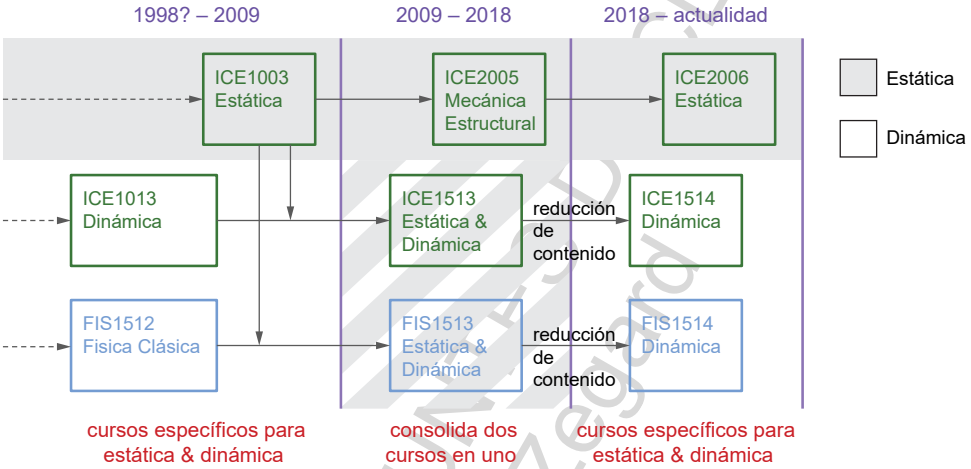
[2] Luego de unos desastrosos primeros años en la PUC, mejoré mucho mi rendimiento académico. Una cosa llevó a la otra, y luego de hacer estudios de postgrado regresé como docente al mismo lugar donde todo comenzó.

[3] Notar que previamente sólo hice referencia a "ingeniero" y sólo ahora hice uso de "ingeniero civil". Esto se debe a que no todas las especialidades son internacionalmente reconocidas como civiles. Internacionalmente, las ingenierías reconocidas como civiles son: hidráulica, ambiental, construcción, transporte, estructural, y geotécnica.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

ICE2005), esto me daba una oportunidad de ver lo que estaba ocurriendo aguas arriba. Además, esta sería la primera de muchas ocasiones en que FIS1513 e ICE1513 se coordinarían[4]. Habiéndo hecho ICE1513 e ICE2005 pude emitir un juicio informado de lo que estaba ocurriendo: ICE/FIS1513 está sobrecargado de contenido. Conclusión a la que otros profesores también llegarían (incluso mucho antes de mi aparición en el curso).

La solución sería elaborada por un equipo de trabajo conjunto entre FIS e ICE; equipo al cual tuve el privilegio de ser invitado. Se determinó que para lograr un mejor aprendizaje era necesario descomprimir el contenido. Esto significaba sacar estática del curso, con lo que se daba más tiempo a los alumnos para madurar los conceptos y contenido. Estática se abordaría en detalle en ICE2005, lo que constituía un retorno a las condiciones pre–2009. Esto da origen a los cursos FIS1514 e ICE1514 *Dinámica*; mientras que ICE2005 pasa a ser ICE2006 *Estática*.



La nueva propuesta no es realmente "nueva"; es el esquema que se utiliza en la gran mayoría de universidades: 1 curso para estática, y 1 curso para dinámica. Además, la condición es muy similar a pre–2009, al punto que uno de los libros frecuentemente utilizados es aquel que se tenía para FIS1512. Los resultados del cambio tardarán años en ser visibles, pero algunos de los profesores que han participado en el (nuevo) curso miran positivamente la reducción de contenidos.

Otro problema que introduciría los cambios de 2009 es que ahora se recomendaba tomar el curso ICE2313 *Mecánica de Solidos* antes que ICE2006 *Estática*. Estudiar la mecánica de sólidos (o la mecánica de fluidos) antes de dominar la estática es *poner la carreta delante de los bueyes*... pero esa es historia para otro día.

Tomás Zegard (2020)

BORRADOR PUNTO DE CLASE Tomás Zegard

[4]No hay ninguna obligación de coordinar entre ICE y FIS debido a que pertenecen a facultades diferentes y tienen distinta sigla. La coordinación se decide al comienzo de cada edición (pocos días antes del comienzo) y significa un esfuerzo adicional que deben hacer los profesores. Este esfuerzo adicional se hace con miras a una mejor calidad de docencia y también porque el alumnado así lo prefiere.

Índice general

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

1. Introducción y Repaso **8**
1.1. Notación y Definiciones . . . 8
1.1.1. Notación . . . 8
1.1.2. Definiciones . . . 8
1.2. Vectores . . . 9
1.2.1. Definiciones de un vector . . . 9
1.2.2. Normas vectoriales . . . 10
1.3. Operaciones sobre escalares y vectores . . . 11
1.3.1. Producto escalar . . . 11
1.3.2. Suma . . . 11
1.3.3. Resta . . . 11
1.3.4. Producto punto . . . 12
1.3.5. Producto cruz . . . 12
1.3.6. Producto triple . . . 13
1.4. Cosenos directores . . . 14
1.5. Derivadas e integrales temporales . . . 17
1.5.1. Derivada temporal . . . 17
1.5.2. Integrales y la variable muda . . . 17
1.6. EDO: separación de variables . . . 18
1.6.1. Solución de EDOs: integrales indefinidas . . . 18
1.6.2. Solución de EDOs: integrales definidas . . . 20
1.7. Leyes de Newton . . . 21

2. Cinemática **22**
2.1. Cinemática de una partícula . . . 22
2.2. Movimiento rectilíneo (movimiento 1D) . . . 23
2.2.1. Movimiento con aceleración constante . . . 24
2.2.2. Movimiento con aceleración errática . . . 27
2.2.3. Método gráfico aplicado a cinemática . . . 31
2.3. Movimiento rectangular cartesiano (movimiento 2D/3D) . . . 34
2.4. Movimiento en coordenadas polares y cilíndricas . . . 38
2.4.1. Método 1: derivación gráfica . . . 40
2.4.2. Método 2: derivación algebraica . . . 40
2.4.3. Cinemática en coordenadas polares o cilíndricas . . . 41
2.4.4. Definición de velocidad y aceleración angular . . . 42
2.4.5. Movimiento circular . . . 44
2.5. Movimiento relativo . . . 49
2.6. Movimiento en coordenadas esféricas . . . 53
2.6.1. Convención A: ángulo de elevación . . . 53
2.6.2. Convención B: ángulo polar . . . 55
2.6.3. Resumen de movimiento en coordenadas esfricas . . . 57

3. Cinética **59**
3.1. 2da ley de Newton . . . 59
3.2. Fuerzas típicas . . . 60
3.2.1. Fuerza gravitacional . . . 60
3.2.2. Fuerzas normal y de fricción (seca) . . . 60
3.2.3. Fuerza elástica . . . 62
3.2.4. Tensiones en cuerdas, cables, y cadenas . . . 63
3.3. Diagrama de cuerpo libre (DCL) . . . 64
3.4. Poleas y ligaduras . . . 69
3.4.1. Movimiento dependiente . . . 69
3.4.2. Múltiples grados–de–libertad . . . 71
3.5. Roce viscoso (amortiguación) . . . 75

4. Trabajo & Energía **79**
4.1. Trabajo hecho por fuerzas típicas . . . 80
4.1.1. Trabajo hecho por una fuerza constante . . . 80
4.1.2. Trabajo hecho por una fuerza central . . . 81
4.1.3. Trabajo hecho por un resorte lineal (fuerza central) . . . 82
4.1.4. Trabajo hecho por la fuerza de gravedad . . . 83
4.1.5. Trabajo hecho por la fuerza de gravedad (gran escala) . . . 84
4.2. Fuerzas conservativas y no-conservativas . . . 84
4.2.1. Trabajo hecho por la fuerza de roce (fricción seca) . . . 84
4.3. Conservación de energía . . . 85
4.3.1. Relación trabajo y energía potencial . . . 85
4.3.2. Ecuación de energía utilizando potenciales . . . 86
4.3.3. Energía mecánica total . . . 86
4.4. Resumen: trabajo y energía . . . 86
4.5. Potencia . . . 94
4.5.1. Eficiencia . . . 94

5. Vibración & Osciladores **98**
5.0.1. Vibración libre sin amortiguamiento . . . 98
5.0.2. Péndulos . . . 100
5.0.3. Posición de equilibrio con fuerzas estáticas . . . 100
5.1. Vibración libre amortiguada . . . 103

6. Impulso & Momentum **107**
6.1. Impulso y momentum lineal . . . 107
6.2. Conservación de momentum lineal . . . 113
6.3. Colisiones . . . 114
6.3.1. Impacto central . . . 114
6.3.2. Coeficiente de restitución . . . 116
6.3.3. Impacto oblicuo . . . 117
6.4. Sistemas de masa variable . . . 122
6.4.1. Sistemas que pierden o eyectan masa . . . 122
6.4.2. Sistemas que ganan o capturan masa . . . 123
6.4.3. Caso general . . . 124

7. Dinámica de cuerpos rígidos **127**
7.1. Momento (torque) . . . 127
7.1.1. Momento respecto a un punto (2D) . . . 128
7.1.2. Momento en tres dimensiones . . . 128
7.1.3. Regla de la mano derecha (RMD) . . . 129
7.1.4. Centro de masa . . . 129
7.2. Momentum angular . . . 135

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

7.2.1. Relación entre momento y momentum angular . . . 135
7.2.2. Conservación de momentum angular . . . 136
7.2.3. Principio de impulso–momentum angular en 2D . . . 136
7.3. Cinemática rotacional . . . 140
7.3.1. Cinemática rotacional en 2D . . . 141
7.3.2. Cinemática rotacional en 3D . . . 142
7.4. Cinética de cuerpos rígidos . . . 145
7.4.1. Momento de inercia 2D . . . 146
7.4.2. Momento de inercia en 3D . . . 150
7.4.3. Cálculo del momento de inercia . . . 151
7.4.4. Momento de inercia de área . . . 152
7.4.5. Cambio de eje de rotación . . . 153
7.4.6. Radio de giro . . . 154
7.5. Trabajo y energía de rotación . . . 160
7.5.1. Energía de un cuerpo que se traslada y rota . . . 160
7.5.2. Trabajo hecho por un momento (torque) . . . 161

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Capítulo 1

Introducción y Repaso

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

1.1. Notación y Definiciones

1.1.1. Notación

No existe un acuerdo universal para la notación de escalares, vectores, y matrices. No obstante, el siguiente recuadro resume la mayoría de las convenciones y donde típicamente se utilizan:

	Publicaciones Científicas	Textos Pregrado	Álgebra Tensorial
escalar	a, A		
vector	$\mathbf{a}$	$\{\mathbf{a}\}$, $\overrightarrow{a}$	$\underset{\sim}{a}$
matriz	$\mathbf{A}$	$[\mathbf{A}]$	$\underset{\approx}{A}$

Debido a que es difícil hacer letras "en negrita" en la pizarra, se suele usar la convención de *textos de pregrado* o bien la de *álgebra tensorial*[1].

Existe un tipo de vector especial llamado *vector director*, cuya notación es: $\hat{a}$ o $\hat{\mathbf{a}}$.

1.1.2. Definiciones

Escalar
Es una cuantificación física que sólo requiere una magnitud para quedar definida, e.g.: tiempo, volumen, densidad, rapidez...

Vector
Es una cuantificación física que requiere magnitud y dirección para quedar definida, e.g.: posición, fuerza, momento (también llamado torque)...

Vector Director
Es en vector cuya magnitud es igual a 1. Especifica una dirección, pero no una magnitud.

Vectores Base (cartesianos)
Fijando un sistema de referencia (sistema de ejes), los vectores unitarios en la dirección positiva de los ejes "x", "y", y "z" llamados $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$, respectivamente. No es inusual llamar a los mismos $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, y $\hat{\mathbf{e}}_3$; notación que es más frecuente a la hora de trabajar con tensores. Estos vectores base son también vectores directores debido a que son unitarios.

[1] En la pizarra yo, Tomás Zegard, suelo usar: a, A para escalares; $\underset{\sim}{a}$ para vectores; y $\underset{\approx}{A}$ para matrices.

En el caso de un sistema cilíndrico, los vectores base suelen llamarse: $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, y $\hat{\mathbf{k}}$. Finalmente, en el caso de un sistema esférico se tiene: $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, y $\hat{\mathbf{e}}_\phi$.

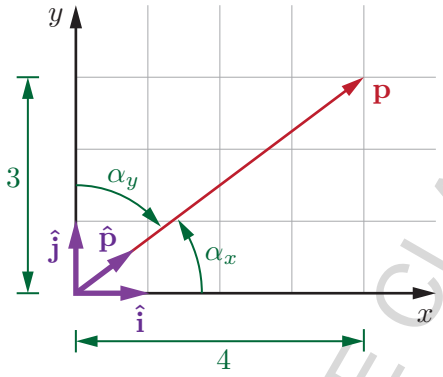


Figura 1.1: Ejemplo de un vector $\mathbf{p}$ en un sistema de ejes definido por $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

1.2. Vectores

1.2.1. Definiciones de un vector

Representación vectorial: suma de magnitudes por vectores base

Un vector $\mathbf{p}$ se puede representar como magnitudes (escalares) asociadas a cada vector base:

$$\mathbf{p} = p_x\,\hat{\mathbf{i}} + p_y\,\hat{\mathbf{j}} + p_z\,\hat{\mathbf{k}} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} \tag{1.1}$$

, que para el ejemplo bidimensional de la Figura 1.1, resulta:

$$\mathbf{p} = (4)\,\hat{\mathbf{i}} + (3)\,\hat{\mathbf{j}} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Magnitud de un vector

La magnitud (o longitud) del vector se escribe $|\mathbf{p}|$ o bien $\|\mathbf{p}\|$:

$$|\mathbf{p}| = \|\mathbf{p}\|_2 = \sqrt{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}} = \sqrt{|p_x|^2 + |p_y|^2 + |p_z|^2} \tag{1.2}$$

La magnitud de un vector es también llamada la *norma de un vector*, y corresponde a la norma–2 o *norma euclidiana*. En el caso del ejemplo bidimensional de la Figura 1.1, resulta:

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{|4|^2 + |3|^2} = \sqrt{25} = 5$$

Normalización de un vector

El proceso de normalizar un vector consiste en escalarlo proporcionalmente para que su longitud sea igual a 1; obteniendo así su vector director (que indicia la dirección del mismo). Es decir, el vector director $\hat{\mathbf{p}}$ asociado al vector $\mathbf{p}$ es igual a:

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \left(\frac{p_x}{\sqrt{|p_x|^2 + |p_y|^2 + |p_z|^2}}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{p_y}{\sqrt{|p_x|^2 + |p_y|^2 + |p_z|^2}}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{p_z}{\sqrt{|p_x|^2 + |p_y|^2 + |p_z|^2}}\right)\hat{\mathbf{k}} \tag{1.3}$$

En el ejemplo bidimensional de la Figura 1.1, resulta:

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{\{4\,,\,3\}^T}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{3}{5}\right)\hat{\mathbf{j}} = \begin{Bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{Bmatrix}$$

Es sencillo probar que $\hat{\mathbf{p}}$ es, en efecto, un *vector unitario*:

$$|\hat{\mathbf{p}}| = \sqrt{\left|\frac{4}{5}\right|^2 + \left|\frac{3}{5}\right|^2} = \sqrt{\frac{16+9}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

Representación vectorial: magnitud y dirección

Todo vector puede (convenientemente) representarse como su magnitud (escalar) y una dirección (definida por su director):

$$\mathbf{p} = |\mathbf{p}|\ \hat{\mathbf{p}} \tag{1.4}$$

Esta representación es de gran utilidad cuando se conoce la magnitud de un vector y se quiere determinar su dirección, o viceversa.

1.2.2. Normas vectoriales

Una representación bastante generalizada de una norma vectorial es la llamada "norma–p", donde para un entero $p > 0$ y un vector $\mathbf{v}$ está definida como:

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p} \tag{1.5}$$

Ciertos valores de p son de uso frecuente:

- $p = 1$: norma–1, también conocida como *manhattan* o *taxicab*

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

- $p = 2$: norma–2, o norma Euclidiana

$$|\mathbf{v}| = \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2} = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$$

- $p = \infty$: norma infinito, norma de Chebyshev, o norma suprema

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_i |v_i|$$

La magnitud o longitud de un vector $\mathbf{v}$ corresponde a la norma Euclidiana[2] o norma–2.

> El tipo de norma se suele indicar por un número en la esquina inferior derecha.
>
> En el caso de la norma–2, el subíndice 2 en $\|\cdot\|_2$ es a veces obviado y visto como opcional ya que corresponde al caso más común. Esto es análogo a la *raíz cuadrada*, donde el 2 está implícito y no es necesario indicarlo. Cuando la raíz es cúbica, cuártica, u otra, entonces sí se debe indicar en el símbolo de la raíz.

[2] También se le conoce como *norma Euclídea*.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Existen definiciones adicionales de normas, y es posible crear nuevas siempre y cuando se cumplan las siguientes tres reglas básicas:

- Debe ser siempre no negativa

$$\|\mathbf{v}\| \geq 0 \qquad \text{con} \qquad \|\mathbf{v}\| = 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

- Desigualdad triangular

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

- Multiplicación por escalar

$$\|\alpha\,\mathbf{v}\| = |\alpha|\ \|\mathbf{v}\| \qquad \forall\ \alpha \in (-\infty\,,\,+\infty)$$

1.3. Operaciones sobre escalares y vectores

1.3.1. Producto escalar

El producto escalar (como su nombre indica) sirve para modificar la escala de un vector, i.e. aumentar o disminuir su magnitud pero no cambia su sentido[3]:

$$\lambda\,\mathbf{p} = (\lambda\,p_x)\ \hat{\mathbf{i}} + (\lambda\,p_y)\ \hat{\mathbf{j}} + (\lambda\,p_z)\ \hat{\mathbf{k}} = \begin{Bmatrix} \lambda\,p_x \\ \lambda\,p_y \\ \lambda\,p_z \end{Bmatrix} \tag{1.6}$$

Se cumple también que $|\lambda\mathbf{p}| = |\lambda\,p|\ \hat{\mathbf{p}}$ para un escalar $\lambda \geq 0$ (un escalar negativo cambiará el sentido de $\hat{\mathbf{p}}$).

Vector opuesto

Dado un vector $\mathbf{p}$, su opuesto es:

$$-\,\mathbf{p} = (-1)\,\mathbf{p} = (-p_x)\ \hat{\mathbf{i}} + (-p_y)\ \hat{\mathbf{j}} + (-p_z)\ \hat{\mathbf{k}} = \begin{Bmatrix} -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{Bmatrix} \tag{1.7}$$

El vector conserva su magnitud y dirección; pero cambia su sentido.

1.3.2. Suma

La suma de vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\ \hat{\mathbf{i}} + (a_y + b_y)\ \hat{\mathbf{j}} + (a_z + b_z)\ \hat{\mathbf{k}} = \begin{Bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{Bmatrix} \tag{1.8}$$

1.3.3. Resta

La resta de vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = (a_x - b_x)\ \hat{\mathbf{i}} + (a_y - b_y)\ \hat{\mathbf{j}} + (a_z - b_z)\ \hat{\mathbf{k}} = \begin{Bmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

[3]Escalar un vector por un valor negativo sí cambiará su sentido.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

1.3.4. Producto punto

El *producto punto* es una operación entre vectores cuyo resultado es un escalar:

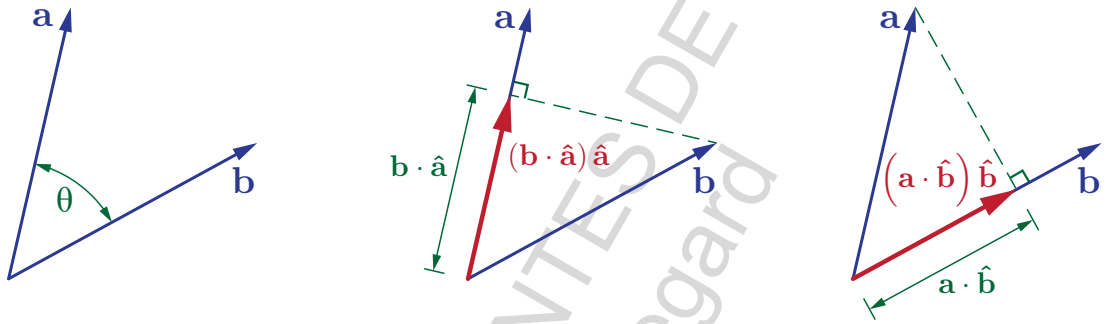
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z \tag{1.10}$$

Además, se cumple que:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \cos(\theta) \tag{1.11}$$

, donde θ es el ángulo que forman los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, como muestra la Figura 1.2(a).

El producto punto de un vector $\mathbf{b}$ por el director $\hat{\mathbf{a}}$ retorna la magnitud (escalar) de la proyección de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$, como muestra la Figura 1.2(b). Análogamente, el producto punto entre $\mathbf{a}$ y el director $\hat{\mathbf{b}}$ retorna la magnitud de la proyección de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$, como muestra la Figura 1.2(c). En caso de querer el vector proyectado, es necesario multiplicar estas magnitudes por los directores correspondientes.



(a) (b) (c)

Figura 1.2: Producto punto entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$: **(a)** ángulo θ entre los vectores; **(b)** proyección de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$; y **(c)** proyección de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$.

Vectores ortogonales

Si los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales (forman un ángulo recto), entonces:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{si } \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \tag{1.12}$$

Una propiedad relevante de los vectores base cartesianos es: $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$; mientras que $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$.

1.3.5. Producto cruz

El *producto cruz* es una operación entre vectores cuyo resultado es un vector:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

, donde $\mathbf{c}$ es un vector ortogonal a ambos, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, como muestra la Figura 1.3. Además, se cumple que:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \sin(\theta)\ \hat{\mathbf{n}} \tag{1.13}$$

, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector director normal al plano definido por los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Adicionalmente, se tiene tiene que $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \sin(\theta)$ es igual al área del paralelógramo definido por los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

El producto cruz es de gran utilidad para calcular el área o superficie de un objeto en tres dimensiones. El área de una superficie o polígono complejo se puede subdividir en triángulos, donde el área de cada triángulo se calcula según:

$$\triangle_{\mathbf{ab}} = \frac{1}{2}\,|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$$

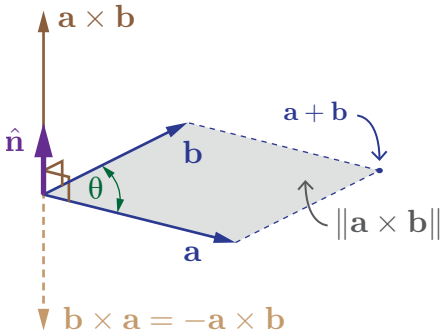


Figura 1.3: Producto cruz entre dos vectores **a** y **b**, donde también se indica el paralelógramo que ellos definen.

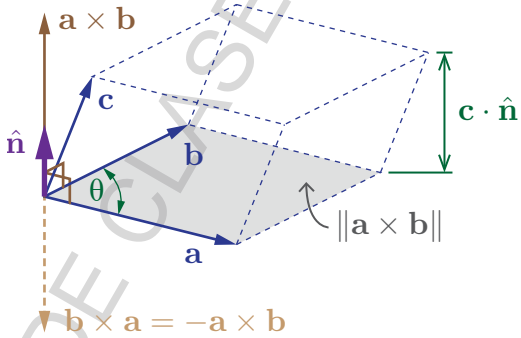


Figura 1.4: Producto triple de los vectores **a**, **b**, y **c**, los cuales forman un paralelepípedo cuyo volumen es $V = \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|\ (\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{n}})$.

El producto cruz de dos vectores **a** y **b** se calcula según:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \det\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{bmatrix} = (a_yb_z - a_zb_y)\,\hat{\mathbf{i}} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\hat{\mathbf{j}} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{Bmatrix}a_yb_z - a_zb_y\\ a_zb_x - a_xb_z\\ a_xb_y - a_yb_x\end{Bmatrix}$$

Notar que el producto cruz no es conmutativo y sigue la llamada *regla de la mano derecha*, i.e.:

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

, como muestra la Figura 1.3.

El producto cruz sólo está definido para vectores en $\mathbb{R}^3$. El caso de un producto cruz sobre vectores en $\mathbb{R}^2$ requiere considerar implícitamente que la tercera coordenada asociada al plano z es cero, i.e. $0\,\hat{\mathbf{k}}$. En este caso, el vector resultante se encuentra siempre fuera del plano y apunta según $\hat{\mathbf{n}} = \pm\hat{\mathbf{k}}$.

Un conjunto de vectores base cumple que:

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \qquad \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \qquad \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

, lo que explica por qué basta con conocer dos ejes coordenados cualquiera para deducir el tercero.

1.3.6. Producto triple

El *producto triple*, también llamado *producto caja* o *producto mixto*, es una operación sobre 3 vectores que resulta en un escalar y está definida como:

$$\left[\,\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c}\,\right] = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \tag{1.14}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

La interpretación geométrica del producto triple se muestra en la Figura 1.4: el volumen del paralelepípedo definido por los vectores es igual a:

$$V_{\mathbf{abc}} = h, A_{\mathbf{ab}} = (\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{n}})\ \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \left(\mathbf{c}\cdot\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|}\right)\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$$
$$V_{\mathbf{abc}} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$$

Notar que el orden de las operaciones es importante (en el producto cruz), ya que de lo contrario el vector $\hat{\mathbf{n}}$ apuntará en la dirección contraria y la proyección de $\mathbf{c}$ será negativa. Esto resultará en un volumen negativo pero cuya magnitud es correcta[4]. El producto triple puede ser también visto como el determinante de una matriz:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{bmatrix} \tag{1.15}$$

El signo del escalar resultante del producto triple no cambiará si se hace un movimiento circular de las variables; i.e.:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$$

Sumado a la conmutatividad del producto punto, se puede demostrar que las posiciones de los operadores (productos punto y cruz) se pueden cambiar sin alterar el resultado:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

La representación gráfica del producto triple (Figura 1.4) explica intuitivamente por qué si dos vectores son idénticos el volumen del paralelepípedo es cero.

> El producto triple es de gran utilidad para calcular el volumen de un objeto en tres dimensiones. Un volumen complejo se puede subdividir en tetrahedros, donde el volumen de cada tetrahedro corresponde a 1/6 del volumen del paralelepípedo:
>
> $$\triangle_{\mathbf{abc}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix} = \frac{1}{6}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$$
>
> , donde se debe tener cuidado del orden de los vectores en la operación para no obtener un volumen negativo. Se podría utilizar el valor absoluto de la expresión anterior, aunque un resultado negativo suele indicar un error en el cálculo del volumen.

1.4. Cosenos directores

Llamando α_x al ángulo que forma un vector $\mathbf{p}$ con el eje "x", entonces:

$$\cos(\alpha_x) = \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{i}}}{|\mathbf{p}|\left|\hat{\mathbf{i}}\right|} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{i}}$$
$$\cos(\alpha_x) = \begin{Bmatrix}\hat{p}_x\\ \hat{p}_y\\ \hat{p}_z\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} = \hat{p}_x$$

Es decir, la componente "x" de un vector director es igual al coseno que forma el vector con el eje "x". Se puede repetir el proceso para ver que el ángulo que forma el vector $\mathbf{p}$ con el eje "y" es igual

[4] Un volumen negativo no tiene sentido físico, pero será de utilidad para definir símbolos y operaciones sobre vectores y tensores.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

a $\cos(\alpha_y) = \hat{p}_y$. Lo mismo ocurre con el eje "z", i.e. $\cos(\alpha_z) = \hat{p}_z$. Es decir, las componentes de un vector director son sus respectivos *cosenos directores*:

$$\hat{\mathbf{p}} = \left(\frac{p_x}{\sqrt{|p_x|^2 + |p_y|^2 + |p_z|^2}}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{p_y}{\sqrt{|p_x|^2 + |p_y|^2 + |p_z|^2}}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{p_z}{\sqrt{|p_x|^2 + |p_y|^2 + |p_z|^2}}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{p}} = \cos(\alpha_x)\,\hat{\mathbf{i}} + \cos(\alpha_y)\,\hat{\mathbf{j}} + \cos(\alpha_z)\,\hat{\mathbf{k}} \tag{1.16}$$

La utilidad radica en que si conocemos los ángulos que forma un vector tridimensional con los ejes "x", "y", y "z", podemos entonces conocer su director, o viceversa. El caso bidimensional es un caso simplificado de lo anterior, donde conocido el ángulo que un vector $\mathbf{p}$ forma con los ejes "x" e "y"; podemos conocer su director. Este ocurre cuando $\alpha_z = \pi/2$, y con $\alpha_x + \alpha_y = \pi/2$ se tiene:

$$\hat{\mathbf{p}}_{2D} = \cos(\alpha_x)\,\hat{\mathbf{i}} + \cos(\alpha_y)\,\hat{\mathbf{j}} + \cos(\pi/2)\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\mathbf{p}}_{2D} = \cos(\alpha_x)\,\hat{\mathbf{i}} + \sin(\alpha_x)\,\hat{\mathbf{j}}$$

En el ejemplo de la Figura 1.1:

$$\alpha_x = \operatorname{acos}(\hat{p}_x) = \operatorname{acos}\left(\frac{4}{5}\right) = 36{,}87° \qquad \alpha_y = \operatorname{acos}(\hat{p}_y) = \operatorname{acos}\left(\frac{3}{5}\right) = 53{,}13°$$

En el caso tridimensional, los ángulos son como muestra la Figura 1.5. Es un error común pensar que existe una relación con la suma de dichos ángulos (i.e. $\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z \neq \pi$ u otro valor): la relación que sí es cierta es que $\cos^2(\alpha_x) + \cos^2(\alpha_y) + \cos^2(\alpha_z) = 1$, cuya demostración es sencilla ya que $\hat{\mathbf{p}} = 1$.

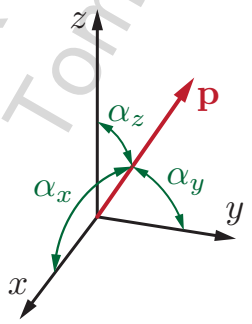
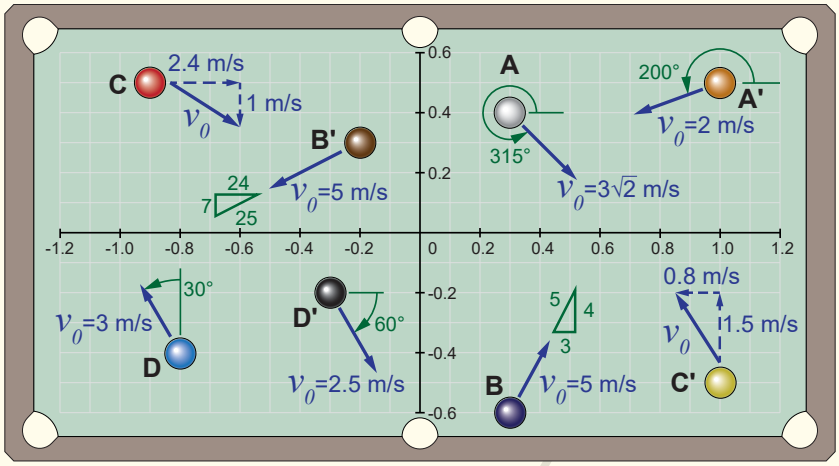


Figura 1.5: Ejemplo de un vector tridimensional $\mathbf{p}$, y sus respectivos ángulos asociados a los cosenos directores.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

La Figura a continuación muestra una mesa de billar con bolas en posiciones iniciales $\mathbf{u}_0$, las que son impulsadas con velocidades iniciales $\mathbf{v}_0$.



Para las bolas A, B, C, y D, se pide determinar:

a) La posición inicial $\mathbf{u}_0$.

b) El vector de velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ descompuesto en rapidez v_0 y dirección $\hat{\mathbf{v}}_0$.

BORRADOR APUNTES DE Tomás Zegard

Bola A
La posición inicial es: $\mathbf{u}_0 = 0{,}3\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}4\,\hat{\mathbf{j}}$
La dirección de $\mathbf{v}_0$ se indica con un ángulo medido desde el eje x en contra de las manecillas del reloj (coordenada polar). La rapidez inicial es un dato $v_0 = 3\sqrt{2}\,\text{m/s}$, y con ello:

$$\mathbf{v}_0 = v_0\,\hat{\mathbf{v}}_0 = 3\sqrt{2}\begin{Bmatrix}\cos 315^\circ \\ \sin 315^\circ\end{Bmatrix} = 3\sqrt{2}\begin{Bmatrix}+1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2}\end{Bmatrix}\ \text{m/s}$$

, donde la dirección es $\hat{\mathbf{v}}_0 = 1/\sqrt{2}\,\hat{\mathbf{i}} - 1/\sqrt{2}\,\hat{\mathbf{j}}$.

Bola B
La posición inicial es: $\mathbf{u}_0 = 0{,}3\,\hat{\mathbf{i}} - 0{,}6\,\hat{\mathbf{j}}$
La dirección de $\mathbf{v}_0$ se indica con un triángulo $3\colon 4\colon 5$, la rapidez inicial es $v_0 = 5\,\text{m/s}$, y con ello:

$$\mathbf{v}_0 = v_0\,\hat{\mathbf{v}}_0 = 5\begin{Bmatrix}3/5 \\ 4/5\end{Bmatrix}\ \text{m/s}$$

, donde la dirección es $\hat{\mathbf{v}}_0 = 3/5\,\hat{\mathbf{i}} + 4/5\,\hat{\mathbf{j}}$.

Bola C
La posición inicial es: $\mathbf{u}_0 = -0{,}9\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}5\,\hat{\mathbf{j}}$
La velocidad inicial es: $\mathbf{v}_0 = 2{,}4\,\hat{\mathbf{i}} - 1{,}0\,\hat{\mathbf{j}}$
La dirección $\hat{\mathbf{v}}_0$ se obtiene al normalizar el vector $\mathbf{v}_0$ (dividir por su magnitud, i.e., su rapidez):

$$v_0 = \sqrt{(2{,}4)^2 + (1{,}0)^2} = 2{,}6\,\text{m/s}$$

$$\hat{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{v}_0}{v_0} = \frac{2{,}4\,\hat{\mathbf{i}} - 1{,}0\,\hat{\mathbf{j}}}{2{,}6} = \frac{12}{13}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{5}{13}\,\hat{\mathbf{j}}$$

Bola D
La posición inicial es: $\mathbf{u}_0 = -0{,}8\,\hat{\mathbf{i}} - 0{,}4\,\hat{\mathbf{j}}$
La dirección de $\mathbf{v}_0$ se indica con un ángulo medido desde el eje y positivo. Se pueden tomar dos caminos equivalentes: **(a)** calcular el ángulo medido desde el eje x positivo^a y repetir el proceso

hecho con la bola A; o **(b)** determinar directamente el vector director sabiendo que el coseno y seno corresponden al cateto adyacente y opuesto respectivamente, a lo que sólo restaría incluir el signo correcto según la dirección de los mismos. En este caso se optará por el segundo método: la dirección x del vector director corresponde al seno con signo negativo, mientras que la dirección y es el coseno con signo positivo. La rapidez inicial es $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$, y con ello:

$$\mathbf{v}_0 = v_0\,\hat{\mathbf{v}}_0 = 3\begin{Bmatrix} -\sin 30° \\ +\cos 30° \end{Bmatrix} = 3\begin{Bmatrix} -1/2 \\ +\sqrt{3}/2 \end{Bmatrix}\ \mathrm{m/s}$$

, donde la dirección es $\hat{\mathbf{v}}_0 = -1/2\,\hat{\mathbf{i}} + \sqrt{3}/2\,\hat{\mathbf{j}}$.

[a] En este caso ese ángulo es $90° + 30° = 120°$.

Sugerido

Repita los cálculos del problema anterior para las bolas A', B', C', y D'.

Bola A': $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$ $\quad \hat{\mathbf{v}}_0 = -0{,}9397\,\hat{\mathbf{i}} - 0{,}3420\,\hat{\mathbf{j}}$ $\quad \mathbf{v}_0 = -1{,}879\,\hat{\mathbf{i}} - 0{,}684\,\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s}$

Bola B': $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$ $\quad \hat{\mathbf{v}}_0 = -2\sqrt{2}/2\,\hat{\mathbf{i}} - 1/2\sqrt{2}\,\hat{\mathbf{j}}$ $\quad \mathbf{v}_0 = -2\sqrt{2}/2\,\hat{\mathbf{i}} - 1/2\sqrt{2}\,\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s}$

Bola C': $v_0 = 13\,10\,\mathrm{m/s}$ $\quad \hat{\mathbf{v}}_0 = -8/13\,\hat{\mathbf{i}} + 12/13\,\hat{\mathbf{j}}$ $\quad \mathbf{v}_0 = -4/5\,\hat{\mathbf{i}} + 3/5\,\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s}$

Bola D': $v_0 = 2/5\,\mathrm{m/s}$ $\quad \hat{\mathbf{v}}_0 = 1/2\,\hat{\mathbf{i}} - \sqrt{3}/2\,\hat{\mathbf{j}}$ $\quad \mathbf{v}_0 = 2/4\,\hat{\mathbf{i}} + 2\sqrt{3}/4\,\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{m/s}$

1.5. Derivadas e integrales temporales

1.5.1. Derivada temporal

La dinámica trata el movimiento de partículas y cuerpos. El movimiento es un cambio de posición (o giro) en el tiempo. Es decir, la dinámica estudia cómo ciertas magnitudes varían en el tiempo.

En las secciones siguientes se demostrará que si la posición de una partícula está definida por el vector $\mathbf{u}$ que varía en el tiempo (porque hay movimiento), entonces:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}}$$

, donde $\mathbf{v}$ es la *velocidad instantánea*, y $\mathbf{a}$ es la *aceleración instantánea*.

La atención en este momento debe fijarse en la forma en que se escribieron las derivadas temporales: $\dot{\mathbf{u}}$ y $\ddot{\mathbf{u}}$. Es decir, uno y dos puntos sobre una variable indican la primera y segunda derivada temporal, respectivamente.

1.5.2. Integrales y la variable muda

Frecuentemente se integrará una expresión en el tiempo entre 0 y un límite superior de tiempo t variable. Por ejemplo, supongamos que queremos integrar la siguiente expresión entre 0 y t:

$$v\,(t) = 3t^2 - t$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

La integral sería entonces:

$$\int_0^t v\,(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^t 3t^2 - t\ \mathrm{d}t = t^3 - \frac{1}{2}t^2\Big|_{t=0}^{t=t} = t^3 - \frac{1}{2}t^2$$

Si bien este desarrollo no tiene error alguno, el hecho de *integrar sobre t para luego evaluar hasta t* produce un "choque de letras" que podría incomodar a más de alguno. En estos casos se recomienda usar una *variable muda*: variable auxiliar para efectos de hacer la integral solamente. Utilizando una variable muda τ, el mismo desarrollo anterior es:

$$\int_0^t v\,(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t 3\tau^2 - \tau\ \mathrm{d}\tau = \tau^3 - \frac{1}{2}\tau^2\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = t^3 - \frac{1}{2}t^2$$

En este caso hemos *integrado sobre la variable muda τ para luego evaluar hasta t*. Esto se extiende a integrales sobre otras variables; por ejemplo integrar sobre el desplazamiento u con un límite u variable. En todos estos casos es recomendable usar una variable muda.

1.6. EDO: separación de variables

Las *ecuaciones diferenciales* se distinguen porque la solución no es un número sino una ecuación. Por ejemplo, buscamos una ecuación $u\,(t)$ que satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}u\,(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2\,t+1}{u}$$

Esta ecuación diferencial puede ser resuelta por variados métodos. La clasificación más sencilla de ecuaciones diferenciales se denomina *ecuación diferencial ordinaria* (EDO[5]) Nuestro estudio de la dinámica requiere resolver EDOs y lo haremos con el método de *separación de variables*. Para usar *separación de variables* es necesario que las variables de la EDO (y sus diferenciales) puedan separarse a cada lado de la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}u\,(t)}{\mathrm{d}t} = f\,(u,t) = \frac{g\,(t)}{h\,(u)} \quad\longrightarrow\quad h\,(u)\ \mathrm{d}u = g\,(t)\ \mathrm{d}t$$

1.6.1. Solución de EDOs: integrales indefinidas

Una vez separadas las variables (con sus diferenciales $\mathrm{d}u$ y $\mathrm{d}t$) a cada lado de la ecuación, podemos integrar para obtener la *antiderivada* a cada lado de la ecuación. Utilizando la expresión del ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u\,(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2\,t+1}{u} \quad\longrightarrow\quad & (u)\ \mathrm{d}u = (2\,t+1)\ \mathrm{d}t \\
& \int (u)\ \mathrm{d}u = \int (2\,t+1)\ \mathrm{d}t \\
& \frac{1}{2}u^2 + C_u = t^2 + t + C_t \\
& u = \sqrt{2}\,\sqrt{t^2 + t + (C_t - C_u)} = \sqrt{2\,t^2 + 2\,t + C}
\end{aligned}$$

Esta corresponde a la solución de la ecuación diferencial, donde $C = 2\,C_t - 2\,C_u$ es una *constante de integración*. La necesidad de la constante de integración C es evidente cuando se verifica si la solución obtenida efectivamente satisface la ecuación (diferencial) original:

$$\frac{\mathrm{d}u\,(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{2\,t^2 + 2\,t + C}\right) = \left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2\,t^2 + 2\,t + C}}\right][4\,t+2] = \frac{2\,t+1}{u}$$

[5] En inglés ODE, por *Ordinary Differential Equation*.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Es decir, la ecuación diferencial se satisface para cualquier valor de C. En otras palabras, existe una familia (infinita) de ecuaciones que resuelven la ecuación diferencial. Todas las siguientes ecuaciones son soluciones válidas:

$$u_1(t) = \sqrt{2\,t^2 + 2\,t + 3}$$
$$u_2(t) = \sqrt{2\,t^2 + 2\,t - 5}$$
$$u_3(t) = \sqrt{2\,t^2 + 2\,t}$$

La solución es única si se entrega información adicional. Necesitamos un único punto $u(a) = b$ para seleccionar una de las infinitas soluciones posibles. Se podría decir entonces que la ecuación diferencial anterior estaba "incompleta", y debió haber sido:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2\,t+1}{u(t)} \qquad \text{con} \qquad u(1) = 3$$

, cuya solución sigue siendo:

$$u(t) = \sqrt{2\,t^2 + 2\,t + C}$$

, donde ahora es posible determinar un único valor para C ya que:

$$u(1) = 3 \qquad \longrightarrow \qquad \sqrt{2\cdot 1^2 + 2 + C} = 3$$
$$C = 5$$

Finalmente, la solución del problema es:

$$u(t) = \sqrt{2\,t^2 + 2\,t + 5}$$

Ejemplo

Determine $u(t)$ si se sabe que:

$$\dot{u} = \cos t + 3\,t^2 \qquad \text{con} \qquad u(0) = u_0 = -5$$

Separando las variables y sus diferenciales:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \cos t + 3\,t^2 \qquad \longrightarrow \qquad (1)\ \mathrm{d}u = \left(\cos t + 3\,t^2\right)\ \mathrm{d}t$$
$$\int (1)\ \mathrm{d}u = \int \left(\cos t + 3\,t^2\right)\ \mathrm{d}t$$
$$u = \sin t + t^3 + C$$

Utilizando la condición inicial $u(0) = -5$, se puede determinar el valor de C:

$$\sin 0 + 0^3 + C = -5 \qquad \longrightarrow \qquad C = -5$$

Finalmente, la ecuación buscada es:

$$u(t) = \sin t + t^3 - 5$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

Determine $u\,(t)$ si se sabe que:

$$\dot{u} = 2\,u\,t \qquad \text{con} \qquad u\,(0) = u_0 = 7$$

Separando las variables de la EDO y sus diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u\,(t)}{\mathrm{d}t} = 2\,u\,t \qquad \longrightarrow \qquad \left(\frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u &= (2\,t)\;\mathrm{d}t \\ \int \left(\frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u &= \int (2\,t)\;\mathrm{d}t \\ \log u &= t^2 + C \\ u &= e^C \cdot e^{t^2} = A\,e^{t^2} \end{aligned}$$

Es común redefinir el exponencial de la constante de integración e^C como A. La nomenclatura $A = e^C$ es usada por un número importante de textos asociados al tema. Utilizando la condición inicial $u\,(0) = 7$, se puede determinar el valor de A:

$$A\,e^0 = 7 \qquad \longrightarrow \qquad A = 7$$

Finalmente, la ecuación buscada es:

$$u\,(t) = 7\,e^{t^2}$$

En el ejemplo anterior, la integral (o antiderivada) de $\frac{1}{u}$ se determinó como $\log u$. Esto podría ser visto como un error ya que en realidad:

$$\int \left(\frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u = \ln u$$

, donde $\ln u = \log_e u$.

La verdad es que en ingeniería el logaritmo en base 10 es rara vez utilizado (algunas excepciones son: pH en química, decibeles en acústica, energía liberada en un sismo). Debido a ello, una práctica poco común pero no inusual, es llamar $\log u$ al logaritmo natural; mientras que cuando se quiera especificar el logaritmo en base 10 se puede usar $\log_{10} u$.

Es decir, en el presente texto $\log u$ se refiere al *logaritmo natural* (base e).

1.6.2. Solución de EDOs: integrales definidas

El procedimiento para resolver EDOs de la sección previa hace uso de *integrales indefinidas*: integrales sin límites de integración. Alternativamente, usando *integrales definidas* se evita la constante de integración. El ejemplo a continuación explica el procedimiento en detalle.

Ejemplo

Repita el ejemplo anterior usando integrales definidas Se sabe que:

$$\dot{u} = 2\,u\,t \qquad \text{con} \qquad u\,(0) = u_0 = 7$$

Se sabe que el punto $(t_0, u_0) = (0, 7)$ pertenece a la ecuación buscada. Por otro lado, queremos determinar u para cualquier instante t, con lo que otro punto de la ecuación es (t, u) variable.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Separando las variables de la EDO:

$$\left(\frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u = (2\,t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{u_1}^{u_2}\left(\frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u = \int_{t_1}^{t_2}(2\,t)\,\mathrm{d}t \qquad \longrightarrow \qquad \int_{7}^{u}\left(\frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{t}(2\,t)\,\mathrm{d}t$$

En este caso sería conveniente (aunque no obligatorio) usar una variable muda en las integrales para evitar confusiones:

$$\int_{7}^{u}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\,\mathrm{d}\alpha = \int_{0}^{t}(2\,\beta)\,\mathrm{d}\beta$$

$$\log\alpha\,\Big|_{\alpha=7}^{\alpha=u} = \beta^2\,\Big|_{\beta=0}^{\beta=t}$$

$$\log u - \log 7 = t^2 - 0^2$$

$$u = 7\,e^{t^2}$$

Resultado que coincide con el obtenido usando integrales indefinidas y constante de integración.

1.7. Leyes de Newton

El estudio de la dinámica (cinemática, cinética, trabajo–energía, e impulso–momentum) se basa fuertemente en las leyes de Newton. Inicialmente estas se aplicarán a partículas, pero las leyes se aplican también a *cuerpos* (objetos de dimensiones no-despreciables); rígidos y deformables. El estudio de los cuerpos deformables requiere conocimientos de *elasticidad*, lo que se encuentra fuera del alcance de este curso.

Ley I Una partícula está en reposo o se mueve con velocidad constante si las fuerzas que actúan sobre ella están en *equilibrio* (o balanceadas).



Ley II La aceleración de una partícula es proporcional a la resultante de fuerzas[6] que actúan sobre ella y tienen la misma dirección:

$$\mathbf{f} = m\,\mathbf{a}$$

Ley III Las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos que interactúan son iguales en magnitud, de igual dirección, pero sentido opuesto.



[6]La resultante de fuerzas $\mathbf{f}$ es la suma de todas las fuerzas actuando sobre la partícula: $\mathbf{f} = \sum \mathbf{f}_i$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Capítulo 2

Cinemática

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

2.1. Cinemática de una partícula

La cinemática es una rama de la dinámica que describe el movimiento de cuerpos sin considerar las fuerzas involucradas. En esta sección estudiaremos la cinemática para *partículas*; en capítulos futuros esto se extenderá a *cuerpos rígidos*[1].

Partícula Un cuerpo cuyas dimensiones son despreciables comparadas a la curvatura de su trayectoria. El movimiento de dicho cuerpo puede ser estudiado como el de un punto.

Coordenadas La posición de una partícula en función del tiempo $\mathbf{x}(t)$ puede ser descrita usando distintos sistemas coordenados. Los más comunes son:

a) Coordenadas rectangulares: x, y, z

b) Coordenadas cilíndricas‡: r, θ, z

c) Coordenadas esféricas: r, θ, ϕ

‡ Las coordenadas polares son el caso especial que ocurre cuando $z = \text{constante}$.

Posición La ubicación de una partícula P en el tiempo queda completamente definida por su distancia $\mathbf{u}(t)$ a un punto de referencia fijo O (el origen del sistema coordenado).

Desplazamiento Cambio en la posición de la partícula. Transcurrido un tiempo Δt, la partícula se encuentra en la posición $\mathbf{u}(t + \Delta t)$. Es decir, el desplazamiento $\Delta\mathbf{u}$ es:

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t) \tag{2.1}$$

Tanto la posición $\mathbf{u}$ como el desplazamiento $\Delta\mathbf{u}$ son vectores. Un error común es confundir el desplazamiento con la distancia recorrida s (escalar positivo).

$$\text{posición}\mathbf{u} \neq \text{desplazamiento}\Delta\mathbf{u} \neq \text{distancia recorrida}s$$

[1] Los cuerpos deformables están fuera del alcance de este curso.

Velocidad La **velocidad promedio** en el intervalo Δt es:

$$\mathbf{v}_{\text{promedio}} = \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} \tag{2.2}$$

La **velocidad instantánea**, o velocidad en el instante t, se obtiene tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{u}} \tag{2.3}$$

Aceleración Es la variación de la velocidad en el tiempo:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\mathbf{u}} \tag{2.4}$$

La aceleración promedio no suele ser de utilidad en la solución de problemas, pero se puede calcular en caso de ser necesaria.

Rapidez Es la magnitud (o módulo) del vector de velocidad. Es decir, la rapidez es $v = |\mathbf{v}|$.

> Rapidez es el término más apropiado para llamar a la magnitud de la velocidad. No obstante, no es inusual que se use el término *magnitud de la velocidad*, o simplemente *velocidad*. En este último caso, el contexto debería ser lo suficientemente claro para distinguir entre velocidad (vector) o la magnitud de esta (escalar).
>
> Algo similar ocurre con la aceleración, excepto que no hay un término equivalente a *rapidez*. Lo más usual es *magnitud de la aceleración*, o *módulo* de la misma.

Además de los diferentes sistemas coordenados, el movimiento puede ser descrito de dos maneras:

a) Absoluto: sistema de referencia fijo

b) Relativo: con un sistema de referencia móvil

Inicialmente todo se hará desde el punto de vista de un sistema absoluto, lo que luego será extendido para el caso de *movimiento relativo*.

2.2. Movimiento rectilíneo (movimiento 1D)

El movimiento rectilíneo es aquel en que la posición de la partícula se puede expresar utilizando sólo 1 vector base. Es decir, en un movimiento rectilíneo la posición es:

$$\mathbf{u} = u_x \hat{\mathbf{i}}$$

El análisis de un movimiento rectilíneo se puede analizar operando únicamente sobre el escalar u_x. Esta conveniencia suele dar origen a confusiones: la posición es un vector y no un escalar, aunque en este caso tiene dimensión 1. Lo mismo ocurre con la velocidad $\dot{\mathbf{u}}$ y la aceleración $\ddot{\mathbf{u}}$; se pueden trabajar como escalares, pero sin olvidar que realmente son vectores.

La Figura 2.1(a) muestra una partícula en movimiento rectilíneo: inicialmente se encuentra en la posición P, pero transcurrido un intervalo de tiempo Δt la misma partícula se encuentra en la

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard



Figura 2.1: Movimiento rectilíneo de una partícula: **(a)** desplazamiento desde P a P', con $\Delta u = b$; y **(b)** desplazamiento de P a P', para luego regresar a P, con con $\Delta u = 0$.

posición P'. El desplazamiento $\Delta\mathbf{u} = b\,\hat{\mathbf{i}}$ es un vector, donde b podría haber sido negativo si P' se encuentra más cerca del origen que P. La distancia recorrida (o trayecto) es un escalar siempre positivo, que en este caso es $s = b$.

Consideremos ahora que la partícula regresa a su posición inicial. Es decir, transcurrido otro Δt la partícula se encuentra en $P'' = P$, como muestra la Figura 2.1(b). En este caso $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (notar que $\mathbf{0} \neq 0$); mientras que la distancia recorrida es $s = 2b$.

La ecuación que rige la cinemática de un movimiento rectilíneo se puede escribir de forma escalar (por el hecho de ser 1D), y es:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = v \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\ddot{u} = \dot{v} = a} \tag{2.5}$$

Utilizando la *regla de la cadena*, se puede escribir una expresión alternativa para la aceleración:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\,v$$

Es decir, cuando la aceleración o velocidad se entregan en función de la posición, i.e., $a\,(u)$ o $v\,(u)$, es conveniente usar:

$$\boxed{a\,\mathrm{d}u = v\,\mathrm{d}v} \tag{2.6}$$

2.2.1. Movimiento con aceleración constante

El movimiento con aceleración constante $\overline{\mathbf{a}}$ es un caso particular. Además de ser un caso frecuente, es de muy fácil análisis y solución.

El problema de aceleración constante (para un movimiento rectilíneo) es aquel de una partícula con aceleración $\overline{a}$, con velocidad y posición inicial v_0 y u_0, respectivamente. En el caso del movimiento rectilíneo podemos obviar que la posición, velocidad, y aceleración, están todas multiplicadas por $\hat{\mathbf{i}}$. Los datos del problema son:

$$\ddot{u}\,(t) = \overline{a} \qquad\qquad \text{con:} \quad \dot{u}\,(0) = v_0 \quad \text{y} \quad u\,(0) = u_0$$

Queremos obtener la posición de la partícula en todo instante t. Para ello, es necesario resolver la ecuación diferencial (de 2^{do} orden) y así obtener la posición $u\,(t)$:

$$\ddot{u} = \overline{a}$$
$$\text{usando separación de variables:} \quad \dot{u} = \int \ddot{u}\,\mathrm{d}t = \overline{a}\,t + C_1$$
$$\text{usando separación de variables:} \quad u = \int \dot{u}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\overline{a}\,t^2 + C_1\,t + C_2$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Utilizando las condiciones iniciales se puede determinar los valores de C_1 y C_2:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_0 &= (\overline{a})\,(0) + C_1 \\ u_0 &= \tfrac{1}{2}\,(\overline{a})\,(0)^2 + (C_1)\,(0) + C_2 \end{aligned}\right\} \quad \longrightarrow \quad C_1 = \dot{u}_0 \quad \text{y} \quad C_2 = u_0$$

Es decir, la posición de una partícula sometida a aceleración constante es:

$$\boxed{u\,(t) = \frac{1}{2}\,\overline{a}\,t^2 + v_0\,t + u_0} \tag{2.7}$$

, mientras que su velocidad es:

$$\boxed{v\,(t) = \overline{a}\,t + v_0} \tag{2.8}$$

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) bastan para resolver cualquier problema con aceleración constante. No obstante, se puede desarrollar una expresión adicional que facilita la solución de algunos problemas. Para ello, utilizaremos la EDO de la Ecuación (2.6) con aceleración constante $\overline{a}$:

$$a\,\mathrm{d}u = v\,\mathrm{d}v$$
$$\int_{u_0}^{u} \overline{a}\,\mathrm{d}u = \int_{v_0}^{v} v\,\mathrm{d}v$$

, con lo que se obtiene una expresión para la velocidad en función de la posición:

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2\,\overline{a}\,(u - u_0)} \tag{2.9}$$

Las expresiones de las Ecuaciones (2.7) y (2.8) son comúnmente estudiadas en educación media. La familiaridad y simpleza de estas suele dar confianza excesiva al usuario sin realmente comprender los límites de su aplicación: sólo se aplica al movimiento rectilíneo (1D) de una partícula con aceleración constante. No es inusual verla aplicada en situaciones en que la aceleración no es constante: grave error.

La solución obtenida en la Ecuación (2.7) sugiere que las constantes de integración C_1 y C_2 siempre corresponden a la velocidad y desplazamiento inicial, respectivamente. La verdad es que esto es cierto sólo para el caso en que $\ddot{u}$ es una expresión polinomial de t.

La misma explicación sirve para comprender el significado físico de esas constantes. En el caso particular en que $\ddot{u}$ es una expresión polinomial de t, las constantes C_1 y C_2 tendrán unidades de velocidad y desplazamiento, respectivamente,

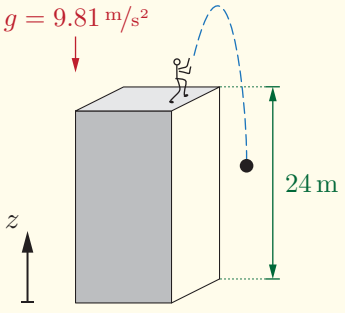
Ejemplo

Una persona lanza un objeto desde el techo de un edificio de 24 m inicialmente hacia arriba. Tomando como *datum* (origen del sistema coordenado) la base del edificio, y sabiendo que el objeto toca el suelo en $t = 3\,\mathrm{s}$, se pide:

a) Determinar la ecuación del movimiento $z\,(t)$ del objeto.

b) Indique la velocidad (rapidez) con que el objeto toca el suelo.

c) Determine la altura máxima $z_{\max}$ a la que llega el objeto.



BORRADOR ANTES DE CLASE
Tomás Zegard

El objeto se modela como una partícula sometida a una aceleración constante $\ddot{z} = -g$, donde $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ es la aceleración de la gravedad.

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= -g \\ \dot{z} &= \int_0^t \ddot{z}\,\mathrm{d}t = -g\,t + C_1 \\ z &= \int_0^t \dot{z}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,(-g)\,t^2 + C_1\,t + C_2\end{aligned}$$

Sabemos que la posición inicial del objeto es $z\,(0) = 24\,\mathrm{m}$, mientras que algunos segundos más tarde $z\,(t = 3) = 0$. Con ello se puede determinar las constantes de integración C_1 y C_2:

$$\left.\begin{aligned} z\,(0) &= \tfrac{1}{2}\,(-g)\,(0)^2 + (C_1)\,(0) + C_2 = 24 \\ z\,(3) &= \tfrac{1}{2}\,(-g)\,(3)^2 + (C_1)\,(3) + C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \longrightarrow \quad C_2 = 24\,\mathrm{m} \quad \text{y} \quad C_2 = 6{,}715\,\mathrm{m/s}$$

Finalmente, la ecuación del movimiento del objeto es:

$$z\,(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + 6{,}715\,t + 24$$

La velocidad del objeto es:

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -g\,t + C_1 = -g\,t + 6{,}715$$

El objeto toca el suelo en $t = 3\,\mathrm{m}$, por lo que su velocidad al hacer impacto con el mismo es:

$$\dot{z}\,(3) = (-g)\,(3) + 6{,}715 = -22{,}715\,\mathrm{m/s}$$

La velocidad en el punto más alto de la trayectoria del objeto es cero. Es decir, el punto de máxima altura se alcanza en un tiempo $t^\star$ tal que:

$$\dot{z}\,(t^\star) = 0 \quad \longrightarrow \quad t^\star = \frac{6{,}715}{g} = 0{,}6845\,\mathrm{s}$$

La altura máxima del objeto es:

$$\begin{aligned} z_{\max} &= z\,(t^\star) = -\frac{1}{2}\,g\,(0{,}6845)^2 + (6{,}715)\,(0{,}6845) + 24 \\ z_{\max} &= 26{,}3\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

Ejemplo

Un cohete de agua tiene una aceleración neta durante los dos primeros segundos que se asemeja a:

$$a\,(t) = \frac{120}{(t+1)^3} \quad [\mathrm{m/s^2}]$$

Asuma que el cohete comienza desde el reposo, i.e., $u_0 = 0$ y $\dot{u}_0 = 0$.
Se pide determinar:

a) La altura y velocidad del cohete en el instante $t = 1\,\mathrm{s}$.

b) El desplazamiento del cohete entre $t = 1\,\mathrm{s}$ y $t = 2\,\mathrm{s}$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

La aceleración no es constante y es función del tiempo. Debido a ello, para obtener la ecuación del movimiento del cohete se debe resolver la EDO de la Ecuación (2.5). Integrando una vez:

$$\begin{aligned} a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{120}{(t+1)^3} \\ \mathrm{d}v &= \left[\frac{120}{(t+1)^3}\right]\mathrm{d}t \\ v &= -\frac{60}{(t+1)^2} + C_1 \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso una vez más:

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= -\frac{60}{(t+1)^2} + C_1 \\ \mathrm{d}u &= \left[-\frac{60}{(t+1)^2} + C_1\right]\mathrm{d}t \\ u &= \frac{60}{(t+1)} + C_1\,t + C_2 \end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales se puede determinar los valores de C_1 y C_2;

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= \tfrac{60}{1} + 0 + C_2 = 0 \\ \dot{u}(0) &= \tfrac{-60}{1} + C_1 = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} C_2 &= -60 \\ C_1 &= 60 \end{aligned}$$

Es decir, la posición y velocidad del cohete en el tiempo son:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{60}{(t+1)} + 60\,t - 60 \\ \dot{u}(t) &= \frac{-60}{(t+1)^2} + 60 \end{aligned}$$

Finalmente, las posiciones y desplazamientos pedidos son:

$$\begin{aligned} u(1) &= \frac{60}{2} + 60 - 60 = 30\,\mathrm{m} \\ \dot{u}(1) &= \frac{-60}{4} + 60 = 45\,\mathrm{m/s} \\ \Delta u_{1\to 2} &= u(2) - u(1) = 80 - 30 = 50\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Nota: Las constantes de integración no coinciden con las condiciones iniciales u_0 y v_0 debido a que la aceleración no es un polinomio de t.

Sugerido

Resuelva nuevamente el problema anterior utilizando integrales definidas.

2.2.2. Movimiento con aceleración errática

En algunas situaciones la aceleración no puede ser descrita con una sola expresión para todo $t \geq 0$. En estos casos, es necesario describir el movimiento a tramos, y determinar las constantes de integración por compatibilidad de u y de $\dot{u}$ en los puntos de cambio. Exigir la compatibilidad de

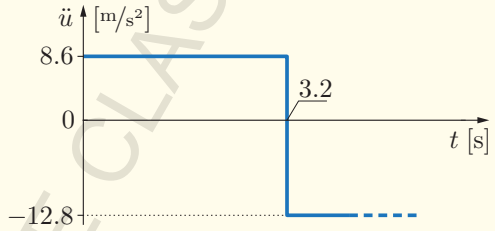
BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

posición y velocidad es razonable desde el punto de vista físico: el objeto no se puede teletransportar ni cambiar su velocidad instantáneamente[2].

Ejemplo

Una prueba de aceleración y frenado de un automóvil "Tesla Model S" consiste en: comenzando desde el reposo, i.e. $u_0 = 0$ y $v_0 = 0$; **(i)** acelerar al máximo por 3,2 s; para luego **(ii)** frenar al máximo hasta detener el vehículo.

Los motores eléctricos del automóvil producen torque constante y son capaces de acelerar a 8,6 $\mathrm{m/s^2}$. El sistema de freno (incluyendo los neumáticos y su adherencia) es capaz de desacelerar a 12,8 $\mathrm{m/s^2}$.



a) ¿Cuánto tarda el ensayo en su totalidad?

b) ¿Cuál es la posición final del automóvil?

c) Bosqueje gráficas $\dot{u}$–t y u–t.

El movimiento del automóvil se describe con 3 tramos.

Tramo I Caso para $0 \leq t \leq 3{,}2\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned} \ddot{u}^{\mathrm{I}} &= 8{,}6 \\ \dot{u}^{\mathrm{I}} &= 8{,}6\,t + C_1 \\ u^{\mathrm{I}} &= 4{,}3\,t^2 + C_1\,t + C_2 \end{aligned}$$

Sabemos que $u_0 = 0$ y $\dot{u}_0 = 0$, por lo que:

$$C_1 = 0 \qquad\qquad C_2 = 0$$

Es decir, las ecuaciones de posición y velocidad en el tramo I son:

$$\begin{aligned} \dot{u}^{\mathrm{I}}(t) &= 8{,}6\,t \\ u^{\mathrm{I}}(t) &= 4{,}3\,t^2 \end{aligned}$$

Al final del tramo I (periodo de aceleración) se tiene:

$$\dot{u}^{\mathrm{I}}(3{,}2) = 27{,}52\,\mathrm{m/s} \qquad\qquad u^{\mathrm{I}}(3{,}2) = 44{,}032\,\mathrm{m}$$

Tramo II Caso para $3{,}2 \leq t \leq t_{\mathrm{stop}}$

$$\begin{aligned} \ddot{u}^{\mathrm{II}} &= -12{,}8 \\ \dot{u}^{\mathrm{II}} &= -12{,}8\,t + C_1 \\ u^{\mathrm{II}} &= -6{,}4\,t^2 + C_1\,t + C_2 \end{aligned}$$

Sabemos que $u^{\mathrm{II}}(3{,}2) = u^{\mathrm{I}}(3{,}2) = 44{,}032\,\mathrm{m}$ y $\dot{u}^{\mathrm{II}}(3{,}2) = \dot{u}^{\mathrm{I}}(3{,}2) = 27{,}52\,\mathrm{m/s}$, por lo que:

$$C_1 = 68{,}48 \qquad\qquad C_2 = -109{,}568$$

Es decir, las ecuaciones de posición y velocidad en el tramo II son:

$$\begin{aligned} \dot{u}^{\mathrm{II}}(t) &= -12{,}8\,t + 68{,}48 \\ u^{\mathrm{II}}(t) &= -6{,}4\,t^2 + 68{,}48\,t - 109{,}568 \end{aligned}$$

[2] En realidad sí puede cambiar su velocidad (pseudo) instantáneamente con un *impulso*. Pero eso se estudiará en los capítulos siguientes.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

El automóvil se detiene en el instate t_{stop} tal que:

$$\dot{u}^{\text{II}}(t_{\text{stop}}) = -12{,}8\, t_{\text{stop}} + 68{,}48 = 0$$
$$\longrightarrow \quad t_{\text{stop}} = 5{,}35\,\text{s}$$

Al final del tramo II (periodo de desaceleración) se tiene:

$$\dot{u}^{\text{II}}(5{,}35) = 0\,\text{m/s} \qquad\qquad u^{\text{II}}(5{,}35) = 73{,}616\,\text{m}$$

Tramo III Caso para $5{,}35 \leq t$

$$\ddot{u}^{\text{III}} = 0$$
$$\dot{u}^{\text{III}} = C_1$$
$$u^{\text{III}} = C_1\, t + C_2$$

Sabemos del tramo anterior que $u^{\text{III}}(5{,}35) = u^{\text{II}}(5{,}35) = 73{,}616\,\text{m}$ y $\dot{u}^{\text{III}}(3{,}2) = \dot{u}^{\text{II}}(3{,}2) = 0$, por lo que:

$$C_1 = 0 \qquad\qquad C_2 = 73{,}616$$

Es decir, las ecuaciones de posición y velocidad en el tramo III son:

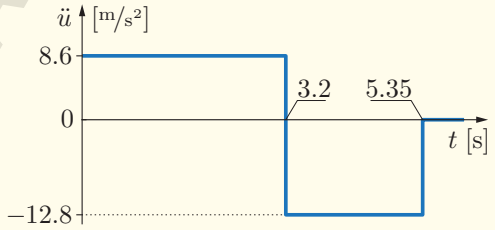
$$\dot{u}^{\text{III}}(t) = 0$$
$$u^{\text{III}}(t) = 73{,}616$$

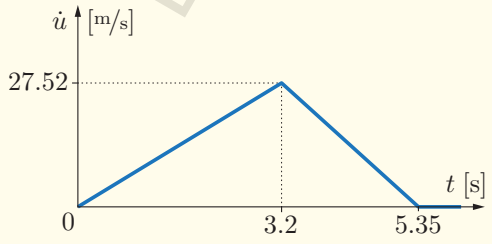
La posición final del automóvil es $u = 73{,}616\,\text{m}$.
El ensayo tiene una duración de $\Delta t = t_{\text{stop}} - t_0 = 5{,}35\,\text{s}$.
Las ecuaciones de posición y velocidad del automóvil son:

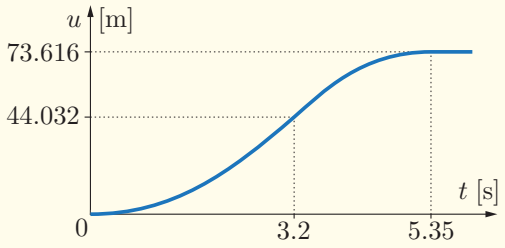
$$\dot{u}(t) = \begin{cases} 8{,}6\, t & 0 \leq t \leq 3{,}2\,\text{s} \\ -12{,}8\, t + 68{,}48 & 3{,}2\,\text{s} \leq t \leq 5{,}35\,\text{s} \\ 0 & 5{,}35\,\text{s} \leq t \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 4{,}3\, t^2 & 0 \leq t \leq 3{,}2\,\text{s} \\ -6{,}4\, t^2 + 68{,}48\, t - 109{,}568 & 3{,}2\,\text{s} \leq t \leq 5{,}35\,\text{s} \\ 73{,}616 & 5{,}35\,\text{s} \leq t \end{cases}$$

, cuyas gráficas incluyendo también la de $\ddot{u}$–t, son:







BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

El uso de un tiempo absoluto t para asegurar la compatibilidad de velocidad y posición entre intervalos puede resultar en cálculos algo tediosos. Un procedimiento alternativo (pero equivalente) consiste en utilizar una variable de tiempo local τ para cada tramo en un comportamiento con aceleración errática. Una vez resuelta la ecuación diferencial, se debe hacer el reemplazo $\tau = t - t_0$, donde t_0 es el tiempo absoluto que marca el inicio del presente tramo.

Ejemplo

Repita el ejemplo anterior usando un tiempo local τ en cada intervalo para resolver la ecuación diferencial. Reemplace para obtener las expresiones en tiempo absoluto t y verifique que el resultado no cambia.

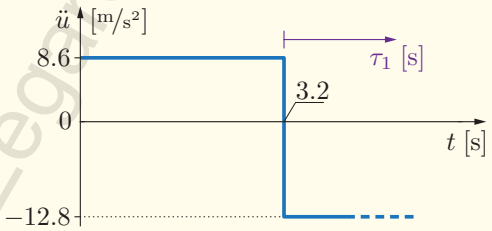
Tramo I Caso para $0 \leq t \leq 3{,}2\,\mathrm{s}$
En este tramo el auto acelera con $\ddot{u}^{\mathrm{I}} = 8{,}6\,\mathrm{m/s^2}$ con condiciones iniciales $u_0 = 0$ y $v_0 = 0$. Debido a que la aceleración es de tipo polinomial, la expresión para la velocidad y posición del automóvil son:

$$\dot{u}^{\mathrm{I}}(t) = 8{,}6\,t$$
$$u^{\mathrm{I}}(t) = 4{,}3\,t^2$$

Al final del tramo I (periodo de aceleración) se tiene:

$$\dot{u}^{\mathrm{I}}(3{,}2) = 27{,}52\,\mathrm{m/s} \qquad u^{\mathrm{I}}(3{,}2) = 44{,}032\,\mathrm{m}$$

Tramo II Caso para $3{,}2 \leq t \leq t_{\mathrm{stop}}$
Se define un tiempo local τ_1 tal que $\tau_1 = 0$ al comienzo del presente tramo. Con ello, en este tramo el auto desacelera con $\ddot{u}^{\mathrm{II}} = -12{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, con condiciones iniciales $u_0 = 44{,}032\,\mathrm{m}$ y $\dot{u}_0 = 27{,}52\,\mathrm{m/s}$. Debido a que la aceleración es de tipo polinomial, la expresión para la velocidad y posición del automóvil en función del tiempo local τ_1 son:



$$\dot{u}^{\mathrm{II}}(\tau_1) = -12{,}8\,\tau_1 + 27{,}52$$
$$u^{\mathrm{II}}(\tau_1) = -6{,}4\,\tau_1^2 + 27{,}52\,\tau_1 + 44{,}032$$

Cambiando la variable de tiempo local τ_1 a tiempo absoluto con el reemplazo $\tau_1 = t - 3{,}2\,\mathrm{s}$, se obtiene:

$$\dot{u}^{\mathrm{II}}(\tau_1) = -12{,}8\,(t - 3{,}2) + 27{,}52 \longrightarrow \dot{u}^{\mathrm{II}}(t) = -12{,}8\,t + 68{,}48$$
$$u^{\mathrm{II}}(\tau_1) = -6{,}4\,(t - 3{,}2)^2 + 27{,}52\,(t - 3{,}2) + 44{,}032 \longrightarrow u^{\mathrm{II}}(t) = -6{,}4\,t^2 + 68{,}48\,t - 109{,}568$$

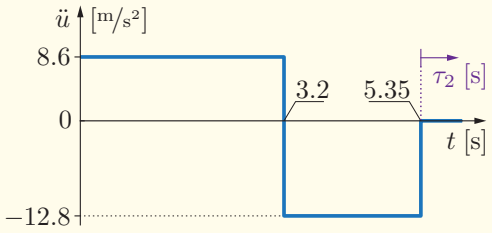
El automóvil se detiene en el instate t_{stop} tal que:

$$\dot{u}^{\mathrm{II}}(t_{\mathrm{stop}}) = -12{,}8\,t_{\mathrm{stop}} + 68{,}48 = 0$$
$$\longrightarrow \quad t_{\mathrm{stop}} = 5{,}35\,\mathrm{s}$$

Al final del tramo II (periodo de desaceleración) se tiene:

$$\dot{u}^{\mathrm{II}}(5{,}35) = 0\,\mathrm{m/s} \qquad u^{\mathrm{II}}(5{,}35) = 73{,}616\,\mathrm{m}$$

Tramo III Caso para $5{,}35 \leq t$
Se define un tiempo local τ_2 tal que $\tau_2 = 0$ al comienzo del presente tramo. Con ello, en este tramo el auto desacelera con $\ddot{u}^{\mathrm{III}} = 0\,\mathrm{m/s^2}$, con condiciones iniciales $u_0 = 73{,}616\,\mathrm{m}$ y $\dot{u}_0 = 0$. Debido a que la aceleración es de tipo polinomial, la expresión para la velocidad y posición del automóvil en función del tiempo local τ_2 son:



BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

$$\dot{u}^{\mathrm{III}}(\tau_2) = 0$$
$$u^{\mathrm{III}}(\tau_1) = 73{,}616$$

Cambiando la variable de tiempo local τ_2 a tiempo absoluto con el reemplazo $\tau_2 = t - 5{,}35\,\mathrm{s}$, se obtiene:

$$\dot{u}^{\mathrm{III}}(t) = 0$$
$$u^{\mathrm{III}}(t) = 73{,}616$$

Los resultados obtenidos son idénticos al procedimiento anterior en que se utilizó el tiempo absoluto t en los cálculos.

Nota: En este procedimiento, el cálculo tedioso ocurre cuando se hace el reemplazo por el tiempo absoluto y se debe expandir la expresión.

2.2.3. Método gráfico aplicado a cinemática

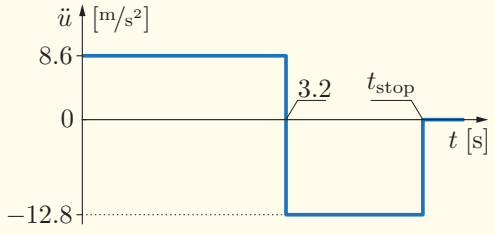
La relación entre las gráficas $\ddot{u}$–t, $\dot{u}$–t, y u–t, es evidente cuando se analiza la Ecuación (2.5). En el ejemplo anterior, la pendiente de la gráfica u–t resulta en $\dot{u}$–t. Del mismo modo, la pendiente de la gráfica $\dot{u}$–t resulta en $\ddot{u}$–t.

El proceso inverso (integrar) requiere ser más cuidadoso: hay infinitas curvas a elevaciones diferentes que pueden resultar de integrar una curva, como muestran las Figuras 2.2(b) y 2.2(c). La curva real se identifica cuando se obtiene la constante de integración. Pese a ello, la integral de la aceleración en un intervalo Δt_{ab} es igual a la variación de la velocidad Δv_{ab} en el mismo intervalo, como muestra la Figura 2.2(b). Esto es independiente de la constante de integración, o de la elevación real a la que se encuentra la curva. Del mismo modo, la integral de la velocidad en un intervalo Δt_{cd} es igual a la variación de la posición Δu_{cd} en el mismo intervalo, como muestra la Figura 2.2(c).

La relación entre estas curvas permite resolver algunos problemas de cinemática de forma gráfica si se provee de una o más gráficas $\ddot{u}$–t, $\dot{u}$–t, o u–t. Cuando la gráfica (o expresión) de aceleración $\ddot{u}(t)$ es constante o lineal a tramos, se puede fácilmente obtener una expresión para $\dot{u}(t)$ de forma gráfica. Análogamente, si la gráfica (o expresión) de velocidad es constante o lineal a tramos, se puede fácilmente obtener una expresión para $u(t)$ de forma gráfica. El método gráfico suele no ser recomendable para expresiones más complejas.

Ejemplo

Una prueba de aceleración y frenado de un automóvil "Tesla Model S" consiste en: comenzando desde el reposo, i.e. $v_0 = 0$; **(i)** acelerar al máximo por 3,2 s; para luego **(ii)** frenar al máximo hasta detener el vehículo. Los motores eléctricos del automóvil producen torque constante y son capaces de acelerar a 8,6 $\mathrm{m/s^2}$. El sistema de freno (incluyendo los neumáticos y su adherencia) es capaz de desacelerar a 12,8 $\mathrm{m/s^2}$.



Determine gráficamente el instante t_{stop} en que el automóvil se detiene.

Se sabe que la integral (área bajo la curva) de la gráfica $\ddot{u}$–t corresponde a la variación de velocidad.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

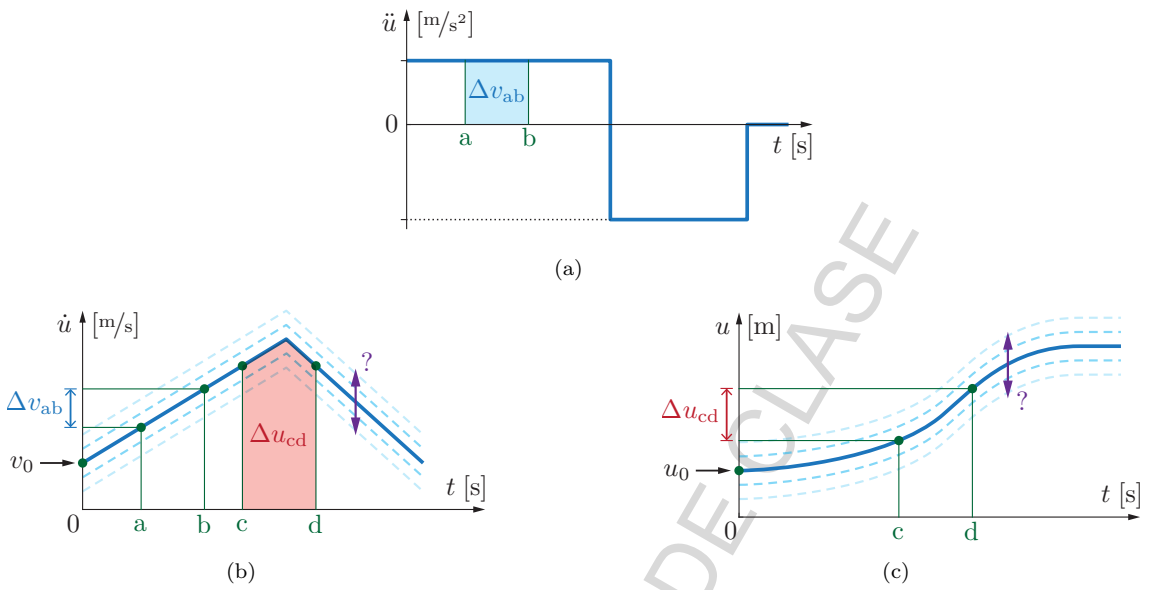


Figura 2.2: Relación entre las gráficas de aceleración, velocidad, y posición: **(a)** aceleración en el tiempo; **(b)** velocidad en el tiempo; y **(c)** posición en el tiempo.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Es decir, para un tiempo $t > 3{,}2\,\mathrm{s}$, se tiene que:

$$v\,(t) = \underbrace{v_0}_{=0} + \underbrace{\int_{\tau=0}^{\tau=3{,}2} 8{,}6\,\mathrm{d}\tau + \int_{\tau=3{,}2}^{\tau=t} -12{,}8\,\mathrm{d}\tau}_{\Delta v}$$

, donde se ha utilizado la *variable muda* τ para evitar integrar sobre la variable t hasta t. Gráficamente, ambas integrales corresponden a áreas de rectángulos, y con ello:

$$v\,(t) = 0 + (3{,}2 - 0)\,(8{,}6) + (t - 3{,}2)\,(-12{,}8)$$

El instante en que el automóvil se detiene t_{stop} es:

$$\begin{aligned} & v\,(t_{\mathrm{stop}}) = 0 \\ & v\,(t_{\mathrm{stop}}) = 0 + 27{,}52 + (t_{\mathrm{stop}} - 3{,}2)\,(-12{,}8) = 0 \\ \longrightarrow \quad & t_{\mathrm{stop}} = \frac{27{,}52}{12{,}8} + 3{,}2 = 5{,}35\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Resultado que coincide con el tiempo t_{stop} obtenido anteriormente por el método tradicional.

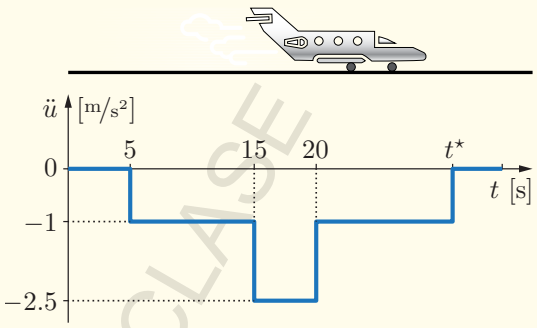
Ejemplo

Basado en Hibbeler 14th ed, Problem 12–55

Un avión aterriza en una pista recta con velocidad 33,5 m/s cuando $u = 0$. El avión desacelera como muestra la gráfica. Se pide determinar:

a) El tiempo $t^\star$ necesario para que el avión se detenga.

b) Bosqueje la gráfica u–t del movimiento del avión.

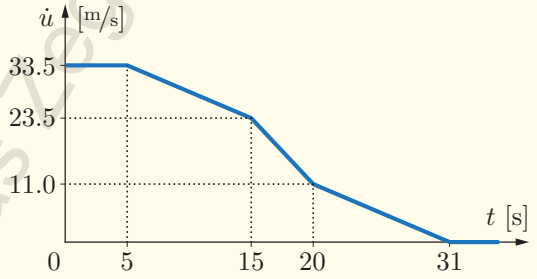


La integral de la aceleración es igual a la variación de velocidad Δv. Sabemos que en $t^\star$ la velocidad es $v_{\text{end}} = 0$, con lo que:

$$v_0 + \Delta v_{5\to 15} + \Delta v_{15\to 20} + \Delta v_{20\to t^\star} = v_{\text{end}}$$
$$33{,}5 + (15-5)(-1) + (20-15)(-2{,}5) + (t^\star - 20)(-1) = 0$$
$$\longrightarrow \quad t^\star = 31\,\text{s}$$

La aceleración es constante a tramos, con lo que la velocidad será lineal a tramos. Para bosquejar la velocidad basta con determinar la velocidad en los puntos donde la aceleración cambia:

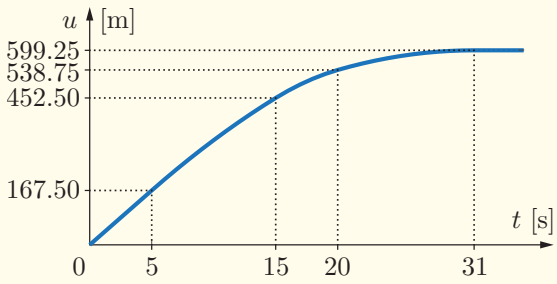
$$v_0 + \underbrace{\Delta v_{0\to 5}}_{0} = v(5) \quad \to \quad v(5) = 33{,}5\,\text{m/s}$$
$$v_0 + \underbrace{\Delta v_{0\to 15}}_{-10{,}0} = v(15) \quad \to \quad v(15) = 23{,}5\,\text{m/s}$$
$$v_0 + \underbrace{\Delta v_{0\to 20}}_{-22{,}5} = v(20) \quad \to \quad v(20) = 11{,}0\,\text{m/s}$$
$$v_0 + \underbrace{\Delta v_{0\to 20}}_{-33{,}5} = v(31) \quad \to \quad v(31) = 0$$



, con lo que se puede bosquejar la gráfica $\dot{u}$–t.

La integral de la velocidad es igual a la variación del desplazamiento Δu. En este caso es necesario integrar triángulos, lo que nuevamente es fácil de hacer gráficamente (área de triángulos y trapecios).

$$u_0 + \underbrace{\Delta u_{0\to 5}}_{167{,}5} = u(5) \quad \to \quad u(5) = 167{,}5\,\text{m}$$
$$u_0 + \underbrace{\Delta u_{0\to 15}}_{452{,}5} = u(15) \quad \to \quad v(15) = 452{,}5\,\text{m}$$
$$u_0 + \underbrace{\Delta u_{0\to 20}}_{538{,}75} = u(20) \quad \to \quad v(20) = 538{,}75\,\text{m}$$
$$u_0 + \underbrace{\Delta u_{0\to 20}}_{599{,}25} = u(31) \quad \to \quad v(31) = 599{,}25\,\text{m}$$



, con lo que se puede bosquejar la gráfica u–t. Podría ser útil determinar la posición en otros instantes para mejor determinar la forma de las curvas.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo



Un tren de metro tiene consideraciones de confort que limitan la aceleración y frenado (desaceleración) a un máximo $|a_{\max}| = 2\,\mathrm{m/s^2}$. La velocidad máxima del tren es $v_{\max} = 24\,\mathrm{m/s}$. Se pide:

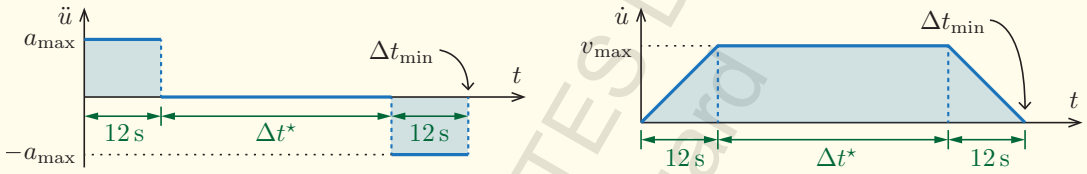
a) Determinar el tiempo mínimo de viaje $\Delta t_{\min}$ entre dos estaciones que están a 1200 m de distancia entre si.

b) Bosqueje la curva u–t para el intervalo $t = 0 \ldots \Delta t_{\min}$ indicando valores clave (transiciones).

La aceleración es constante a tramos, lo que sugiere que un método gráfico es conveniente para analizar del problema. El tiempo de aceleración (y frenado) es:

$$\Delta t_{\mathrm{acc}} = \frac{v_{\max}}{a_{\max}} = \frac{24}{2} = 12\,\mathrm{s}$$

Las siguientes son las gráficas de aceleración y velocidad:



El área bajo la curva $\dot{u}$ vs t corresponde al desplazamiento, que debe ser igual a $\Delta u = 1200\,\mathrm{m}$ (la distancia entre estaciones). Es decir, se debe cumplir que:

$$\frac{1}{2}(12\,\mathrm{s})(24\,\mathrm{m/s}) + (\Delta t^\star)(24\,\mathrm{m/s}) + \frac{1}{2}(12\,\mathrm{s})(24\,\mathrm{m/s}) = \Delta u$$

$$144 + 24\,\Delta t^\star + 144 = 1200$$

$$\Delta t^\star = \frac{912}{24} = 38\,\mathrm{s}$$

Es decir, el tiempo mínimo de viaje es:

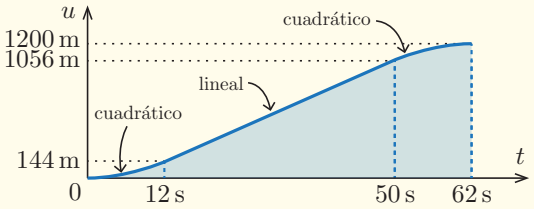
$$\Delta t_{\min} = \Delta t_{\mathrm{acc}} + \Delta t^\star + \Delta t_{\mathrm{acc}} = 12 + 38 + 12 = 62\,\mathrm{s}$$

Las posiciones del tren en los puntos de transición son: Esto resulta en:

$$u\,(t = 12\,\mathrm{s}) = \frac{1}{2}(12\,\mathrm{s})(24\,\mathrm{m/s}) = 144\,\mathrm{m}$$

$$u\,(t = 50\,\mathrm{s}) = 144 + (38\,\mathrm{s})(24\,\mathrm{m/s}) = 1056\,\mathrm{m}$$

$$u\,(t = 62\,\mathrm{s}) = \Delta u = 1200\,\mathrm{m}$$



La gráfica u vs t resultante se muestra al costado.

BORRADOR APUNTES DE CLASE · Tomás Zegard

2.3. Movimiento rectangular cartesiano (movimiento 2D/3D)

El sistema cartesiano es ideal para estudiar los casos de cinemática donde las componentes x, y, y z, de la aceleración, son independientes entre sí.

La posición de una partícula en el tiempo, como muestra la Figura 2.3, se expresa vectorialmente como:

$$\mathbf{u} = u_x\,\hat{\mathbf{i}} + u_y\,\hat{\mathbf{j}} + u_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

La velocidad de la partícula es:

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{k}} + \underbrace{u_x\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{i}}}{\mathrm{d}t} + u_y\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{j}}}{\mathrm{d}t} + u_z\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t}}_{\text{sistema de referencia fijo}=\mathbf{0}}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{u}_x\,\hat{\mathbf{i}} + \dot{u}_y\,\hat{\mathbf{j}} + \dot{u}_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

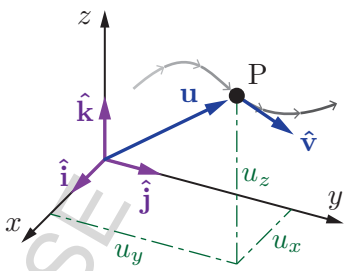


Figura 2.3: Posición para una partícula con movimiento 3D. El vector de velocidad es tangente a la trayectoria.

La rapidez o magnitud de la velocidad es:

$$v = |\dot{\mathbf{u}}| = \sqrt{\dot{u}_x^2 + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2}$$

El vector director de la velocidad es siempre tangente a la trayectoria de la partícula, y es igual a:

$$\dot{\hat{\mathbf{u}}} = \hat{\mathbf{v}} = \frac{\dot{\mathbf{u}}}{|\dot{\mathbf{u}}|} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

Una segunda derivada temporal sobre la posición resulta en la aceleración de la partícula:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{u}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2u_x}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\mathrm{d}^2u_y}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{\mathrm{d}^2u_z}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{\mathbf{k}} + \underbrace{u_x\frac{\mathrm{d}^2\hat{\mathbf{i}}}{\mathrm{d}t^2} + u_y\frac{\mathrm{d}^2\hat{\mathbf{j}}}{\mathrm{d}t^2} + u_z\frac{\mathrm{d}^2\hat{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t^2} + 2\left(\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{i}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{j}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t}\right)}_{\text{sistema de referencia fijo}=\mathbf{0}}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{u}_x\,\hat{\mathbf{i}} + \ddot{u}_y\,\hat{\mathbf{j}} + \ddot{u}_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

La magnitud de la aceleración es:

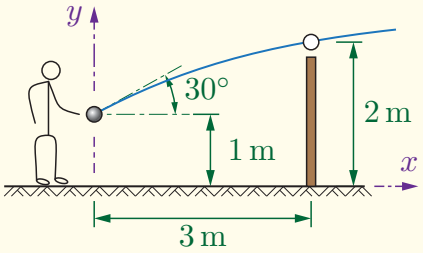
$$a = |\ddot{\mathbf{u}}| = \sqrt{\ddot{u}_x^2 + \ddot{u}_y^2 + \ddot{u}_z^2}$$

En términos simples: Los problemas de movimiento 2D se resuelven como si fueran dos movimientos rectilíneos. Análogamente, en el caso 3D se tienen 3 movimientos rectilíneos.

Resolviendo los problemas de forma vectorial se opera sobre todas las dimensiones a la vez.

Ejemplo

Una persona lanza una pelota con un ángulo de 30° sobre la horizontal desde una altura de 1 m. Determine la rapidez inicial mínima con que debe lanzar la pelota para pasar sobre un muro de 2 m de altura a 3 m de distancia.



Comenzamos por ubicar el origen a los pies de la persona. Si la rapidez es efectivamente la mínima, entonces la pelota pasará justo sobre el muro. La información que se tiene es la siguiente:

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

$$\ddot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ m} \qquad \mathbf{u}(t^\star) = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \text{ m}$$

Integrando dos veces para obtener la posición:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix}$$
$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} C_{1x} \\ C_{1y} \end{Bmatrix}$$
$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{Bmatrix} C_{1x} \\ C_{1y} \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} C_{2x} \\ C_{2y} \end{Bmatrix}$$

Utilizando la condición de posición inicial se puede resolver para C_{2x} y C_{2y}:

$$\mathbf{u}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{0^2}{2} + \begin{Bmatrix} C_{1x} \\ C_{1y} \end{Bmatrix} (0) + \begin{Bmatrix} C_{2x} \\ C_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} C_{2x} \\ C_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Adicionalmente, se sabe que la velocidad inicial (tangente a la trayectoria) es:

$$\dot{\mathbf{u}}_0 = v_0 \, \hat{\mathbf{v}}_0 = v_0 \begin{Bmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{Bmatrix} = \frac{v_0}{2} \begin{Bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

, donde v_0 es la rapidez inicial. Utilizando la condición $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0$, se obtiene C_{1x} y C_{1y} en función de v_0:

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{Bmatrix} C_{1x} \\ C_{1y} \end{Bmatrix} = \frac{v_0}{2} \begin{Bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

, con lo que la posición de la partícula para todo instante t es:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + \frac{v_0}{2} \begin{Bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Queremos que el punto $3\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}}$ sea parte de la trayectoria para así obtener la rapidez inicial mínima:

$$\mathbf{u}(t^\star) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{(t^\star)^2}{2} + \frac{v_0}{2} \begin{Bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{Bmatrix} t^\star + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

, donde se tienen 2 incógnitas ($t^\star$ y v_0), y dos ecuaciones (x e y). La ecuación en $\hat{\mathbf{i}}$ nos permite obtener el tiempo $t^\star$ en que la pelota llega al muro:

$$\frac{v_0}{2} \left(\sqrt{3} \right) t^\star = 3 \qquad \longrightarrow \qquad t^\star = \frac{2\sqrt{3}}{v_0}$$

Reemplazando $t^\star$ en la ecuación asociada a $\hat{\mathbf{j}}$ se puede resolver para la velocidad inicial:

$$\left(\frac{-g}{2} \right) \left(\frac{2\sqrt{3}}{v_0} \right)^2 + \left(\frac{v_0}{2} \right) \left(\frac{2\sqrt{3}}{v_0} \right) + 1 = 2$$
$$\sqrt{3} - 1 = 6g \left(\frac{1}{v_0} \right)^2$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{6g}{\sqrt{3} - 1}} = 8{,}967 \, \text{m/s}$$

La pelota pasará por sobre el muro si se lanza con rapidez mayor o igual a $8{,}967 \, \text{m/s}$.

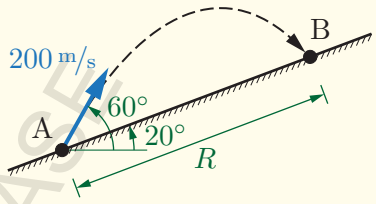
Nota: La velocidad inicial $v_0 = -8{,}967 \, \text{m/s}$ es también una solución del problema, que está asociada a un tiempo $t^\star < 0$. No es una solución de interés en este problema.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

Meriam 9th ed, Problem 2/70

Un proyectil se dispara con rapidez inicial de 200 m/s con un ángulo de 60° sobre la horizontal. El suelo es un plano inclinado a 20° sobre la horizontal. Determine la distancia R al punto de impacto.



Ubicaremos el origen en el punto A. Con ello, la recta entre los puntos A y B (superficie del terreno) son los puntos que cumplen:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \cos 20° \\ \sin 20° \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \cos 20° \\ \sin 20° \end{Bmatrix}$$

, donde λ es la distancia al punto A.
La información que tenemos del enunciado es:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{u}}_0 = 200 \begin{Bmatrix} \cos 60° \\ \sin 60° \end{Bmatrix} = 100 \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

, con lo que llega a la siguiente ecuación de movimiento:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + \dot{\mathbf{u}}_0\, t + \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + 100 \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} t$$

El proyectil impactará el punto B en el instante $t^\star$. Punto cuyas coordenadas pertenecen a la recta $\overline{AB}$. Es decir:

$$\mathbf{u}(t^\star) = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix} = R \begin{Bmatrix} \cos 20° \\ \sin 20° \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{(t^\star)^2}{2} + 100 \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} t^\star = R \begin{Bmatrix} \cos 20° \\ \sin 20° \end{Bmatrix}$$

, donde se tienen 2 ecuaciones (en $\hat{\mathbf{i}}$ y en $\hat{\mathbf{j}}$) y 2 incógnitas ($t^\star$ y R). Con la primera ecuación:

$$100\, t^\star = R \cos 20° \longrightarrow \qquad t^\star = \frac{R}{100} \cos 20°$$

, que reemplazando en la segunda ecuación resulta en:

$$-\frac{g}{2} \left[\frac{R}{100} \cos 20° \right]^2 + 100\sqrt{3} \left[\frac{R}{100} \cos 20° \right] = R \sin 20°$$

$$R \left[R \left(\frac{-g}{2} \right) \cos^2 20° + 100^2 \left(\sqrt{3} \cos 20° - \sin 20° \right) \right] = 0$$

Las dos soluciones tienen perfecto sentido físico. La solución $R_1 = 0$ es la "solución trivial" y corresponde al punto A: el punto inicial en la trayectoria del proyectil. La segunda solución es la solución de interés y corresponde a la distancia R buscada:

$$R_2 = \frac{(2)\left(100^2\right)}{g} \left[\frac{\sqrt{3}}{\cos 20°} - \frac{\tan 20°}{\cos 20°} \right] = 2968\,\text{m}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

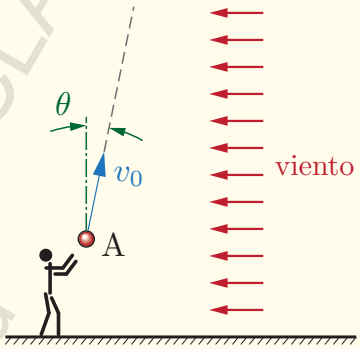
Sugerido

Pruebe resolviendo el problema anterior nuevamente, pero utilizando un sistema de referencia inclinado a 20°. Es decir, el eje x coincide con la superficie del terreno. En ese caso la aceleración $\ddot{\mathbf{u}}$, la velocidad inicial $\dot{\mathbf{u}}_0$, y las coordenadas del punto B cambian al tener; pero el valor de R al que se llega es el mismo.

Ejemplo

Meriam 9th ed, Problem 2/68

Un niño lanza una pelota hacia arriba con ángulo θ bajo la vertical y rapidez inicial $v_0 = 12\,\text{m/s}$. Un viento horizontal produce una aceleración sobre la pelota de $0{,}4\,\text{m/s}^2$ hacia la izquierda. Suponga que el viento no afecta el movimiento vertical. ¿Con qué ángulo θ de lanzamiento la pelota regresará a las manos del niño?



Fijando el origen en las manos del niño; la aceleración sobre la pelota y las condiciones iniciales son:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} -0{,}4 \\ -g \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{u}}_0 = 12 \begin{Bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix}$$

Con lo que se obtiene la siguiente ecuación de posición:

$$\mathbf{u}\,(t) = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{5}\,t^2 + 12\,t\,\sin\theta \\ -\frac{g}{2}\,t^2 + 12\,t\,\cos\theta \end{Bmatrix}$$

La pelota volverá al origen en $t^\star$ tal que:

$$\begin{Bmatrix} -\frac{1}{5}\,(t^\star)^2 + 12\,t^\star\,\sin\theta \\ -\frac{g}{2}\,(t^\star)^2 + 12\,t^\star\,\cos\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t^\star\left(-\frac{1}{5}\,t^\star + 12\,\sin\theta\right) \\ t^\star\left(-\frac{g}{2}\,t^\star + 12\,\cos\theta\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Esto es un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (θ y $t^\star$), el cual tiene 2 soluciones: una trivial y la solución de interés.

Solución 1: $t^\star = 0$ y $\theta = ?$
Esta solución es trivial: el niño tendrá la pelota en sus manos al principio del experimento.

Solución 2: Se puede despejar $t^\star$ de las siguientes dos ecuaciones para obtener θ:

$$\left.\begin{aligned} -\tfrac{1}{5}\,t^\star + 12\,\sin\theta = 0 \\ -\tfrac{g}{2}\,t^\star + 12\,\cos\theta = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left.\begin{aligned} t^\star = 60\,\sin\theta \\ t^\star = \tfrac{24}{g}\,\cos\theta \end{aligned}\right\} \longrightarrow \tan\theta = \frac{2}{5\,g}$$

Es decir, el ángulo de lanzamiento debe ser:

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{2}{5\,g}\right) = 0{,}041\,\text{rad} \quad [\,2{,}335\,\text{deg}\,]$$

2.4. Movimiento en coordenadas polares y cilíndricas

Estos sistemas son ideales para representar el movimiento de partículas con trayectorias circulares, elípticas, helicoidales, y similares. Cuando el movimiento se encuentra completamente en un plano, entonces usamos coordenadas polares (caso 2D), que constituye caso particular de coordenadas cilíndricas cuando $z =$ constante.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

La posición se representa por un radio r, un ángulo θ, y una altura z (cuando corresponda). Los vectores unitarios de la base son $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, que corresponden a la direcciones radial y tangencial respectivamente, y cuando corresponda también $\hat{\mathbf{k}}$. En este sistema coordenado, la dirección de $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ dependen del ángulo θ, como muestra la Figura 2.4(a). Es decir, los vectores $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ varían en función del tiempo t.

La posición de la partícula P es:

$$\mathbf{u} = r\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

A simple vista, pareciera que la expresión para posición está mal: específicamente incompleta. El instinto dice que la posición debería depender también de θ. La verdad es que lo hace ya que θ dicta la dirección en la que apunta $\hat{\mathbf{e}}_r$ (y también $\hat{\mathbf{e}}_\theta$).

Es frecuente dibujar el eje x cartesiano al utilizar coordenadas polares o cilíndricas (ver Figura 2.4(a)), lo que resulta en una suerte de contradicción ya que dicho eje no se debiese utilizar. Es cierto, el eje x no se utiliza, pero es una forma conveniente de indicar dónde se tiene $\theta = 0$. Es decir, sería correcto simplemente indicar desde qué *datum* se mide θ, lo que es análogo a lo anterior y evita definir el eje x.

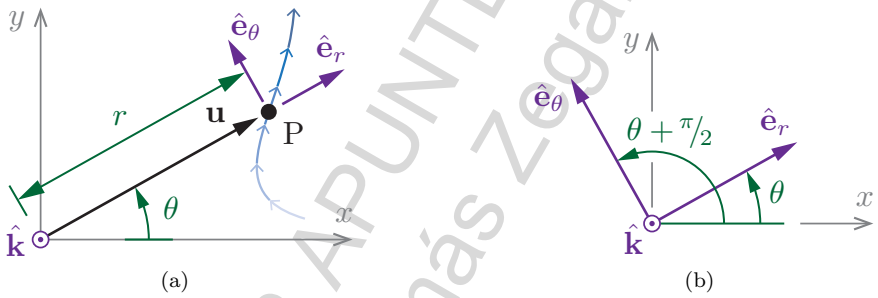


Figura 2.4: Coordenadas polares y cilíndricas: **(a)** posición de una partícula; y **(b)** definición de los vectores base $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ en función de θ.

Es frecuente dudar sobre la dirección y sentido del vector base $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ ya que es poco intuitivo. Lo primero es recordar que los vectores base son mutuamente ortogonales, lo que inmediatamente dicta la dirección de $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, pero no así su sentido. El sentido puede inferirse como aquel en que el ángulo θ crece, como muestra la Figura 2.4(b).

Una forma alternativa de encontrar el eje $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ consiste en utilizar el producto cruz (ver Sección 1.3.5). Definiendo los ejes $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{k}}$ en coordenadas cartesianas se tiene:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{k}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Es decir, teniendo seguridad sobre el primer y tercer eje; el segundo eje se obtiene según:

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_r = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

, lo que confirma que $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ apunta en la dirección en que θ crece.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

La velocidad de la partícula es:

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t}$$

La dificultad es que el eje $+r$ varía con $\theta\,(t)$. Es decir, $\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} \neq 0$. Un problema similar ocurre a la hora de calcular la aceleración de una partícula, ya que necesitaremos además de $\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}t}$. Antes de continuar nuestro desarrollo, es necesario determinar cómo varían $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ con una variación de $\theta\,(t)$.

2.4.1. Método 1: derivación gráfica

La Figura 2.5 muestra cómo cambian los vectores base debido a un aumento diferencial del ángulo $\mathrm{d}\theta$:

- El diferencial $\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r$ es en la dirección $+\theta$, i.e., dirección positiva según $\hat{\mathbf{e}}_\theta$.
- El diferencial $\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta$ es en la dirección $-r$; i.e., dirección negativa según $\hat{\mathbf{e}}_r$.

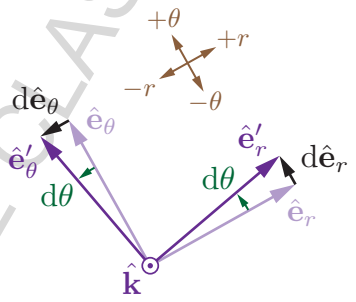


Figura 2.5: Variación de los vectores base cilíndricos (polares) para una variación diferencial positiva del ángulo $\mathrm{d}\theta$..

Como los vectores base (al igual que los vectores directores) tienen longitud igual a 1, los arcos infinitesimales tienen longitud $(1)\,(\mathrm{d}\theta) = \mathrm{d}\theta$. Con ello podemos escribir $\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta$ como una magnitud $(\mathrm{d}\theta)$ y su dirección correspondiente:

$$\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r = \mathrm{d}\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \qquad\qquad \mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\mathrm{d}\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

Finalmente, dividiendo ambas expresiones por un diferencial de tiempo $\mathbf{d}t$ se obtiene:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

Es decir, gráficamente se ha determinado que las derivadas temporales de los vectores base polares (o cilíndricos) son:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_r \tag{2.10}$$

2.4.2. Método 2: derivación algebraica

Los vectores base cilíndricos definidos en coordenadas cartesianas son:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{k}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

, los que dependen del ángulo θ.

> La definición del vector base $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ se puede determinar gráficamente con precaución de los signos resultantes, o bien como el vector que apunta en $\theta + \pi/2$ respecto a $\hat{\mathbf{e}}_r$, como muestra la Figura 2.4(b). Es decir:
>
> $$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \begin{Bmatrix} \cos(\theta + \pi/2) \\ \sin(\theta + \pi/2) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Utilizando la regla de la cadena se tiene que:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \hat{\mathbf{e}}_\theta\,\dot{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \begin{Bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\hat{\mathbf{e}}_r\,\dot{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Es decir, se tiene que:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_r \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0} \tag{2.11}$$

2.4.3. Cinemática en coordenadas polares o cilíndricas

Comprendido cómo varían los vectores base en el tiempo es posible determinar la expresión de la velocidad:

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\overbrace{\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t}}^{\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

, cuya magnitud (rapidez) es:

$$v = |\dot{\mathbf{u}}| = \sqrt{(\dot{r})^2 + \left(r\,\dot{\theta}\right)^2}$$

> Recordar que podría existir una posición y velocidad asociada a $\hat{\mathbf{k}}$ (eje z).

La aceleración de una partícula en coordenadas polares es:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{u}}}{\mathrm{d}t} = \ddot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\,\overbrace{\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t}}^{\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\overbrace{\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}t}}^{-\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_r}$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

, cuya magnitud es:

$$a = |\ddot{\mathbf{u}}| = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)^2}$$

> En el futuro podría tener utilidad notar que la componente $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ de la aceleración, $\ddot{u}_\theta = \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)$, se puede también escribir como:
>
> $$\ddot{u}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\,\dot{\theta}\right)$$

Resumiendo, el movimiento de una partícula en coordenadas polares o cilíndricas se rige según:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= r\,\hat{\mathbf{e}}_r + z\,\hat{\mathbf{k}} \\ \dot{\mathbf{u}} &= \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\,\hat{\mathbf{k}} \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\,\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{2.12}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Comprender el sentido físico a las componentes de la aceleración en coordenadas polares no es trivial. Cada "ingrediente" tiene un nombre característico que sirve para luego explicar su origen:

$\ddot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r$: aceleración radial
$-r\,\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_r$: aceleración centrípeta
$r\,\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$: aceleración tangencial
$2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$: aceleración de Coriolis

Hay videos educacionales con explicaciones intuitivas de cada término, incluida la aceleración de Coriolis (probablemente la más difícil de explicar). Es muy recomendable ver alguno de estos videos ya que nos permiten "tocar" la física y los problemas que estamos resolviendo.

Algunos textos llaman usan la nomenclatura $\hat{\mathbf{r}}$ – $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ o bien $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ – $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, en lugar de $\hat{\mathbf{e}}_r$ – $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ para los vectores base en coordenadas polares.

2.4.4. Definición de velocidad y aceleración angular

La *velocidad angular* tiene unidades de $^{\text{rad}}/_{\text{s}}$, y análogo al caso de $\dot{u} = v$, se suele escribir de dos maneras:

$$\dot{\theta} = \omega$$

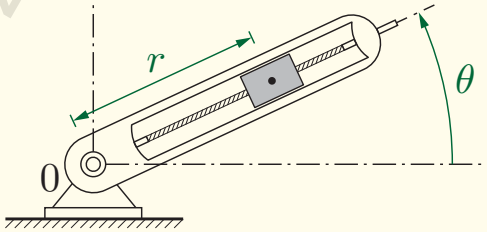
Similarmente, la *aceleración angular* tiene unidades de $^{\text{rad}}/_{\text{s}^2}$, y se suele escribir como:

$$\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha$$

Ejemplo

Basado en Meriam 9th ed, Sample Problem 2/9

Un brazo ranurado tiene un pequeño carro que se mueve gracias a un tornillo en el mismo brazo. La rotación del brazo está dada por $\theta\,(t) = 0{,}2\,t + 0{,}02\,t^3$ (radianes), y el movimiento del carro por $r = 0{,}2 + 0{,}04\,t^2$ (metros).



Se pide determinar:

a) La velocidad $\dot{\mathbf{u}}$ y la aceleración $\ddot{\mathbf{u}}$ del carro en coordenadas polares cuando $t = 3\,\text{s}$.

b) La magnitud de la velocidad y aceleración del carro cuando $t = 3\,\text{s}$.

c) La velocidad $\dot{\mathbf{u}}\,(3)$ y aceleración $\ddot{\mathbf{u}}\,(3)$ del carro en coordenadas cartesianas (términos de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$).

Comenzamos por determinar todas las derivadas de la coordenada angular y radial:

$$\theta = 0{,}2\,t + 0{,}02\,t^3 \qquad r = 0{,}2 + 0{,}04\,t^2$$
$$\dot{\theta} = 0{,}2 + 0{,}06\,t^2 \qquad \dot{r} = 0{,}08\,t$$
$$\ddot{\theta} = 0{,}12\,t \qquad \ddot{r} = 0{,}08$$

Evaluando en $t = 3\,\text{s}$, la ecuación del movimiento para el ángulo θ es:

$$\theta\,(3) = 1{,}14\,\text{rad} \quad [65{,}32\,\text{deg}] \qquad r\,(3) = 0{,}56\,\text{m}$$
$$\dot{\theta}\,(3) = 0{,}74\,^{\text{rad}}/_{\text{s}} \qquad \dot{r}\,(3) = 0{,}24\,^{\text{m}}/_{\text{s}}$$
$$\ddot{\theta}\,(3) = 0{,}36\,^{\text{rad}}/_{\text{s}^2} \qquad \ddot{r}\,(3) = 0{,}08\,^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Con lo que, la velocidad y aceleración del carro resultan ser:

$$\dot{\mathbf{u}}(3) = (0{,}24)\,\hat{\mathbf{e}}_r + (0{,}56)\,(0{,}74)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = 0{,}24\,\hat{\mathbf{e}}_r + 0{,}4144\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \text{ m/s}$$

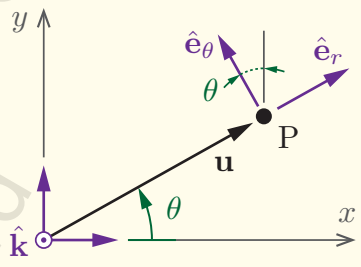
$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}(3) &= \left[0{,}08 - (0{,}56)\,(0{,}74)^2\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[(0{,}56)\,(0{,}36) + (2)\,(0{,}24)\,(0{,}74)\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= -0{,}2267\,\hat{\mathbf{e}}_r + 0{,}5568\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

Las magnitudes de la velocidad y aceleración son:

$$v(3) = |\dot{\mathbf{u}}(3)| = \sqrt{(0{,}24)^2 + (0{,}4144)^2} = \sqrt{0{,}2293} = 0{,}4789 \text{ m/s}$$

$$a(3) = |\ddot{\mathbf{u}}(3)| = \sqrt{(-0{,}2267)^2 + (0{,}5568)^2} = \sqrt{0{,}3614} = 0{,}6012 \text{ m/s}^2$$

Para hacer un cambio de base a coordenadas cartesianas, es necesario escribir $\hat{\mathbf{e}}_r$—$\hat{\mathbf{e}}_\theta$ en términos de $\hat{\mathbf{i}}$—$\hat{\mathbf{j}}$ y reemplazar. La Figura al costado muestra cómo relacionar los vectores base a través del ángulo θ. Con ello se obtiene:



$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_r &= \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= -\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

En nuestro caso, el ángulo es $\theta(3) = 1{,}14$ rad:

$$\cos\theta = 0{,}4176 \qquad \sin\theta = 0{,}9086$$

Reemplazando $\hat{\mathbf{e}}_r$—$\hat{\mathbf{e}}_\theta$ en las expresiones de velocidad y aceleración:

$$\dot{\mathbf{u}}(3) = (0{,}24)\left(0{,}4176\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}9086\,\hat{\mathbf{j}}\right) + (0{,}4144)\left(-0{,}9086\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}4176\,\hat{\mathbf{j}}\right) = -0{,}2763\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}3911\,\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(3) = (-0{,}2267)\left(0{,}4176\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}9086\,\hat{\mathbf{j}}\right) + (0{,}5568)\left(-0{,}9086\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}4176\,\hat{\mathbf{j}}\right) = -0{,}6006\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}0266\,\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}^2$$

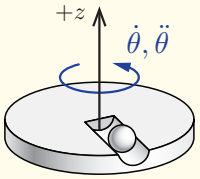
Sugerido

Compruebe que la magnitud de los vectores del problema anterior no varía si se cambia el sistema de referencia. Es decir, compruebe que $|\dot{\mathbf{u}}(3)|$ y $|\ddot{\mathbf{u}}(3)|$ siguen resultando 0,4789 m/s y 0,6012 m/s², respectivamente.

Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Problem 1.101

Una bolita se mueve radialmente hacia afuera por el surco de un disco que rota respecto al eje $\hat{\mathbf{k}}$. El disco rota con velocidad y aceleración angular $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$, respectivamente. En un instante dado, la bolita se encuentra a 8 cm del centro del disco, y se aleja del centro por el surco con rapidez 10 m/s y aceleración 12 m/s².



¿Qué valores de $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ son necesarias para que la aceleración total que experimenta la bolita sea $\mathbf{0}$?

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Sabemos del enunciado que:

$\theta = ?$	$r = 8\,\text{cm}$	$z = \text{constante}$
$\dot{\theta} = \text{incógnita}$	$\dot{r} = 10\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}}$	$\dot{z} = 0$
$\ddot{\theta} = \text{incógnita}$	$\ddot{r} = 12\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$	$\dot{z} = 0$

La aceleración en coordenadas polares es:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\,\hat{\mathbf{k}}$$

Para que $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, entonces cada componente del vector debe ser cero. Utilizando la ecuación asociada a $\hat{\mathbf{e}}_r$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 &= 0 \\ 12 - 8\,\dot{\theta}^2 &= 0 \\ \dot{\theta} &= \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}} \end{aligned}$$

Luego, utilizando la ecuación asociada a $\hat{\mathbf{e}}_\theta$:

$$\begin{aligned} r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} &= 0 \\ 8\,\ddot{\theta} + (2)\,(10)\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &= 0 \\ \ddot{\theta} &= \mp\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}^2} \end{aligned}$$

, donde es importante notar el cambio de signo de $\pm$ a $\mp$.

Es decir, existen dos soluciones posibles:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 = +\sqrt{\frac{3}{2}}\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}} \qquad \dot{\theta}_2 = \omega_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$$

$$\ddot{\theta}_1 = \alpha_1 = -\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}^2} \qquad \ddot{\theta}_2 = \alpha_2 = +\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}^2}$$

Ambos resultados tienen claros sentidos físicos y sugieren lo mismo: el disco debe estar girando a una velocidad específica pero desacelerando. Una solución considera el giro sentido horario (aceleración en sentido antihorario); mientras que la otra considera que el disco gira en sentido antihorario (aceleración en sentido horario).

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

2.4.5. Movimiento circular

El movimiento en coordenadas polares (o cilíndricas) es aquel que tiene $r = \text{constante}$ y constituye un caso especial pero muy frecuente en la práctica. Si el radio no cambia en el tiempo, entonces $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, y con ello las Ecuaciones (2.12) en el caso de un movimiento circular son:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= r\,\hat{\mathbf{e}}_r + z\,\hat{\mathbf{k}} \\ \dot{\mathbf{u}} &= r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\,\hat{\mathbf{k}} \\ \ddot{\mathbf{u}} &= -r\,\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\,\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

En un movimiento circular, el arco de círculo recorrido se relaciona con el ángulo como muestra la Figura 2.6. Es decir, el arco asociado a un ángulo θ y un radio R es:

$$s\,(t) = R\,\theta\,(t)$$

Además, debido a que no hay desplazamiento radial se cumple que la velocidad tangencial v_t es igual a la componente de velocidad según $\hat{\mathbf{e}}_\theta$. Es decir:

$$v_t = v_\theta \qquad \longleftarrow \quad \text{cuando el movimiento es circular}$$

Derivando temporalmente la relación entre un ángulo y su arco circular, se obtiene una relación entre la velocidad tangencial v_t y la velocidad angular $\dot{\theta}$:

$$v_t\,(t) = v_\theta = R\,\dot{\theta}\,(t) = R\,\omega\,(t)$$

Derivando una vez más, se obtiene la aceleración tangencial:

$$a_t\,(t) = a_\theta = R\,\ddot{\theta}\,(t) = R\,\alpha\,(t)$$

Notar que las unidades de v_t y a_t son $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ y $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$, respectivamente.

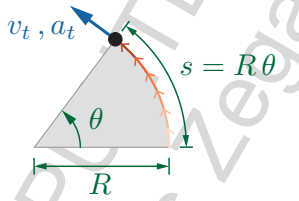


Figura 2.6: Relación entre la longitud del arco s y el ángulo de giro θ.

En ciertos problemas de movimiento circular se conoce $v_t = v_\theta$ y se debe calcular $\dot{\theta}$, o viceversa. Por ejemplo, el velocímetro de un automóvil en una rotonda entregará v_t, y será necesario dividir por el radio de la rotonda para obtener $\dot{\theta}$.

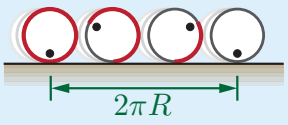
El vector de velocidad no tiene una componente radial:

$$\mathbf{v} = 0\,\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = v_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

En cambio, la aceleración tiene una componente radial, y puede o no tener una componente tangencial (sentido θ) dependiendo de si la rapidez del movimiento circular se mantiene o cambia:

$$\mathbf{a} = a_{\text{centrípeta}}\,\hat{\mathbf{e}}_r + a_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = -r\,\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_r + a_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

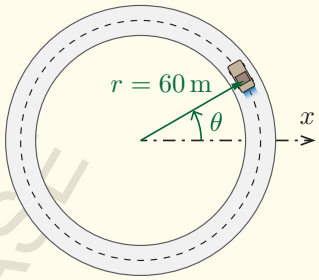
Las relaciones entre el ángulo y el arco serán de gran utilidad cuando tengamos objetos (no partículas) que *ruedan sin deslizar*. Por ejemplo, una rueda de radio R que da un giro completo $\theta = 2\pi$ se habrá desplazado horizontalmente $u = R\theta = 2\pi R$, como muestra la Figura a continuación.



BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Example 1.20



Un automóvil se encuentra en una pista circular de radio $r = 60\,\text{m}$ cuando comienza su carrera desde el reposo y en $\theta_0 = 0$. El automóvil acelera a $2\,\text{m/s}^2$. Determine la posición y el tiempo transcurrido cuando la magnitud de la aceleración alcanza $6\,\text{m/s}^2$.

Comenzamos obteniendo la aceleración angular a partir de la aceleración tangencial, esta última es la que ejerce el motor del automóvil:

$$R\,\ddot{\theta} = \ddot{u}_t$$
$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{u}_t}{R} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}\ \text{rad/s}^2$$

La ecuación del movimiento para el ángulo θ es:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{30}$$
$$\dot{\theta} = \frac{1}{30}t + C_1$$
$$\theta = \frac{1}{60}t^2 + C_1\,t + C_2$$

Sabemos que el automóvil comienza en $\theta_0 = 0$ y del reposo $\dot{\theta}_0 = 0$, y con ello $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$. Las ecuaciones de aceleración, velocidad, y posición, tanto angular como radial son:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{30}\ \text{rad/s}^2 \qquad \ddot{r} = 0$$
$$\dot{\theta} = \frac{1}{30}\,t\ \text{rad/s} \qquad \dot{r} = 0$$
$$\theta = \frac{1}{60}\,t^2\ \text{rad} \qquad r = 60\ \text{m}$$

, donde $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ debido a que el movimiento es circular (el radio no cambia). La aceleración que experimenta el automóvil es:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \left(\underbrace{\ddot{r}}_{0} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + \underbrace{2\,\dot{r}\,\dot{\theta}}_{0}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta = \left[-60\,\frac{t^2}{(30)^2}\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[60\,\frac{1}{30}\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta$$
$$\ddot{\mathbf{u}} = -\frac{t^2}{15}\,\hat{\mathbf{e}}_r + 2\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

La magnitud de la aceleración es:

$$a = |\ddot{\mathbf{u}}| = \sqrt{\left(-\frac{t^2}{15}\right)^2 + (2)^2} = \frac{1}{15}\sqrt{t^4 + 900}$$

Buscamos el instante $t^\star$ tal que $a\,(t^\star) = 6\,\text{m/s}^2$:

$$6 = \frac{1}{15}\sqrt{(t^\star)^4 + 900}$$
$$8100 = (t^\star)^4 + 900$$

Tiene dos soluciones:

$$t_1^\star = \underbrace{-9{,}2116\,\text{s}}_{\text{no válido}} \qquad t_2^\star = 9{,}2116\,\text{s}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

La posición del automóvil en $t^\star$ es:

$$\theta\left(t^\star\right) = \frac{1}{60}\left(t^\star\right)^2 = 1{,}4142\,\text{rad} \qquad [\,81{,}03\,\text{deg}\,]$$

Ejemplo

Basado en Bedford & Fowler 5th ed, Problems 13.153–13.154

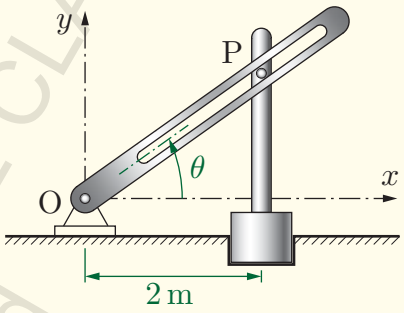
El actuador (gato hidráulico) mueve el pin P hacia arriba a velocidad constante $\mathbf{v} = 2\,\hat{\mathbf{j}}$ m/s. La viela (barra ranurada) comienza con $\theta_0 = 0$. Se pide determinar:

a) La velocidad del pin P en coordenadas polares.

b) La aceleración del pin P en coordenadas polares.

c) La velocidad angular de la barra ω cuando $\theta = 45°$.

d) La aceleración angular de la barra α cuando $\theta = 45°$.



Nota: Este problema podría resolverse también usando coordenadas cartesianas y convertir al final el resultado a coordenadas polares. Probablemente sería incluso más rápido de resolver. No obstante, eso no ejercitaría la cinemática en coordenadas polares.

Utilizando el teorema de Pitágoras, podemos relacionar el radio con la altura a la que se encuentra el pin P:

$$r\left(t\right) = \sqrt{2^2 + y\left(t\right)} = \sqrt{4 + \left(2\,t\right)^2} = 2\,\sqrt{1 + t^2}$$

Derivando respecto al tiempo t dos veces, se tiene:

$$\dot{r}\left(t\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2\,t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2\,t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\ddot{r}\left(t\right) = \frac{2\sqrt{1+t^2} - \left(2\,t\right)\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2\,t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{2}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

La relación entre el ángulo θ y la posición del pin es:

$$\tan\theta = \frac{y\left(t\right)}{2} = \frac{2\,t}{2} = t$$

Queremos $\theta\left(t\right)$, pero tenemos en vez $t\left(\theta\right)$. No hay problema porque sabemos que $\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\right)^{-1}$, y con ello:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\tan\theta\right] = 1 + \tan^2\theta = 1 + t^2$$

Es decir:

$$\dot{\theta}\left(t\right) = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\right)^{-1} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\ddot{\theta}\left(t\right) = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}\left(t\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{-2\,t}{\left(1+t^2\right)^2}$$

Tenemos ahora todos los ingredientes para obtener calcular la velocidad y la aceleración del pin P

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

en coordenadas polares: r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, y $\ddot{\theta}$. La velocidad y aceleración del pin en P son:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{2\,t}{\sqrt{1+t^2}}\,\hat{\mathbf{e}}_r + 2\sqrt{1+t^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{2\,t}{\sqrt{1+t^2}}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}} &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \left(\frac{2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} - 2\sqrt{1+t^2}\frac{1}{(1+t^2)^2}\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(2\sqrt{1+t^2}\frac{-2\,t}{(1+t^2)^2} + 2\frac{2\,t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta = \mathbf{0}\end{aligned}$$

El hecho que la aceleración sea $\ddot{\mathbf{u}} = 0\,\hat{\mathbf{e}}_r + 0\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = \mathbf{0}$ no debería ser sorprendente: si la aceleración es nula (velocidad constante) en coordenadas cartesianas, esta seguirá siendo nula luego de hacer un cambio de coordenadas (a coordenadas polares por ejemplo).

Finalmente, cuando $\theta = 45°$ se tiene:

$$t = \tan\theta = \tan 45° = 1$$

La velocidad y aceleración angular de la barra son:

$$\dot{\theta}\,(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}} \qquad\qquad \ddot{\theta}\,(t) = \frac{-2\,t}{(1+t^2)^2} = \frac{-1}{2}\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}^2}$$

Sugerido

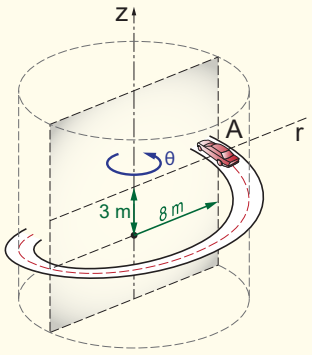
Resuelva el problema anterior usando el procedimiento alternativo que consiste en escribir $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ en términos de $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, para luego convertir la velocidad $\dot{\mathbf{u}} = 2\,\hat{\mathbf{j}}$ y la aceleración $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ en coordenadas polares[a].

[a] Esto evita completamente hacer uso de r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, y $\ddot{\theta}$; lo que era nuestro interés en el problema anterior.

Ejemplo

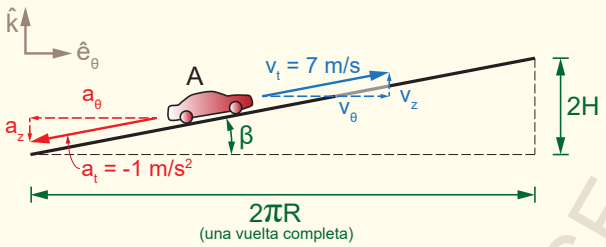
Basado en Meriam 9th ed, Problem 2/142

Un automóvil se encuentra subiendo por una rampa de estacionamiento helicoidal cuyo radio es $R = 8\,\text{m}$, subiendo $H = 3\,\text{m}$ por cada medio giro. En la posición indicada por A, el automóvil registra una rapidez de $7\ {}^{\text{m}}/_{\text{s}}$ al mismo tiempo que desacelera a $1\ {}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$. Determine las componentes de la aceleración asociadas a $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, y $\hat{\mathbf{k}}$, de la aceleración del automóvil.



La velocidad y aceleración tienen componentes en $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ y $\hat{\mathbf{k}}$. Si se "desenrolla" un giro de la hélice: en una vuelta completa el automóvil se eleva $2H$ y horizontalmente se desplaza $2\pi R$, como muestra la Figura a continuación.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard



Es decir, el ángulo de *paso* de la hélice β es:

$$\beta = \operatorname{atan}\left(\frac{2\,H}{2\,\pi R}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{6}{50{,}265}\right) = 0{,}1188\,\text{rad} \qquad [6{,}79\,\text{deg}]$$

La velocidad y aceleración en la dirección z cuando el automóvil se encuentra en el punto A son:

$$(v_z)_A = (v_t)_A \,\sin\beta = (7)\,(0{,}1185) = 0{,}8430\,\text{m/s}$$
$$(a_z)_A = (a_t)_A \,\sin\beta = (-1)\,(0{,}1185) = -0{,}1204\,\text{m/s}^2$$

La velocidad y aceleración en la dirección θ cuando el automóvil se encuentra en el punto A son:

$$(v_\theta)_A = (v_t)_A \,\cos\beta = (7)\,(0{,}9930) = 6{,}9597\,\text{m/s} \quad \rightarrow \quad \dot\theta_A = \frac{(v_\theta)_A}{R} = 0{,}8688\,\text{rad/s}$$
$$(a_\theta)_A = (a_t)_A \,\cos\beta = (-1)\,(0{,}9930) = -0{,}9930\,\text{m/s}^2 \quad \rightarrow \quad \ddot\theta_A = \frac{(a_\theta)_A}{R} = -0{,}1241\,\text{rad/s}^2$$

Finalmente, tenemos los siguientes datos en el punto A:

$r = R = 8\,\text{m}$	$\theta = ?$	$z = ?$
$\dot r = 0$	$\dot\theta = 0{,}8688\,\text{rad/s}$	$\dot z = 0{,}8430\,\text{m/s}$
$\ddot r = 0$	$\ddot\theta = -0{,}1241\,\text{rad/s}^2$	$\ddot z = -0{,}1204\,\text{m/s}^2$

Es importante tener en cuenta que estos valores no son constantes en la trayectoria del automóvil (para todo instante t), sino que corresponden a los valores en el punto A.

Finalmente, la aceleración del automóvil es:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}} &= \left(\ddot r - r\,\dot\theta^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot\theta + 2\,\dot r\,\dot\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ddot z\,\hat{\mathbf{k}} \\ &= \left[0 - (8)\,(0{,}8688)^2\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[(8)\,(-0{,}1241) + (2)\,(0)\,(0{,}8688)\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta + (-0{,}1204)\,\hat{\mathbf{k}} \\ &= -6{,}0390\,\hat{\mathbf{e}}_r - 0{,}9939\,\hat{\mathbf{e}}_\theta - 0{,}1204\,\hat{\mathbf{k}} \quad \text{m/s}^2\end{aligned}$$

Nota: En un movimiento helicoidal, a diferencia de un movimiento circular, se tiene que $v_t \neq v_\theta$ pese a tener $r = R =$ constante. Por la misma razón $a_t \neq a_\theta$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

2.5. Movimiento relativo

En ciertos casos es conveniente describir el movimiento de una partícula con respecto a un sistema de referencia móvil, lo que es llamado *movimiento relativo*. Lo opuesto, que hemos hecho hasta ahora, se llama *movimiento absoluto* y usa un sistema de referencia fijo.

En la Figura 2.7, el origen B del sistema móvil es definido por un vector $\mathbf{u}_B$ medido desde un

sistema de referencia fijo (sistema inercial primario). Notar que asumimos que el segundo sistema no rota, sólo se traslada (usa los mismos vectores base unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$).

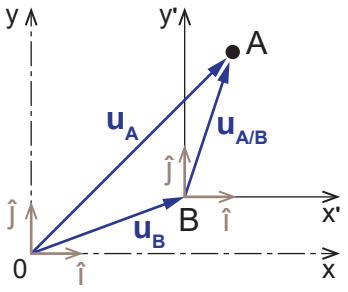


Figura 2.7: Posición de una partícula A respecto a: **(1)** un sistema de referencia absoluto; **(2)** un sistema de referencia móvil cuyo origen está en B.

Llamando a:

- La posición de la partícula A medida desde el origen en B: $\mathbf{u}_{A/B}$
- La posición absoluta del origen en B: $\mathbf{u}_B$

La posición absoluta de la partícula A se puede entonces expresar como: $\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_B + \mathbf{u}_{A/B}$. Tomando derivadas respecto al tiempo, se obtienen relaciones adicionales para la velocidad y aceleración en términos relativos:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{u}_A &= \mathbf{u}_B + \mathbf{u}_{A/B} && (2.14a)\\ \dot{\mathbf{u}}_A &= \dot{\mathbf{u}}_B + \dot{\mathbf{u}}_{A/B} && (2.14b)\\ \ddot{\mathbf{u}}_A &= \ddot{\mathbf{u}}_B + \ddot{\mathbf{u}}_{A/B} && (2.14c) \end{aligned}}$$

En realidad, cualquier punto podría ser usado como el origen del sistema de referencia móvil. Es decir, podríamos poner un nuevo sistema en el punto B, y usarlo para describir el movimiento del origen del sistema en móvil en A (ahora nuestra partícula de interés):

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_A + \mathbf{u}_{B/A}$$

Reemplazando $\mathbf{u}_A$ de la Ecuación (2.14a) en esta, se obtiene:

$$\mathbf{u}_B = \left[\mathbf{u}_B + \mathbf{u}_{A/B}\right] + \mathbf{u}_{B/A}$$

Simplificando, y luego tomando derivadas respecto al tiempo, se llega a:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{u}_{B/A} &= -\mathbf{u}_{A/B} && (2.15a)\\ \dot{\mathbf{u}}_{B/A} &= -\dot{\mathbf{u}}_{A/B} && (2.15b)\\ \ddot{\mathbf{u}}_{B/A} &= -\ddot{\mathbf{u}}_{A/B} && (2.15c) \end{aligned}}$$

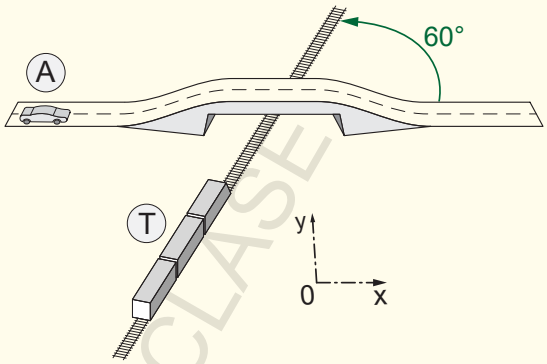
Una consecuencia importante de la Ecuación (2.14c) es que la aceleración de una partícula es la misma si se mide en un sistema con velocidad constante $\ddot{\mathbf{u}}_B = \mathbf{0}$ o en un sistema fijo, i.e., $\ddot{\mathbf{u}}_A = \ddot{\mathbf{u}}_{A/B}$.

Es decir, cualquier sistema que se mueve con velocidad constante es un *sistema inercial* y sirve para determinar aceleraciones.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

Un automóvil se aproxima a un paso sobrenivel ferroviario. El auto y el tren se mueven a velocidad constante de $100\,\text{km/h}$ y $72\,\text{km/h}$, respectivamente. Determine la velocidad y rapidez del tren desde la perspectiva del automóvil.



Las velocidades del automóvil y tren medidas desde el sistema de referencia absoluto son:

$$\dot{\mathbf{u}}_a = 100\,\hat{\mathbf{i}}\ \text{km/h}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_t &= 72\cos(60°)\,\hat{\mathbf{i}} + 72\sin(60°)\,\hat{\mathbf{j}} \\ &= 36\,\hat{\mathbf{i}} + 62{,}3538\,\hat{\mathbf{j}}\ \text{km/h}\end{aligned}$$

Luego, utilizando las ecuaciones de movimiento relativo despejamos el vector de interés $\dot{\mathbf{u}}_{t/a}$. Es decir:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t/a} = \dot{\mathbf{u}}_t - \dot{\mathbf{u}}_a = \begin{Bmatrix}36\\62{,}3538\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}100\\0\end{Bmatrix} = -64\,\hat{\mathbf{i}} + 62{,}3538\,\hat{\mathbf{j}}\ \text{km/h}$$

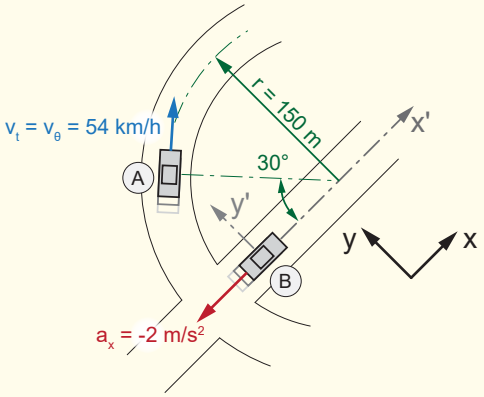
La magnitud de la velocidad (rapidez) es:

$$v_{t/a} = \left|\dot{\mathbf{u}}_{t/a}\right| = \sqrt{(-64)^2 + (62{,}3538)^2} = \sqrt{7984} = 89{,}3532\,\text{km/h}$$

Ejemplo

Basado en Meriam 7th ed, Problem 2/184

El automóvil A avanza por la rotonda con rapidez constante e igual a $54\,\text{km/h}$. El automóvil B está desacelerando a $2\,\text{m/s}^2$ Determine la magnitud de la aceleración que tiene el automóvil A para un observador en el automóvil B.



Para simplificar los cálculos, se orienta el eje x' según la trayectoria del automóvil B. Con ello, la aceleración de dicho automóvil es:

$$\ddot{\mathbf{u}}_\text{B} = -2\,\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}^2$$

El automóvil A, sufre cambios en su vector de velocidad pese a estar moviéndose con rapidez constante; está acelerando ya que la velocidad cambia de dirección. Usando coordenadas polares, la aceleración que experimenta es clara:

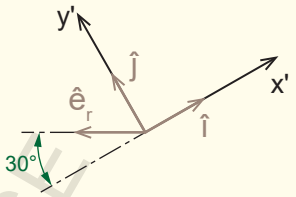
$$\ddot{\mathbf{u}}_\text{A} = \left(\underbrace{\ddot{r}}_{=0} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(\underbrace{r\,\ddot{\theta}}_{=0} + \underbrace{2\,\dot{r}\,\dot{\theta}}_{=0}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta = -r\,\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_r = -r\left(\frac{v_t}{r}\right)^2\hat{\mathbf{e}}_r = -\frac{v_\theta^2}{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

Aquí se hizo el reemplazo $v_t = v_\theta$ debido a que el movimiento es circular. El único término de la aceleración es la *aceleración centrípeta*, cuyo signo negativo indica que apunta hacia el centro de la rotonda. Por otro lado, se tiene que $54\,\text{km/h} = 15\,\text{m/s}$, y con ello:

$$\ddot{\mathbf{u}}_\text{A} = -\frac{v_\theta^2}{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r = -\frac{15^2}{150}\,\hat{\mathbf{e}}_r = -1{,}5\,\hat{\mathbf{e}}_r\ \text{m/s}^2$$

BORRADOR PUNTES DE CLASE Tomás Zegard

La aceleración del automóvil B está en coordenadas cartesianas, mientras que la aceleración del automóvil A está en coordenadas polares: no podemos comparar ambas si están en sistemas diferentes. Llevaremos la aceleración del automóvil B (en coordenadas polares) a coordenadas cartesianas escribiendo los vectores base polares en términos de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$. En realidad, sólo necesitamos $\hat{\mathbf{e}}_r$ en este problema específico y sabemos que $\theta = 30°$ medidos desde el eje "$-x$" en sentido del reloj (equivalente a $\theta_x = 150°$), como muestra la Figura al costado:



$$\hat{\mathbf{e}}_r = -\cos(30°)\,\hat{\mathbf{i}} + \sin(30°)\,\hat{\mathbf{j}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}}$$

Con ello, la aceleración en coordenadas cartesianas es:

$$\ddot{\mathbf{u}}_A = -1{,}5\,\hat{\mathbf{e}}_r = (-1{,}5)\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}}\right] = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{4}\hat{\mathbf{j}}\ \ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$$

Usando las ecuaciones de movimiento relativo, tenemos que:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{A/B} = \ddot{\mathbf{u}}_A - \ddot{\mathbf{u}}_B = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{4}\hat{\mathbf{j}} - \left(-2\,\hat{\mathbf{i}}\right) = \left(\frac{8+3\sqrt{3}}{4}\right)\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{4}\hat{\mathbf{j}}\ \ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$$

Finalmente, la magnitud es:

$$a_{A/B} = \left|\ddot{\mathbf{u}}_{A/B}\right| = \sqrt{\left(\frac{8+3\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{-3}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{25+12\sqrt{3}} = 3{,}3832\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$$

Sugerido

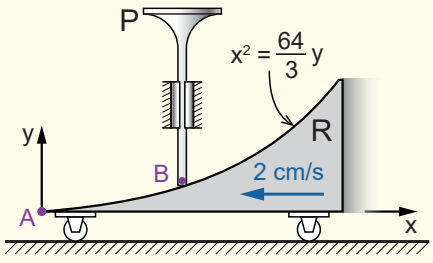
Vuelva a resolver el problema anterior, pero sin inclinar los ejes x e y.

La aceleración $\ddot{\mathbf{u}}_A$ en coordenadas polares no cambia, pero ahora $\hat{\mathbf{e}}_r = -1\,\hat{\mathbf{i}}$
En este caso se tiene que $\ddot{\mathbf{u}}_B = (-2)\left[\cos(30°)\,\hat{\mathbf{i}} + \sin(30°)\,\hat{\mathbf{j}}\right] = -\sqrt{3}\,\hat{\mathbf{i}} - 1\,\hat{\mathbf{j}}\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$

Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Example 1.10

La rampa R tiene una curva definida por una parábola $x^2 = \frac{64}{3}y$. La rampa se mueve a la izquierda con velocidad constante $v_R = -2\,{}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{s}}$. Su punta B se apoya sobre la rampa de modo que un movimiento de la rampa fuerza al pistón a subir. El pistón P, comienza con su punta B en contacto con el inicio de la rampa en A. Determine la aceleración del pistón.

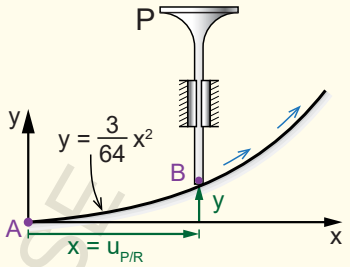


La rampa se mueve hacia la izquierda con respecto al suelo que un sistema de referencia fijo. El pistón también está fijo en el sentido $\hat{\mathbf{i}}$, y la rampa se mueve bajo el mismo. Usando movimiento relativo se puede tomar la rampa como un sistema de referencia. La velocidad con que se "mueve" el pistón para un observador en la rampa es:

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

$$\dot{x} = (\dot{u}_x)_{P/R} = (\dot{u}_x)_P - (\dot{u}_x)_R = 0 - (-2)\,\hat{\mathbf{i}} = 2\,\hat{\mathbf{i}}\ \text{cm/s}$$

Es decir, el pistón se "mueve" a la derecha respecto a la rampa y producto de ello "sube" por la parábola, como muestra la Figura al costado. Como la rampa no se mueve verticalmente, una velocidad en el eje $\hat{\mathbf{j}}$ del pistón es igual a su velocidad absoluta:



$$\dot{y} = (\dot{u}_y)_{P/R} = (\dot{u}_y)_P - (\dot{u}_y)_R = (\dot{u}_y)_P$$

No tenemos información directa de cómo sube el pistón, pero sí de cómo sube respecto a un movimiento horizontal. Usando la regla de la cadena:

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{3}{64}x^2\right](2) = \frac{3}{16}x\ \text{cm/s}$$

Podemos utilizar nuevamente la regla de la cadena para obtener la segunda derivada (aceleración):

$$\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}x}\,\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{3}{16}x\right](2) = \frac{3}{8}\ \text{cm/s}^2$$

Es decir, el pistón se eleva con aceleración $a_y = 0{,}375\ \text{cm/s}^2$, y no tiene aceleración horizontal asociada.

2.6. Movimiento en coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas son idóneas para movimientos que se describen por 2 ángulos θ (azimutal), φ_{ele} (elevación), y una distancia r. Este sistema coordenado es conveniente para modelar movimientos de tipo esféricos y elipsoidales; como por ejemplo radares, telescopios, órbitas satelitales, y grúas telescópicas.

El "ángulo de elevación" se eleva desde el plano x–y y tiene un rango $\varphi_{\text{ele}} = -\pi/2 \ldots \pi/2$, como muestra la Figura 2.8(a). Los no-ingenieros prefieren utilizar el "ángulo polar" en vez, el cual se mide desde el polo superior y tiene un rango $\varphi_{\text{pol}} = 0 \ldots \pi$, como muestra la Figura 2.8(b). Ambos ángulos están relacionados y su conversión es sencilla, ya que:

$$\varphi_{\text{pol}} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{ele}}$$

> La convención aquí presentada sigue la notación de los textos estadounidenses. No obstante, es común encontrar convenciones donde se invierte la nomenclatura de los ángulos θ y φ; i.e. se llama θ al ángulo de elevación y φ al ángulo azimutal. La nomenclatura invertida es particularmente popular en textos europeos.

> Las diferentes convenciones existentes para coordenadas esféricas hicieron que este contenido se dejase de evaluar en el curso posterior al 2018. No obstante, este contenido podría ser de utilidad para ingenieros en robótica y aeroespaciales. Debido a ello, se ha decidido reintegrar la sección a los apuntes de clase para consulta. En el futuro, y con claridad respecto a las diferentes convenciones, este contenido podría retornal al canon de contenidos estudiados y evaluados.

2.6.1. Convención A: ángulo de elevación

La cinemática esférica comienza por definir los vectores base acordes a la convención adoptada.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

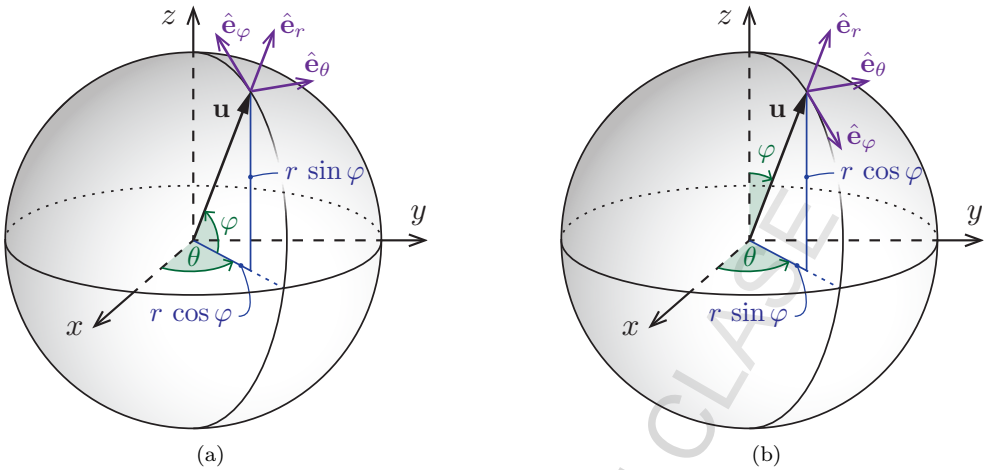


Figura 2.8: Posición y vectores base de un sistema en coordenadas esféricas: **(a)** definición de vectores usando φ como el ángulo de elevación; y **(b)** definición de vectores usando φ como el ángulo polar.

- El director $\hat{\mathbf{e}}_r$ es radial. La proyección en $\hat{\mathbf{k}}$ es $r \sin\varphi$; mientras que la proyección en el plano x–y es $\ell = r\cos\varphi$, donde ℓ debe ser proyectado a $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ según el ángulo θ.

- El director $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{e}}_r$, pero al mismo tiempo no tiene componentes en $\hat{\mathbf{k}}$: se obtiene como el producto cruz de ambos. Debido a que $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{k}}$ no forman un ángulo recto, el vector resultante debe ser normalizado. El signo (o bien el orden del producto cruz) se puede deducir gráficamente para obtener un $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ que apunta en la dirección en que θ crece.

- El vector $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ se obtiene del producto cruz de los vectores $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$. No es necesario normalizar, ya que estos son perpendiculares entre sí y tienen norma unitaria.

Es decir, la representación cartesiana de los vectores directores es:

Con $\varphi =$ el ángulo de elevación:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos\theta\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}} + \sin\varphi\,\hat{\mathbf{k}} \tag{2.16a}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_r}{\left|\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_r\right|} = \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_r}{\cos\varphi} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}} \tag{2.16b}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_e \times \hat{\mathbf{e}}_\theta = -\cos\theta\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{i}} - \sin\theta\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{k}} \tag{2.16c}$$

Luego, para obtener las derivadas temporales de los vectores base, primero son necesarias las derivadas parciales respecto a r, θ, y φ:

- Derivadas respecto a r (no hay dependencia con la distancia al origen, i.e. el radio):

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} = 0$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial r} = 0$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial r} = 0$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

- Derivadas respecto θ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} &= -\sin\theta\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}} = \cos\varphi\left(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right) = \cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \\
\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} &= -\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}} = -\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_r + \sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\
\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \theta} &= \sin\theta\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{i}} - \cos\theta\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{j}} = -\sin\varphi\left(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right) = -\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta
\end{aligned}$$

- Derivadas respecto a φ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \varphi} &= -\cos\theta\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{i}} - \sin\theta\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \\
\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \varphi} &= 0 \\
\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\cos\theta\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{i}} - \sin\theta\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}} - \sin\varphi\,\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{e}}_r
\end{aligned}$$

Con ello, las derivadas temporales de los vectores base son:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r}\,\dot{r} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta}\,\dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \varphi}\,\dot{\varphi} = \dot{\theta}\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\
\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial r}\,\dot{r} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta}\,\dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \varphi}\,\dot{\varphi} = -\dot{\theta}\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_r + \dot{\theta}\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\
\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial r}\,\dot{r} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \theta}\,\dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \varphi}\,\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_r - \dot{\theta}\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta
\end{aligned}$$

Tenemos todos los ingredientes necesarios para derivar la posición, la velocidad, y la aceleración de una partícula usando coordenadas esféricas. La posición es:

$$\mathbf{u} = r\,\hat{\mathbf{e}}_e$$

La velocidad resulta ser:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

La aceleración es:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{u}}}{\mathrm{d}t} &= \ddot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta - r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\cos\varphi\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}t} + \dots \\
&\quad + \dot{r}\,\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi + r\,\ddot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi + r\,\dot{\varphi}\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\mathrm{d}t} \\
&= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 - r\,\dot{\theta}^2\,\cos^2\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\cos\varphi + r\,\ddot{\theta}\,\cos\varphi - 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dots \\
&\quad + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} + r\,\dot{\theta}^2\,\sin\varphi\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi
\end{aligned}$$

2.6.2. Convención B: ángulo polar

La cinemática esférica comienza por definir los vectores base acordes a la convención adoptada.

- El director $\hat{\mathbf{e}}_r$ es radial. La proyección en $\hat{\mathbf{k}}$ es $r\,\cos\varphi$; mientras que la proyección en el plano x–y es $\ell = r\,\sin\varphi$, donde ℓ debe ser proyectado a $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ según el ángulo θ.
- El director $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{e}}_r$, pero al mismo tiempo no tiene componentes en $\hat{\mathbf{k}}$: se obtiene como el producto cruz de ambos. Debido a que $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{k}}$ no forman un ángulo recto, el vector resultante debe ser normalizado. El signo (o bien el orden del producto cruz) se puede deducir gráficamente para obtener un $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ que apunta en la dirección en que θ crece.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

- El vector $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ se obtiene del producto cruz de los vectores $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ y $\hat{\mathbf{e}}_r$, lo que significa que esta convención sigue la regla de la mano izquierda. No es necesario normalizar, ya que estos son perpendiculares entre sí y tienen norma unitaria.

Con el ordenamiento de ejes $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, y $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, entonces la base utilizando el ángulo polar sigue la "regla de la mano **izquierda**". Esto significa que $\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta = -\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, lo que es bastante inusual. Debido a ello, algunos textos cambian el orden de los vectores base a $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$.

Es decir, la representación cartesiana de los vectores directores es:

Con $\varphi =$ el ángulo polar:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos\theta\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\varphi\,\hat{\mathbf{k}} \tag{2.17a}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_r}{\left|\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_r\right|} = \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_r}{\sin\varphi} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}} \tag{2.17b}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta \times \hat{\mathbf{e}}_r = \cos\theta\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}} - \sin\varphi\,\hat{\mathbf{k}} \tag{2.17c}$$

Luego, para obtener las derivadas temporales de los vectores base, primero son necesarias las derivadas parciales respecto a r, θ, y φ:

- Derivadas respecto a r (no hay dependencia con la distancia al origen, i.e. el radio):

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} = 0$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial r} = 0$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial r} = 0$$

- Derivadas respecto θ:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = -\sin\theta\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{j}} = \sin\varphi\left(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right) = \sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}} = -\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_r - \cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \theta} = -\sin\theta\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}} = \cos\varphi\left(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}\right) = \cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

- Derivadas respecto a φ:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{j}} - \sin\varphi\,\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \varphi} = 0$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos\theta\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{i}} - \sin\theta\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{j}} - \cos\varphi\,\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{e}}_r$$

Con ello, las derivadas temporales de los vectores base son:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r}\,\dot{r} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta}\,\dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \varphi}\,\dot{\varphi} = \dot{\theta}\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$
$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial r}\,\dot{r} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta}\,\dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \varphi}\,\dot{\varphi} = -\dot{\theta}\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_r - \dot{\theta}\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$
$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial r}\,\dot{r} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \theta}\,\dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \varphi}\,\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \dot{\theta}\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Tenemos todos los ingredientes necesarios para derivar la posición, la velocidad, y la aceleración de una partícula usando coordenadas esféricas. La posición es:

$$\mathbf{u} = r\,\hat{\mathbf{e}}_e$$

La velocidad es:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

La aceleración es:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{u}}}{\mathrm{d}t} &= \ddot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_r}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\sin\varphi\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\theta}{\mathrm{d}t} + \dots \\ &\quad + \dot{r}\,\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi + r\,\ddot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi + r\,\dot{\varphi}\,\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{\mathrm{d}t} \\ &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 - r\,\dot{\theta}^2\,\sin^2\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\sin\varphi + r\,\ddot{\theta}\,\sin\varphi + 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dots \\ &\quad + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} - r\,\dot{\theta}^2\,\sin\varphi\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi\end{aligned}$$

2.6.3. Resumen de movimiento en coordenadas esfricas

Las ecuaciones de cinemática en coordenadas esféricas utilizando el ángulo de elevación φ_{ele} son:

Con φ = el ángulo de elevación:

$$\mathbf{u} = r\,\hat{\mathbf{e}}_e \tag{2.18a}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{2.18b}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}} = &\left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 - r\,\dot{\theta}^2\,\cos^2\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \dots \\ &+ \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\cos\varphi + r\,\ddot{\theta}\,\cos\varphi - 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dots \\ &+ \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} + r\,\dot{\theta}^2\,\sin\varphi\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi\end{aligned} \tag{2.18c}$$

Las ecuaciones de cinemática en coordenadas esféricas utilizando el ángulo polar φ_{pol} son:

Con φ = el ángulo polar:

$$\mathbf{u} = r\,\hat{\mathbf{e}}_e \tag{2.19a}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{2.19b}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}} = &\left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 - r\,\dot{\theta}^2\,\sin^2\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \dots \\ &+ \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\sin\varphi + r\,\ddot{\theta}\,\sin\varphi + 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dots \\ &+ \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} - r\,\dot{\theta}^2\,\sin\varphi\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi\end{aligned} \tag{2.19c}$$

Dependiendo de la convención de ángulo φ que se utilice, **los vectores base unitarios tienen diferente definición**. En caso de querer transformar resultados de coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas, se debe utilizar la definición correspondiente de los vectores $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ y $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$.

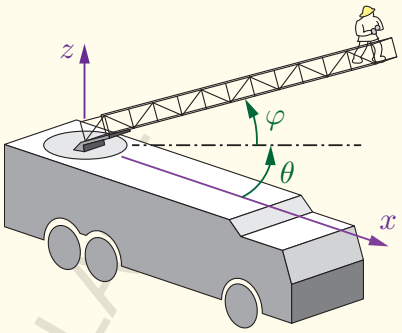
BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

Meriam 8th ed, Problem 2/177

Un camión de bomberos se encuentra desplegando su escalera en respuesta a un incendio. La torreta de la escalera gira con velocidad $\dot{\theta} = 10\,{}^{\text{deg}}/_{s}$, mientras que la escalera se levanta con $\dot{\varphi} = 7\,{}^{\text{deg}}/_{s}$ y se extiende a $\dot{r} = 0{,}5\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}}$; movimientos todos a rapidez constante.

En cierto instante, la escalera (telescópica) se ha extendido hasta $r = 15\,\text{m}$ y tiene $\varphi = 30°$. Determine las magnitudes de velocidad y aceleración en el extremo de la escalera en ese instante.



La convención de coordenadas polares queda determinada con el ángulo φ, el cual en este problema específico corresponde al ángulo de elevación. Se tiene que:

$$\begin{array}{lll} r = 15\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}} & \theta = ? & \varphi = 30° = \dfrac{\pi}{6}\,\text{rad} \\ \dot{r} = 0{,}5\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}} & \dot{\theta} = 10\,{}^{\text{deg}}/_{s} = 0{,}1745\,{}^{\text{rad}}/_{s} & \dot{\varphi} = 7\,{}^{\text{deg}}/_{s} = 0{,}1222\,{}^{\text{rad}}/_{s} \\ \ddot{r} = 0 & \ddot{\theta} = 0 & \dot{\varphi} = 0 \end{array}$$

Con ello, la velocidad en el extremo de la escalera para dicho instante resulta ser:

$$\begin{aligned} & \dot{\mathbf{u}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ & \dot{\mathbf{u}} = 0{,}5\,\hat{\mathbf{e}}_r + 2{,}2672\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + 1{,}8326\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \quad [{}^{\text{m}}/_{\text{s}}] \\ \rightarrow \quad & v = |\dot{\mathbf{u}}| = \sqrt{(0{,}5)^2 + (2{,}2672)^2 + (1{,}8326)^2} = \sqrt{8{,}7488} = 2{,}9578\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}} \end{aligned}$$

, mientras que la aceleración es:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}} = & \left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 - r\,\dot{\theta}^2\,\cos^2\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\cos\varphi + r\,\ddot{\theta}\,\cos\varphi - 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ldots \\ & + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} + r\,\dot{\theta}^2\,\sin\varphi\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{aligned}$$

Es decir, las componentes del vector son:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_r &= 0 - (15)\,(0{,}1222)^2 - (15)\,(0{,}1745)^2\,(0{,}8660)^2 = -0{,}5666\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2} \\ \ddot{\mathbf{u}}_\theta &= (2)\,(0{,}5)\,(0{,}1745)\,(0{,}8660) + (15)\,(0)\,(0{,}8660) - (2)\,(15)\,(0{,}1745)\,(0{,}1222)\,(0{,}5) = -0{,}1687\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2} \\ \ddot{\mathbf{u}}_\varphi &= (2)\,(0{,}5)\,(0{,}1222) + (15)\,(0) + (15)\,(0{,}1745)^2\,(0{,}5)\,(0{,}8660) = 0{,}32\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2} \end{aligned}$$

, cuya magnitud es:

$$a = |\ddot{\mathbf{u}}| = \sqrt{(-0{,}5666)^2 + (-0{,}1687)^2 + (0{,}32)^2} = \sqrt{0{,}4519} = 0{,}6722\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Capítulo 3

Cinética

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

3.1. 2$^{\text{da}}$ ley de Newton

La 2$^{\text{da}}$ ley de Newton dice que una partícula acelera producto de fuerzas no-balanceadas (no en *equilibrio*). Cinética es la rama de la dinámica que estudia la relación entre los cambios en el movimiento de partículas y las fuerzas que lo causan.

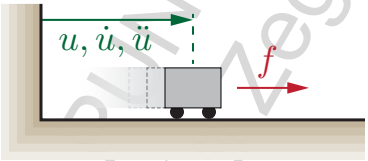


Figura 3.1: Carro de masa m que experimenta una aceleración $a = \ddot{u}$ producto de una fuerza externa f.

Si a un cuerpo le aplicamos una fuerza f_1 (una dimensión, movimiento rectilíneo) y medimos la aceleración resultante a_1; veremos que la razón entre estás cantidades es la misma si aplicamos una fuerza f_2 obteniendo a_2. Es decir, en el experimento que ilustra la Figura 3.1 se cumple que:

$$\frac{f_1}{a_1} = \frac{f_2}{a_2} = \frac{f_3}{a_3} = \ldots = \frac{f}{a} = C \quad \text{(constante)}$$

La constante C es una propiedad invariante del cuerpo, y es la "resistencia del objeto a cambiar su velocidad" y que llamamos *inercia*. La inercia (traslacional) de un objeto es proporcional a su masa:

$$\frac{f}{a} = C = \kappa\, m$$

, donde κ es una constante que toma en cuenta las unidades. Es común tomar $\kappa = 1$, y con ello $^{\text{kg}\cdot\text{m}}/_{\text{s}^2}$ lo llamamos Newton (N). Como la fuerza y la aceleración son vectores, entonces:

$$\mathbf{f} = m\,\mathbf{a} = m\,\ddot{\mathbf{u}}$$

En realidad $\mathbf{f}$, también llamada *fuerza neta*, es el resultado de varias fuerzas $\mathbf{f}_i$:

$$\boxed{\sum_i \mathbf{f}_i = \mathbf{f} = m\,\ddot{\mathbf{u}}} \tag{3.1}$$

El resultado de la Ecuación (3.1) es cierto para cualquier sistema de referencia que no rota y que se mueve a velocidad constante (ver Sección 2.5). En esos casos, la medida que se obtiene para la aceleración es la misma. Es decir, para que se cumplan las leyes de Newton, específicamente $\mathbf{f} = m\,\mathbf{a}$, se requiere estar en un *sistema inercial*.

3.2. Fuerzas típicas

3.2.1. Fuerza gravitacional

Newton postuló la ley de atracción mutua entre dos partículas cualquiera, como muestra la Figura 3.2, resulta ser:

$$f = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2} \tag{3.2}$$

, donde $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,{}^{\mathrm{m}^3}/_{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$ es la constante de gravitación universal.

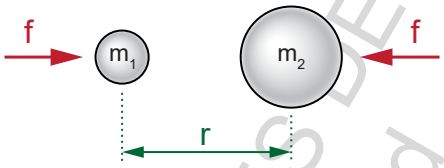


Figura 3.2: Fuerza de atracción mutua entre dos partículas (fuerza gravitacional).

La masa y radio promedio de la tierra son:

$$m_e = 5{,}9722 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \qquad\qquad r_e = 6{,}371 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$$

La fuerza con que la tierra atrae a un objeto de masa m que se encuentra en su superificie es:

$$W = m\,g = m\left(G\,\frac{m_e}{r_e^2}\right) = (m)\,(9{,}8199\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2})$$

Es decir:

$$g = 9{,}8199\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2} \qquad \text{(se suele usar } g = 9{,}81\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}\text{)}$$

3.2.2. Fuerzas normal y de fricción (seca)

La manera más simplificada para modelas la fricción (o roce) es la *teoría de fricción seca de Coulomb*. Si dos cuerpos (relativamente rígidos) están en contacto, con dicho contacto: **(1)** puntual, **(2)** relativamente pequeño, o **(3)** finito pero de superficie plana; se puede definir un (único) plano tangente a ambos cuerpos en el punto de contacto, como muestra la Figura 3.3(a).

La 3$^{\mathrm{ra}}$ ley de Newton nos dice que cuando dos cuerpos interactúan, *las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos que interactúan son iguales en magnitud, de igual dirección, pero sentido opuesto*. Separando ambos cuerpos (imaginariamente) y haciendo un *diagrama de cuerpo libre*[1] (DCL) de cada uno, podemos identificar las fuerzas que actúan en cada cuerpo por separado, como muestra la Figura 3.3(b). Las fuerzas son:

a) Una fuerza perpendicular al plano de contacto N llamada *fuerza normal (de contacto)*.

b) Una fuerza de fricción F_r en el plano mismo de contacto.

[1] Los diagramas de cuerpo libre se estudiarán en detalle más adelante.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

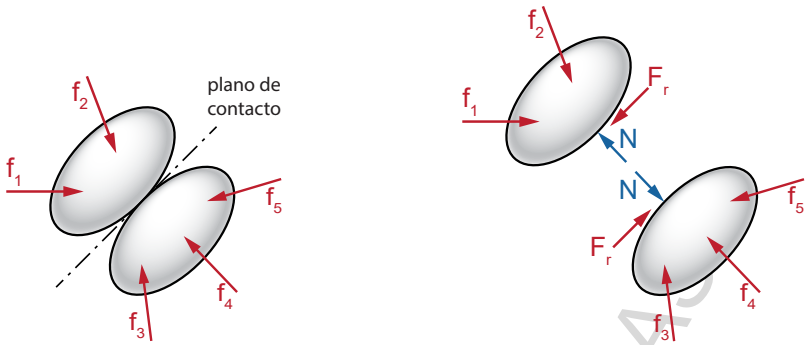


Figura 3.3: Fuerzas entre dos partículas que hacen contacto: **(a)** definición del *plano de contacto*; y **(b)** diagrama de cuerpo libre de las partículas, donde se muestra las fuerzas normal N y de roce F_r entre ambas en el plano de contacto.

> Los términos *fricción* y *roce* son sinónimos y se utilizan indistintamente en este texto.

Supongamos que se tiene un bloque de peso $W = m\,g$, sobre una superficie plana y horizontal. Al bloque se le aplica una fuerza externa, también horizontal P, la que aumenta crecientemente, como muestra la Figura 3.4(a). El diagrama de cuerpo libre del bloque se muestra en la Figura 3.4(b), donde se puede observar: **(a)** la fuerza normal que reacciona contra el peso W; y **(b)** la fuerza de roce F_r que se opone a la fuerza externa P. Se sabe que la aceleración en el eje $\hat{\mathbf{j}}$ es $a_y = 0$, debido a que el bloque no se mueve en dicho eje, y con ello:

$$\sum_i (f_x)_i\,\hat{\mathbf{i}} + \sum_i (f_y)_i\,\hat{\mathbf{j}} = m\,a_x\,\hat{\mathbf{i}} + \overbrace{m\,a_y}^{0}\,\hat{\mathbf{j}} \quad \xrightarrow{\text{sólo eje } y} \quad (-W+N)\,\hat{\mathbf{j}} = 0\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$N = W$$

Es decir, la magnitud de la fuerza normal N es igual al peso W en este caso particular. Supongamos además que tenemos algún sistema para medir la fuerza de roce a medida que aumentamos la fuerza externa P. La Figura 3.4(c) muestra una gráfica esquemática de P – f_r, donde es posible identificar 3 comportamientos:

Caso estático F_r aumenta con P a razón 1 : 1, resultando en una fuerza neta igual a cero lo que implica que $a_x = 0$. No hay movimiento relativo entre las dos superficies en contacto, y la fuerza de roce es menor que la máxima: $F_r \leq (F_r)_{\max} = \mu_s\,N$.

Caso límite Corresponde al caso en que la fricción estática está en su valor límite y máximo: $F_r = (F_r)_{\max} = \mu_s\,N$. La fuerza neta es igual a cero (no hay movimiento), pero un aumento en P romperá ese equilibrio.

Caso dinámico La fuerza horizontal no se balancea con la fuerza de roce. Es decir, el bloque acelera lo que produce un deslizamiento relativo entre las dos superficies en contacto. La fuerza de roce puede ser menor a la máxima y es igual a: $F_r = F_k = \mu_k\,N$.

El significado de las fuerzas y coeficientes de la discusión anterior es el siguiente:

$(F_r)_{\max} =$ fuerza de roce máxima posible entre ambas superficies;
$\mu_s =$ *coeficiente de roce estático*. Depende de factores como la rugosidad de las superficies, materiales, temperatura, y posiblemente otros;
$F_k =$ fuerza de roce dinámico (con deslizamiento relativo entre las dos superficies);
$\mu_k =$ *coeficiente de roce dinámico*.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

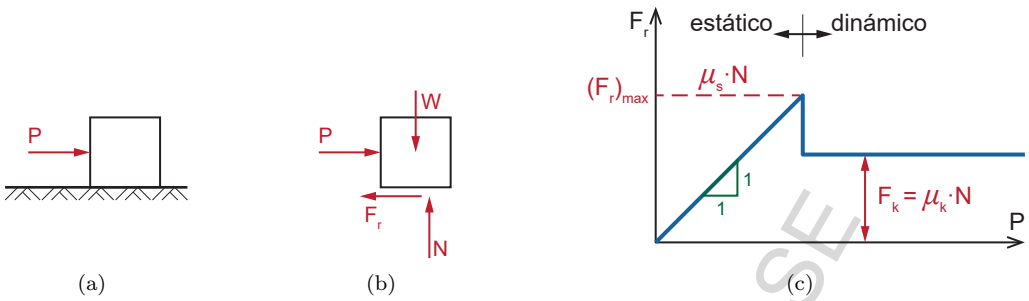


Figura 3.4: Evolución de la fuerza de roce con incrementos de una fuerza solicitante P: **(a)** bloque sometido a una fuerza externa P en una superficie plana con roce; **(b)** diagrama de cuerpo libre del bloque; y **(c)** diagrama $P - f_r$, donde se puede identificar el caso estático, límite, y dinámico.

La fuerza de roce se opone al movimiento; o bien al intento de movimiento (caso estático). Además, típicamente $\mu_k < \mu_s$, aunque no es inusual considerar que $\mu_k = \mu_s$ para simplificar los problemas.

> Es muy importante comprender que la fuerza de roce estático puede ser cualquier valor menor a $(F_r)_{\max}$. Un error frecuente es considerar que $F_r = \mu_s N$ siempre, cuando esto es sólo cierto en el caso límite.

> La fuerza normal no puede ser negativa. Una excepción son las montañas rusas, donde hay ruedas especiales que son capaces de "tirar" del carro hacia el riel (hacia abajo) en caso que se quiera elevar.

3.2.3. Fuerza elástica

La fuerza elástica está gobernada por la *ley de Hooke*. Es decir, la magnitud de la fuerza ejercida por un resorte es directamente proporcional a la deformación en el mismo:

$$\mathbf{f}_e = -k\,\mathbf{x} \tag{3.3}$$

, donde k = *rigidez* del resorte;
$\mathbf{x} = x\,\hat{\mathbf{x}}$ = deformación en el resorte medida desde la *posición de reposo* del mismo.

Es importante tener en cuenta que la deformación del resorte se mide desde su posición de reposo; posición en la cual el resorte tiene su *longitud natural*. La longitud natural es el largo del resorte cuando no hay fuerzas actuando sobre él. En la Figura 3.5, la deformación es $x = |\mathbf{x}| = |\ell - \ell_0|$, y la fuerza ejercida por el resorte es siempre en la dirección opuesta a $\mathbf{x}$. Es decir, si el resorte se estira la fuerza apuntará a contraer al resorte. Si el resorte se comprime la fuerza apuntará a estirar al resorte.

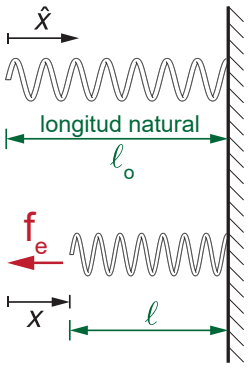


Figura 3.5: Resorte de longitud natural ℓ_0 que ejerce una fuerza f_e al ser comprimido a una nueva longitud ℓ.

En este caso asumimos que los resortes son "ideales". Un *resorte ideal* tiene masa despreciable y responde a una deformación de forma instantánea con la fuerza f_e.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

3.2.4. Tensiones en cuerdas, cables, y cadenas

Se tiene una barra de longitud ℓ_0 sin fuerzas externas aplicadas sobre ella, como muestra la Figura 3.6(a):

- Se aplica en los extremos de la barra fuerzas iguales pero contrarias que intentan "estirar" la barra. En este caso la barra tiene una fuerza de *tracción* f_t que viaja a través de ella.
- Se aplica en los extremos de la barra fuerzas iguales pero contrarias que intentan "comprimir" la barra. En este caso la barra tiene una fuerza de *compresión* f_c que viaja a través de ella.

La fuerza interna que viaja por el interior de la barra se denomina *tensión*, y puede ser se tracción o compresión.

Las cuerdas, cables, y cadenas, tienen la particularidad que sólo permiten una fuerza de tracción al interior de ellas. Como ejemplifica la Figura 3.6(b); una cuerda permite una fuerza de tracción, pero se pone flácida y permite el movimiento extremo cuando se aplica una fuerza de compresión.

Una cuerda lleva la misma tensión en toda su longitud si no hay roce (en las superficies de contacto o poleas) ni bifurcaciones en la misma, como ejemplifica el diagrama de la Figura 3.6(c). los sistemas de cuerdas y poleas se utilizan para "multiplicar" las fuerzas a costa de una reducción de velocidad. Este concepto se utiliza en: grúas, tecles, huinches, y otros.

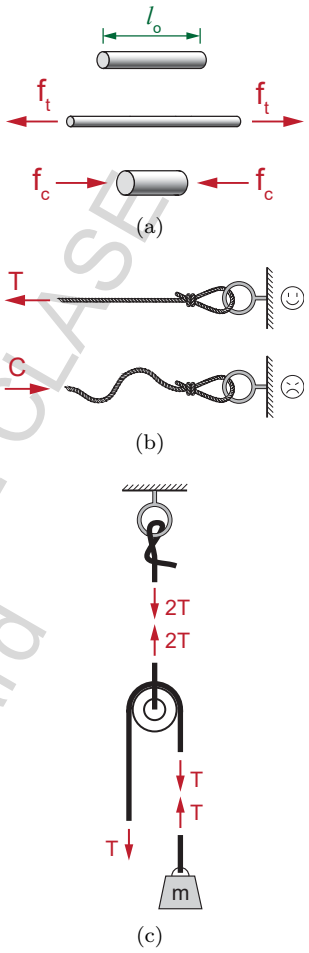


Figura 3.6: Tensión en cuerdas, cables, o cadenas: **(a)** barra sometida a fuerzas de tracción f_t y de compresión f_c; **(b)** una cuerda sólo puede llevar una fuerza de tracción; y **(c)** sistema de dos cuerdas en equilibrio, donde cada cuerda lleva una sola tensión.

Un sistema polea–cuerda se puede llamar también *máquina de Atwood*. El matemático George Atwood experimentó con un sistema así para verificar algunas de las ecuaciones de la dinámica en 1784.

Es fácil confundir los términos tensión y tracción (yo mismo lo hago todo el tiempo). La razón se debe a un choque fonético entre dos términos que significan cosas diferentes en inglés y en español. La siguiente tabla resume la terminología en inglés y español (notar el choque tensión–tension):

Descripción	Español	Inglés
Esfuerzo interno (fuerza/área)	Tensión / Esfuerzos	Stress
Fuerza que tiende a "estirar"	Tracción	Tension
Fuerza que tiende a "comprimir"	Compresión	Compression

Es decir, la tracción y la compresión producen una tensión en el elemento; pero de signo contrario.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

3.3. Diagrama de cuerpo libre (DCL)

Cuando se aplica la ley de Newton (Ecuación (3.1)) se deben considerar todas las fuerzas que actúan sobre la partícula o cuerpo. Sólo se pueden ignorar las fuerzas cuya magnitud es despreciable respecto a las otras. Para considerar todas las fuerzas actuando sobre una partícula o cuerpo se debe: **(1)** aislar del resto del sistema; y **(2)** reemplazar los demás cuerpos y componentes por sus respectivas fuerzas actuando sobre la partícula o cuerpo de interés. A este proceso llamaremos hacer el *diagrama de cuerpo libre* (DCL) de la partícula o cuerpo de interés.

El sistema de la Figura 3.7(a) muestra un bloque en un plano inclinado sin roce[2] con ángulo α sobre la horizontal. El bloque se encuentra sujeto por un resorte de rigidez k que lo mantiene inmóvil. La Figura 3.7(b) muestra el DCL del mismo bloque, donde:

1) Reemplazamos el suelo inclinado sin roce por una fuerza normal que ejerce sobre el bloque.

2) Reemplazamos el resorte por una fuerza elástica (de tracción) sobre el bloque.

3) Se incluye la fuerza gravitatoria actuando sobre el bloque.

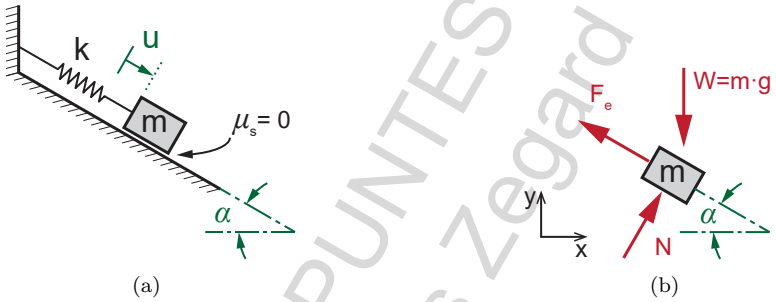


Figura 3.7: Ejemplo de elaboración de un diagrama de cuerpo libre: **(a)** bloque en un plano inclinado sin roce sujetado por un resorte en tracción; y **(b)** diagrama de cuerpo libre (DCL) del bloque.

Considerando todas las fuerzas sobre la partícula o cuerpo de interés, se pueden dar dos situaciones:

a) Si la fuerza neta es nula, que es lo mismo que decir $\sum \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$, entonces el objeto está en *reposo*: no acelera. Si la aceleración es nula, entonces de la ecuación diferencial sabemos que la velocidad necesariamente es:

$$\mathbf{v} = \text{constante} \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

b) Si hay fuerzas no balanceadas, entonces el objeto acelera de acuerdo a la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton:

$$\sum \mathbf{f}_i = m\,\ddot{\mathbf{u}} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \sum (\mathbf{f}_i)_x = m\,\ddot{u}_x \\ \sum (\mathbf{f}_i)_y = m\,\ddot{u}_y \\ \sum (\mathbf{f}_i)_z = m\,\ddot{u}_z \end{cases}$$

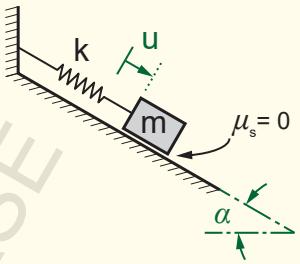
El DCL (o los múltiples DCLs) es el primer paso en la solución de problemas de cinética. Permite identificar todas las fuerzas que participan, definir el sistema de referencia, y elaborar un "plan de ataque" hacia la solución del problema.

[2] El roce siempre existe, pero en este caso es despreciable.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

Se tiene un bloque de masa m en un plano inclinado sin roce sujeto por un resorte de rigidez k, como muestra la Figura. Se pide:



a) Hacer el DCL del bloque.

b) Determinar la magnitud de la fuerza normal y elástica que actúan sobre el bloque si este se encuentra en reposo, i.e. $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

c) Determine la distancia x que está estirado el resorte en la condición de reposo.

El DCL del bloque se muestra en la Figura 3.7(b). Sabemos que si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, y con ello:

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{0} = \sum_i \mathbf{f}_i \qquad \longleftarrow \qquad \text{equilibrio}$$

$$\mathbf{0} = W \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + N \begin{Bmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix} + F_e \begin{Bmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix}$$

Se tienen dos ecuaciones y dos incógnitas (N y F_e), cuya solución es:

$$N = W\,\cos\alpha = mg\,\cos\alpha \qquad\qquad F_e = W\,\sin\alpha = mg\,\sin\alpha$$

Conociendo la fuerza que ejerce el resorte, podemos determinar cuánto se ha estirado el mismo. Notar que la fuerza F_e ya la habíamos considerado contraria a x en la Figura 3.7(b), por lo que el signo de la Ecuación (3.3) ya estaba incluido en el DCL. Finalmente, el resorte se encuentra estirado una distancia:

$$F_e = mg\,\sin\alpha = k\,u$$
$$u = \frac{mg}{k}\,\sin\alpha$$

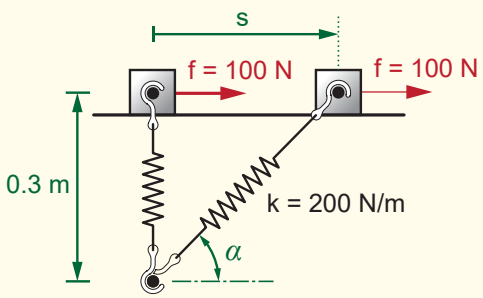
Sugerido

Pruebe resolviendo el problema anterior, pero con un sistema de ejes inclinado como el plano de deslizamiento. Las ecuaciones que se obtienen son diferentes, pero el resultado para N y F_e es el mismo: es sólo una rotación del sistema.

Ejemplo

Hibbeler 14$^{\text{th}}$ ed, Problem F13–5

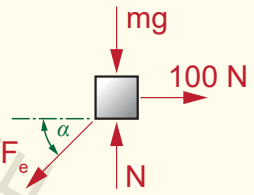
Un bloque de masa $m = 25\,\text{kg}$ está conectado a un resorte que está en reposo cuando $s = 0$, que es lo mismo que decir que $\ell_0 = 0{,}3\,\text{m}$. El resorte tiene rigidez $k = 200\,\text{N/m}$ y el roce entre el bloque y la superficie es despreciable. Sobre el bloque actúa una fuerza externa $\mathbf{f} = 100\,\hat{\mathbf{i}}\,\text{N}$. Determine la aceleración del bloque cuando $s = 0{,}4\,\text{m}$.



El primer paso consiste en hacer un DCL para el bloque, como muestra la Figura al costado. Adicionalmente, sabemos que en esa configuración el largo, estiramiento, y ángulo del resorte son:

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

$$\ell = 0{,}5\,\text{m}$$
$$u = |\ell - \ell_0| = 0{,}2\,\text{m}$$
$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad \sin\alpha = \frac{3}{5}$$



El bloque no acelera en $\hat{\mathbf{j}}$, lo que significa que $\ddot{u}_y = 0$. Postulando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton, se obtiene:

$$mg\begin{Bmatrix}0\\-1\end{Bmatrix} + N\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} + F_e\begin{Bmatrix}-\cos\alpha\\-\sin\alpha\end{Bmatrix} + 100\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix}\ddot{u}_x\\0\end{Bmatrix}$$

Sabemos además que: $F_e = k\,x = (200\,\text{N/m})\,(0{,}2\,\text{m}) = 40\,\text{N}$. El signo (negativo) de la fuerza elástica se incluyó cuando en el DCL dibujamos la fuerza F_e contraria al estiramiento del resorte. Utilizando la primera ecuación (ecuación en $\hat{\mathbf{i}}$) se tiene:

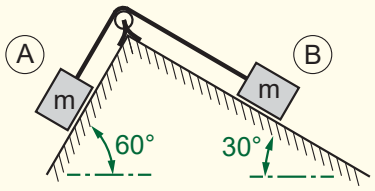
$$(40\,\text{N})\,(-\cos\alpha) + 100 = m\,\ddot{u}_x$$
$$\frac{-160 + 500}{5} = 25\,\ddot{u}_x$$
$$\ddot{u}_x = 2{,}72\,\text{m/s}^2$$

Nota: La segunda ecuación (ecuación en $\hat{\mathbf{j}}$) sirve para determinar la fuerza normal N en función de s.

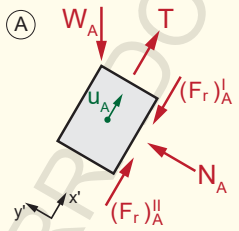
Ejemplo

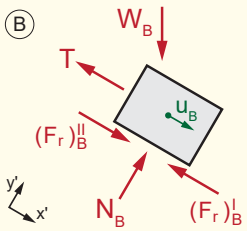
Basado en Hibbeler 13$^{\text{th}}$ ed, Problem 13–17

Un plano doblemente inclinado soporta dos bloques idénticos A y B de masa $m = 4\,\text{kg}$. El coeficiente de fricción dinámica es $\mu_k = 0{,}1$ (asuma que el sistema está en movimiento). Determine la aceleración de cada bloque.



El primer paso consiste en hacer un DCL de cada bloque.





La problemática que tenemos es que dependiendo del movimiento de los bloques, la fuerza de roce puede ser el par $(F_r)^I$, o el par $(F_r)^{II}$. La dirección de $\dot{u}$ (producida por $\ddot{u}$) gobierna la dirección de la fuerza de roce. El primer par supone un movimiento de ambos bloques hacia la izquierda, mientras que el segundo lo hace hacia la derecha.

Es importante entender que los cuerpos no son libres de moverse independientemente. Ambos bloques pueden ser analizados como *partículas con movimiento dependiente*. Es decir, a nivel de magnitudes y según la convención de signos de los DCL, se tiene que:

$$\ddot{u}_A = \ddot{u}_B \qquad\qquad \dot{u}_A = \dot{u}_B$$

Opción 1: $\ddot{u}_A > 0$ (con lo que $\ddot{u}_B > 0$, $\dot{u}_A > 0$, y $\dot{u}_B > 0$)

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Esto se traduce en asumir que el par $(F_r)^I$ es el correcto. Utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton para ambos bloques:

$$\text{Bloque A} \qquad T\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + (F_r)_A\begin{Bmatrix}-1\\0\end{Bmatrix} + W_A\begin{Bmatrix}-\sin 60°\\-\cos 60°\end{Bmatrix} + N_A\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix}\ddot{u}_A\\0\end{Bmatrix}$$

$$\text{Bloque B} \qquad T\begin{Bmatrix}-1\\0\end{Bmatrix} + (F_r)_B\begin{Bmatrix}-1\\0\end{Bmatrix} + W_B\begin{Bmatrix}\sin 30°\\-\cos 30°\end{Bmatrix} + N_B\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix}\ddot{u}_B\\0\end{Bmatrix}$$

Sabemos además que:

$$W_A = W_B = mg \qquad (F_r)_A = \mu_k N_A \qquad (F_r)_B = \mu_k N_B \qquad \ddot{u}_A = \ddot{u}_B$$

, que reemplazado en las ecuaciones de Newton anteriores:

$$\begin{aligned}
1^{\text{ra}}\text{ ecuación:} &\qquad T - \mu_k N_A - mg\left(\sqrt{3}/2\right) = m\,\ddot{u}_A \\
2^{\text{da}}\text{ ecuación:} &\qquad -mg\left(1/2\right) + N_A = 0 \quad\longrightarrow\quad N_A = 1/2\,mg \\
3^{\text{ra}}\text{ ecuación:} &\qquad -T - \mu_k N_B + mg\left(1/2\right) = m\,\ddot{u}_B \\
4^{\text{ta}}\text{ ecuación:} &\qquad -mg\left(\sqrt{3}/2\right) + N_B = 0 \quad\longrightarrow\quad N_B = \sqrt{3}/2\,mg
\end{aligned}$$

Reemplazando los valores de N_A y N_B en la 1$^{\text{ra}}$ y 3$^{\text{ra}}$ ecuación:

$$\begin{aligned}
T - \mu_k\left(1/2\right)mg - mg\left(\sqrt{3}/2\right) &= m\,\ddot{u}_A \\
-T - \mu_k\left(\sqrt{3}/2\right)mg + mg\left(1/2\right) &= m\,\ddot{u}_B
\end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones para eliminar la tensión T, y reemplazando $\ddot{u}_A = \ddot{u}_B$:

$$\begin{aligned}
-mg\left[\mu_k\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\right] &= 2\,m\,\ddot{u}_A \\
g\left(\frac{9-11\sqrt{3}}{40}\right) &= \ddot{u}_A
\end{aligned}$$

Obtuvimos $\ddot{u}_A < 0$, lo que es contrario a nuestro supuesto en el DCL. Es decir, la fuerza de roce que utilizamos no era la correcta.

Opción 2: $\ddot{u}_A < 0$ (con lo que $\ddot{u}_B < 0$, $\dot{u}_A < 0$, y $\dot{u}_B < 0$)

Esto se traduce en asumir que el par $(F_r)^{II}$ es el correcto. Repitiendo el análisis con las nuevas direcciones para la fuerza de roce, se llega a las siguientes dos ecuaciones (luego de todos los reemplazos correspondientes):

$$\begin{aligned}
T + \mu_k\left(1/2\right)mg - mg\left(\sqrt{3}/2\right) &= m\,\ddot{u}_A \\
-T + \mu_k\left(\sqrt{3}/2\right)mg + mg\left(1/2\right) &= m\,\ddot{u}_B
\end{aligned}$$

, con lo que se obtiene:

$$\ddot{u}_A = g\left(\frac{11-9\sqrt{3}}{40}\right) = -0{,}1147\,g = -1{,}1253\,\text{m/s}^2$$

Esta aceleración es la correcta (con $\ddot{u}_A = \ddot{u}_B$) ya que satisface nuestro supuesto.

Nota 1: Es importante ver que la solución correcta (DCL con opción 2) no es simplemente cambiarle el signo a la solución errada (DCL con opción 1). Es necesario volver a hacer el análisis.

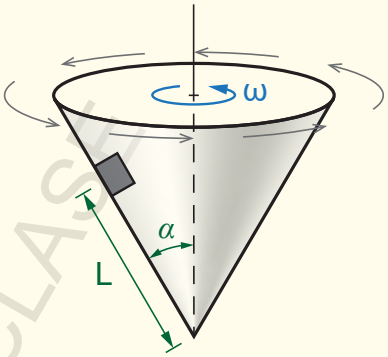
Nota 2: En este problema, los movimientos de ambos bloques están ligados, i.e. $\dot{u}_A = \dot{u}_B$ según la orientación de los ejes. Las ligaduras con poleas requieren de un estudio más cuidadoso y se estudiarán prontamente.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

Basado en compilado S. Urrutia, Problemas 2.6 & 2.7

un bloque de masa m se apoya sobre la superficie interna de un cono de ángulo α que gira con rapidez angular ω constante. La masa se encuentra a una distancia L del ápice del cono y no desliza gracias a un coeficiente de roce μ. Asuma que la fuerza de roce apunta "hacia arriba" por la superficie del cono, i.e. el bloque quiere deslizar hacia abajo. Se pide determinar:

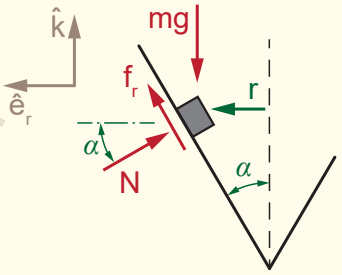


a) La resultante de fuerzas $\mathbf{f}$ que actúa sobre la masa (fuerza neta).

b) La magnitud de la fuerza normal.

c) El coeficiente de roce mínimo $\mu_{\min}$

El primer paso consiste en hacer un DCL del bloque. Para ello, se toma una sección axisimétrica, i.e. en el plano $\hat{\mathbf{e}}_r - \hat{\mathbf{k}}$, como muestra la Figura al costado. Se debe tener especial cuidado en identificar correctamente el sentido positivo de $\hat{\mathbf{e}}_r$ en la Figura (dirección en la que r aumenta).



La fuerza neta se calcula sumando todas las fuerzas en sus respectivas componentes $\hat{\mathbf{e}}_r - \hat{\mathbf{k}}$ (no hay fuerzas actuando en $\hat{\mathbf{e}}_\theta$):

$$\mathbf{f} = (f_r \sin\alpha - N\cos\alpha)\,\hat{\mathbf{e}}_r + (f_r\cos\alpha + N\sin\alpha - mg)\,\hat{\mathbf{k}}$$

En la dirección radial se tiene la aceleración centrípeta; necesaria para que el bloque gire con el cono en trayectoria circular. Mientras que en el eje $\hat{\mathbf{k}}$, la aceleración es nula ya que el bloque no desliza (no cambia su coordenada z). Postulando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_z = 0 \quad &\longrightarrow \quad f_r\cos\alpha + N\sin\alpha - mg = 0 \\ \mathbf{f}_r = m\,a_c \quad &\longrightarrow \quad f_r\sin\alpha - N\cos\alpha = m\left(-r\,\omega^2\right) \end{aligned}$$

Utilizando la geometría del problema, podemos relacionar el radio con la distancia al ápice:

$$L\sin\alpha = r$$

, que reemplazado en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_r\cos\alpha + N\sin\alpha - mg &= 0 \\ f_r\sin\alpha - N\cos\alpha &= -m\,L\,\omega^2\sin\alpha \end{aligned}$$

Multiplicando la 1$^{\text{ra}}$ ecuación por $\cos\alpha$ y la 2$^{\text{da}}$ por $\sin\alpha$, y luego sumando ambas se obtiene:

$$f_r = m\left(g\cos\alpha - L\,\omega^2\sin^2\alpha\right)$$

Del mismo modo, si multiplicamos la 1$^{\text{ra}}$ ecuación por $\sin\alpha$ y la 2$^{\text{da}}$ por $\cos\alpha$, y restando ambas se obtiene:

$$N = m\sin\alpha\left(g + L\,\omega^2\cos\alpha\right)$$

El coeficiente de roce mínimo se calcula con la condición de que $f_r \le (f_r)_{\max} = \mu N$. Se debe recordar que f_r puede ser cualquier valor hasta el máximo $(f_r)_{\max}$, y no necesariamente siempre

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

igual a este valor. Finalmente, el bloque no deslizará por el cono si se cumple:

$$\begin{aligned} f_r &\leq \mu N \\ m\left(g\,\cos\alpha - L\,\omega^2\,\sin^2\alpha\right) &\leq \mu\, m\,\sin\alpha\left(g + L\,\omega^2\,\cos\alpha\right) \\ \frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{g\,\cos\alpha - L\,\omega^2\,\sin^2\alpha}{g + L\,\omega^2\,\cos\alpha}\right] &= \frac{g\,\cot\alpha - L\,\omega^2\,\sin\alpha}{g + L\,\omega^2\,\cos\alpha} \leq \mu \end{aligned}$$

Es decir, el coeficiente de roce mínimo es:

$$\mu_{\min} = \frac{g\,\cot\alpha - L\,\omega^2\,\sin\alpha}{g + L\,\omega^2\,\cos\alpha}$$

Nota: Mientras más rápido gira el cono (mayor ω), el valor de $\mu_{\min}$ decrece. Es decir, necesitamos menos roce para mantener el bloque quieto. Si ω aumenta demasiado se podría dar vuelta f_r para evitar que el bloque salga volando hacia "arriba" (dirección $+z$). Para analizar ese caso se debe hacer un DCL nuevo.

3.4. Poleas y ligaduras

3.4.1. Movimiento dependiente

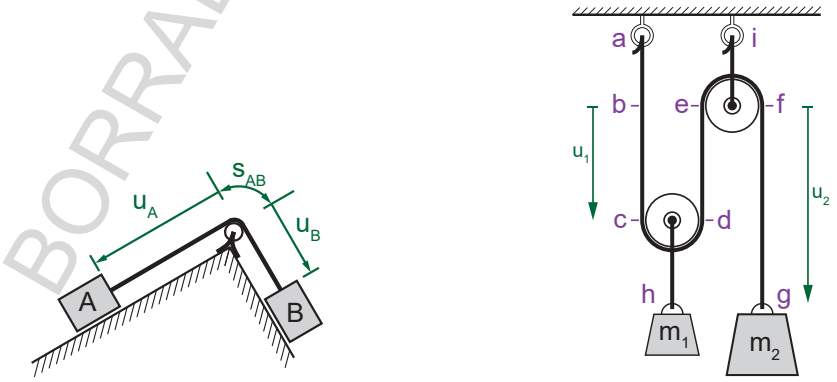
En ciertos casos, los movimientos de partículas están vinculados (ligados o conectados). En el caso de la Figura 3.8(a), si el largo total de la cuerda es ℓ_T, entonces:

$$u_A + s_{AB} + u_B = \ell_T$$

, donde s_{AB} es la longitud de arco donde la cuerda hace contacto con la polea. Derivando respecto al tiempo:

$$\dot{u}_A + \dot{u}_B = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{u}_A &= -\dot{u}_B \\ \ddot{u}_A &= -\ddot{u}_B \end{aligned}$$

Es decir, si un bloque sube, el otro tiene que bajar porque $\dot{u}_A = -\dot{u}_B$. Análogamente, si un bloque acelera cuesta arriba, el otro lo hace cuesta abajo ($\ddot{u}_A = -\ddot{u}_B$).



(a) (b)

Figura 3.8: Ejemplos de movimiento dependiente (*ligaduras*): **(a)** bloques conectados por una cuerda simple; y **(b)** masas conectadas por un sistema de cuerda y poleas.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

En este estudio, se asume que la cuerda y polea son "ideales". Una *cuerda ideal* es una cuerda cuya masa es despreciable y no se estira debido a la fuerza de tracción en ella. Una *polea ideal* tiene masa despreciable (inercia despreciable) y la cuerda puede girar sobre ella sin roce.

Cuando el sistema de poleas es más complejo, se debe:

1) Identificar las cuerdas cuyas longitudes no deben variar.

2) Definir las posiciones de las partículas o cuerpos móviles en función de los segmentos de cuerda variables.

3) Derivar las expresiones obtenidas.

En la Figura 3.8(b), son constantes los segmentos de cuerda:

$$\ell_{ab}\,,\ s_{cd}\,,\ s_{ef}\,,\ \ell_{ch}\,,\ \ell_{ie}$$

, mientras que son variables:

$$\ell_{bc}\,,\ \ell_{de}\,,\ \ell_{fg}$$

Como la cuerda principal no se estira, el largo total es igual a la suma de sus segmentos fijos y variables. Los segmentos fijos no son de interés, y con ello:

$$\ell_{bc} + \ell_{de} + \ell_{gf} = 2\,\ell_{bc} + \ell_{gf} = \ell_T \quad \text{(constante)}$$

Relacionando los segmentos con las posiciones de las masas:

$$2\,u_1 + u_2 = \ell_T$$

, y tomado derivadas temporales:

$$2\,\dot{u}_1 = -\dot{u}_2 \qquad\qquad 2\,\ddot{u}_1 = -\ddot{u}_2$$

¿Por qué en la Figura 3.8(b) se mide u_1 desde el punto b y no desde a?

Es importante notar que pese a tener dos posiciones (u_1 y u_2), en realidad hay sólo 1 *grado–de–libertad*[a]. Es decir, una posición es la verdadera variable y la otra es una variable dependiente.

Se puede medir desde a u otro punto fijo (e.g. el techo), e igual resultarán las mismas ecuaciones de ligadura:

$$2\,\dot{u}_1 = -\dot{u}_2 \qquad\qquad 2\,\ddot{u}_1 = -\ddot{u}_2$$

[a] GDL o DOF, del inglés *degree–of–freedom*.

El largo de las cuerdas ℓ_T podría no ser constante. Esto ocurre cuando se tienen máquinas que recuperan o entregan cuerda. Si en el ejemplo anterior se tuviera una máquina en el punto a que recupera cuerda con velocidad constante $\overline{v}$, entonces se tendrá:

$$\begin{aligned} \ell_T\,(t) = \ell_0 - \overline{v}\,t &= 2\,u_1 + u_2 \\ \rightarrow \qquad -\overline{v} &= 2\,\dot{u}_1 + \dot{u}_2 \\ \rightarrow \qquad 0 &= 2\,\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 \end{aligned}$$

En el caso de que la velocidad de recuperación o entrega de cuerda sea diferente, es simplemente cosa de introducir la cinemática de la cuerda en $\ell_T\,(t)$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

3.4.2. Múltiples grados–de–libertad

En los casos anteriores, las posiciones de todas las partículas del sistema quedan determinadas al conocer la posición de una de ellas: sistema de 1 GDL. En cambio, el sistema de la Figura 3.9 tiene 2 GDL pese a tener 3 posiciones de interés: z_1, z_2, y z_3. En este caso específico, podemos mover independientemente las masas 1 y 3; mientras que la posición de la masa 2 depende de las anteriores. Podemos identificar 2 cuerdas que participan en el sistema:

$$\ell_A = z_3 + 2\,z_B + \text{cte}$$
$$\ell_B = z_1 + z_A + (z_A - z_B) + \text{cte}$$

> La posición de la polea B es una variable auxiliar. Si la polea B tuviera masa entonces participaría en la dinámica del problema al ser un cuerpo más. Es decir, si la polea no fuera *ideal*, su posición sería una variable más del sistema.

Derivando temporalmente las expresiones anteriores:

$$\dot{z}_3 + 2\,\dot{z}_B = 0 \qquad \dot{z}_1 + 2\,\dot{z}_A - \dot{z}_B = 0$$
$$\ddot{z}_3 + 2\,\ddot{z}_B = 0 \qquad \ddot{z}_1 + 2\,\ddot{z}_A - \ddot{z}_B = 0$$

> En la ecuación anterior es imposible que todos los valores sean positivos: cuando algunos cuerpos suben, otros deben bajar.

La posición z_B es una variable auxiliar. Debido a que no es de interés, despejaremos $\dot{z}_B$ y $\ddot{z}_B$ en ambas ecuaciones e igualaremos ambas:

$$\dot{z}_B = -\frac{1}{2}\dot{z}_3 \qquad \dot{z}_B = \dot{z}_1 + 2\,\dot{z}_A$$

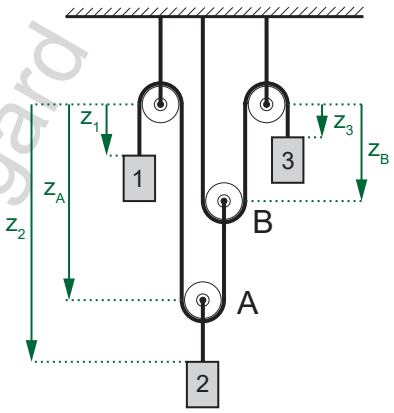


Figura 3.9: Sistema de poleas con 3 masas y 2 grados–de–libertad.

Notar que la posición de la masa 2 es $z_2 = z_A + \text{cte}$, donde las constantes no son de interés. Es decir:

$$\dot{z}_A = \dot{z}_2 \qquad \ddot{z}_A = \ddot{z}_2$$

Reemplazando en las ecuaciones anteriores, se obtiene una única ecuación que define la ligadura del sistema (movimiento dependiente):

$$\dot{z}_3 + 2\,\dot{z}_1 + 4\,\dot{z}_2 = 0$$
$$\ddot{z}_3 + 2\,\ddot{z}_1 + 4\,\ddot{z}_2 = 0$$

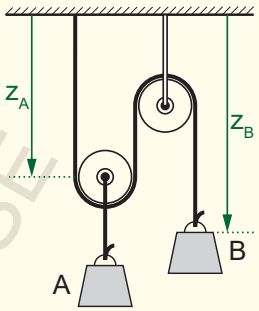
Con la ecuación anterior, es importante notar que hay 2 movimientos independientes y uno dependiente.

Las ecuaciones de ligadura se deben utilizan en conjunto con la 2^{da} ley de Newton para resolver problemas de múltiples partículas o cuerpos conectados.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

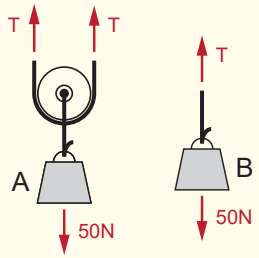
En el sistema de la Figura, ambos pesos son iguales con $W = 50\,\text{N}$. Desprecie la masa de las cuerdas y poleas, extensión de las cuerdas y roce de estas. Determine las aceleraciones de las masas.



El primer paso consiste en hacer los DCL de las masas. En el caso de la masa A se ha incluido la polea: la polea no tiene masa y permite visualizar de mejor manera las fuerzas sobre la masa. Se debe notar también que por comodidad se ha definido el eje $+z$ apuntando hacia abajo.

Aplicando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton con ambos bloques, se tiene:

$$\begin{aligned} 50 - 2\,T &= m\,\ddot{z}_A \\ 50 - T &= m\,\ddot{z}_B \end{aligned}$$



La ligadura, vinculación, o movimiento dependiente; entrega la ecuación faltante:

$$\ddot{z}_B = -2\,\ddot{z}_A$$

Ahora tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas: es posible resolver para las aceleraciones y tensión en la cuerda.

$$\left.\begin{aligned} 50 - 2\,T &= m\,\ddot{z}_A \\ 50 - T &= m\,\ddot{z}_B \\ \ddot{z}_B &= -2\,\ddot{z}_A \end{aligned}\right\} \quad \longrightarrow \quad T = 30\,\text{N}\,,\ \ddot{z}_A = -\frac{1}{5}g\,,\ \ddot{z}_B = \frac{2}{5}g$$

Es decir, el peso A sube con aceleración $-\frac{g}{5}$, mientras que el peso B baja con aceleración $\frac{2g}{5}$.

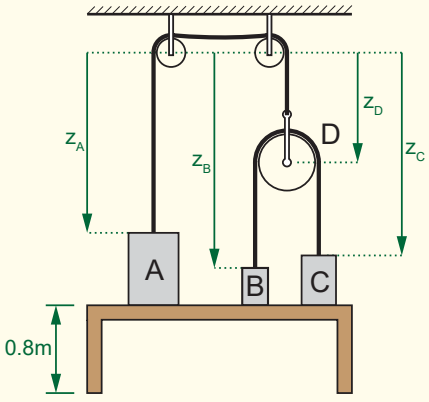
Nota: El signo de la tensión T es un buen indicador de errores. Algo estaría mal si hubiera dado negativa.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

Basado en McGill & King 4$^{\text{th}}$ ed, Problem 2.57

Se tiene un sistema de 3 masas que se encuentra en reposo sobre una mesa, como muestra la Figura. Desprecie el peso de la cuerda, polea, el roce con la polea, y el estiramiento de la cuerda. Las masas son $m_A = 50\,\text{kg}$, $m_B = 20\,\text{kg}$, y $m_C = 30\,\text{kg}$. Se pide determinar:



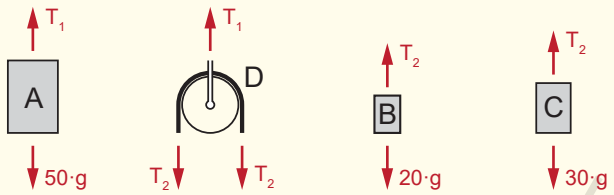
a) Las aceleraciones de las masas luego que se retira la mesa.

b) ¿Cuál bloque toca el piso primero?

c) ¿Cuánto tiempo tarda en hacerlo?

Nota: Los problemas de varias masas son poco frecuentes debido al gran número de ecuaciones que deben ser resueltas de forma simultánea.

El primer paso consiste en hacer DCLs para cada componente del sistema.



Aplicando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton para cada DCL en su dirección vertical se obtienen las siguientes 4 ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} 50\,g - T_1 &= m_A\,\ddot{z}_A && \text{ecuación (a)} \\ 2\,T_2 - T_1 &= 0 \quad \longrightarrow \quad T_1 = 2\,T_2 \\ 20\,g - T_2 &= m_B\,\ddot{z}_B && \text{ecuación (b)} \\ 30\,g - T_2 &= m_C\,\ddot{z}_C && \text{ecuación (c)} \end{aligned}$$

Nota: Un error frecuente consiste en creer que la polea no acelera. La verdad es que sí lo hace, pero debido a que su masa es despreciable (según el enunciado), entonces $m\,\ddot{y}_D = 0$ y gracias a ello sabemos que $T_1 = 2\,T_2$. Si la polea tuviera masa, participaría en la dinámica del problema.

El sistema tiene dos cuerdas:

$$\begin{aligned} z_A + z_D + \text{const} &= \ell_1 && \longrightarrow && \dot{z}_A + \dot{z}_D = 0 \\ (z_C - z_D) + (z_B - z_D) + \text{const} &= \ell_2 && \longrightarrow && \dot{z}_C + \dot{z}_B - 2\,\dot{z}_D = 0 \end{aligned}$$

Usando ambas ecuaciones eliminamos $\dot{z}_D$ ya que no es de interés, con lo que se obtienen las siguientes ecuaciones de ligadura:

$$\begin{aligned} 2\,\dot{z}_a + \dot{z}_B + \dot{z}_C &= 0 \\ 2\,\ddot{z}_a + \ddot{z}_B + \ddot{z}_C &= 0 && \text{ecuación (d)} \end{aligned}$$

Tenemos 4 ecuaciones (ecuaciones a→d) y 4 incógnitas (luego de reemplazar $T_1 = 2\,T_2$). Usar matrices suele ser mejor para resolver 4 o más ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 20 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_A \\ \ddot{z}_B \\ \ddot{z}_C \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50\,g \\ 20\,g \\ 30\,g \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/25 \\ 0 & 1 & 0 & 1/20 \\ 0 & 0 & 1 & 1/30 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{2}{25} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_A \\ \ddot{z}_B \\ \ddot{z}_C \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g \\ g \\ g \\ -4\,g \end{Bmatrix}$$

Con la última ecuación se puede obtener la tensión T_2:

$$-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) T_2 = -4\,g$$

$$T_2 = \frac{1200}{49} g$$

Nota: La tensión resultó positiva lo que es un buen indicador.
En el sistema de la matriz, las aceleraciones de las masas están todas en términos de la tensión T_2:

$$\ddot{z}_A = \frac{1}{49} g \downarrow \qquad \ddot{z}_B = -\frac{11}{49} g \uparrow \qquad \ddot{z}_C = \frac{9}{49} g \downarrow$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Tanto la masa A como la C caen, pero la masa C será la primera en tocar el piso. El instante $t^\star$ en que hace contacto con el suelo se obtiene de:

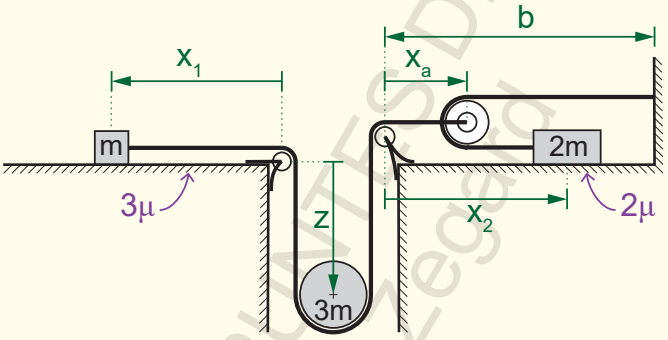
$$z_C\left(t^\star\right) = \ddot{z}_C \frac{\left(t^\star\right)^2}{2} = \left(\frac{9}{49}g\right)\frac{\left(t^\star\right)^2}{2} = 0{,}8\,\mathrm{m} \qquad +z \text{ es positivo hacia } \downarrow$$

$$t^\star = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{49}{9}\right)\left(\frac{2}{g}\right)} = \frac{14}{3}\sqrt{\frac{2}{5\,g}} = 0{,}9423\,\mathrm{s}$$

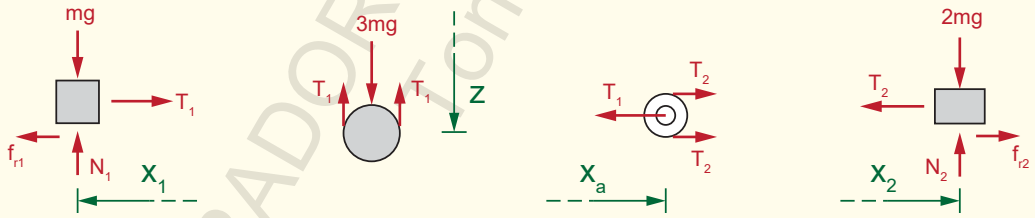
Ejemplo

Ayudantía de P. Ochoa del 2018. Probablemente modificado de Urrutia, Problema 2.2

En el sistema de 3 masas de la Figura, se tienen dos superficies con coeficientes de roce 3μ y 2μ, respectivamente. Las cuerdas y poleas son ideales: masa despreciable, no hay roce entre ellas, y no se estiran. Determine el μ mínimo para que el sistema no se mueva.



El sistema se moverá si hay un desplazamiento de la masa m o de la masa $2m$. Es decir, no es necesario que ambas se muevan para que el sistema entre en movimiento, sino que basta con una de ellas. Comenzando por hacer un DCL de los cuerpos involucrados:



Se tiene equilibrio de fuerzas en todos los cuerpos debido a que la aceleración en todos ellos es cero, i.e., $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_a = \ddot{z} = 0$. En el caso de la polea (cuya masa también es despreciable), se tiene:

$$-T_1 + 2\,T_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad T_1 = 2\,T_2$$

El equilibrio de la masa circular resulta en:

$$3\,mg - 2\,T_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad T_1 = \frac{3}{2}mg$$

$$T_2 = \frac{3}{4}mg$$

Equilibrio horizontal en la masa m resulta en:

$$f_{r1} - T_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad f_{r1} = \frac{3}{2}mg$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Equilibrio horizontal en la masa $2m$ resulta en:

$$f_{r2} - T_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad f_{r2} = \frac{3}{4}mg$$

Sabemos que la fuerza de roce estático puede tomar un valor máximo igual a:

$$(f_r)_{\max} = \mu_{\text{superficie}}\, N$$

Es decir, debemos garantizar que $(f_{r1} \leq 3\mu\, N_1)$ y que $(f_{r2} \leq 2\mu\, N_2)$:

$$f_{r1} = \frac{3}{2}mg \leq 3\mu\, N_1 = 3\mu\, mg \qquad f_{r2} = \frac{3}{4}mg \leq 2\mu\, N_2 = 4\mu\, mg$$
$$\frac{1}{2} \leq \mu \qquad \frac{3}{16} \leq \mu$$

Controla el lado izquierdo (masa m): si el coeficiente de roce es $\mu = \frac{1}{2}$ y el sistema se encuentra en reposo; se mantendrá en reposo.

3.5. Roce viscoso (amortiguación)

Hemos visto fuerzas que son invariantes con la posición (e.g. la gravedad), y fuerzas que varían con la posición (e.g. resortes). El roce viscoso, o amortiguamiento, es una fuerza que depende de la velocidad.

$$\text{fuerza de gravedad:} \quad \mathbf{f}_g = -mg\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\text{fuerza elástica:} \quad \mathbf{f}_e = -k\,u\,\hat{\mathbf{u}}$$
$$\text{fuerza viscosa:} \quad \mathbf{f}_v = -c\,\dot{u}\,\hat{\hat{\mathbf{u}}}$$

Ejemplos de roce viscoso: roce de un automóvil con el aire, paracaídas, torpedo en el agua, y amortiguador de cierre de puertas.

El roce viscoso podría no necesariamente depender de forma lineal con la velocidad. Por ejemplo, es frecuente encontrar casos en que varía según el cuadrado de la velocidad:

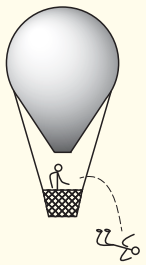
$$f_v = -c\,\dot{u}^2\,\hat{\hat{\mathbf{u}}}$$

La dependencia podría incluso ser diferente, e.g. $f_v = -c\,\dot{u}^{1,5}\,\hat{\hat{\mathbf{u}}}$ u otra; pero lo relevante de esta fuerza es que está asociada a la velocidad.

> La solución de EDOs cuya aceleración dependía de la velocidad será de utilidad ahora.

Ejemplo

Un paracaidista se lanza desde un globo a gran altura. Inicialmente su velocidad es nula, y su roce con el aire (viscoso) es igual a b. Se pide determinar:



a) La aceleración al inicio de su caída $\ddot{u}_0$.

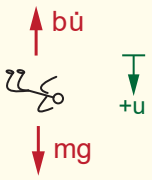
b) La velocidad límite $\dot{u}_{\text{límite}}$ que puede alcanzar (velocidad máxima).

c) Una expresión para su velocidad de caída en el tiempo.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Comenzamos haciendo un DCL del paracaidista, y aplicando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton:

$$m\,\ddot{u} = mg - b\,\dot{u}$$



Al momento de lanzarse, el paracaidista tiene $v_0 = \dot{u}_0 = 0$, con lo que:

$$m\,\ddot{u} = mg - \underbrace{b\,\dot{u}}_{0}$$

$$\ddot{u}_0 = g$$

Es decir, el paracaidista inicialmente acelera con g hacia abajo.

Cuando el paracaidista alcanza su velocidad límite (velocidad máxima) es porque deja de acelerar:

$$\underbrace{m\,\ddot{u}}_{0} = mg - b\,\dot{u}$$

$$\dot{u}_{\text{límite}} = \frac{mg}{b}$$

Es decir, la velocidad límite del paracaidista es $\frac{mg}{b}$.

La expresión para la velocidad en el tiempo se obtiene de resolver la EDO. Sabemos que $\ddot{u} = \frac{\mathrm{d}\dot{u}}{\mathrm{d}t}$, con lo que:

$$m\,\frac{\mathrm{d}\dot{u}}{\mathrm{d}t} = mg - b\,\dot{u}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{g - \frac{b}{m}\,\dot{u}}\,\mathrm{d}\dot{u}$$

, con lo que integrando a ambos lados:

$$t = -\frac{m}{b}\,\log\left(g - \frac{b}{m}\,\dot{u}\right) + C_1$$

$$A\,e^{-\frac{b\,t}{m}} = g - \frac{b}{m}\,\dot{u}$$

$$\dot{u} = \frac{mg}{b}\left[1 - \frac{A}{g}\,e^{-\frac{b\,t}{m}}\right]$$

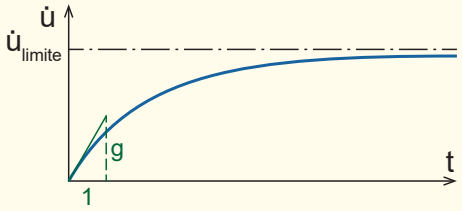
Sabemos que $\dot{u}_0 = \dot{u}\,(0) = 0$, con lo que podemos obtener el valor de A:

$$0 = \frac{mg}{b}\left[1 - \frac{A}{g}\,e^{0}\right] \qquad \longrightarrow \qquad A = g$$

Finalmente, la expresión de la velocidad en el tiempo es:

$$\dot{u}\,(t) = \frac{mg}{b}\left[1 - e^{-\frac{b\,t}{m}}\right]$$

La gráfica al costado muestra la evolución de la velocidad del paracaidista en el tiempo, cuya pendiente inicial es igual a g, y acelera asintóticamente a $\dot{u}_{\text{límite}}$.



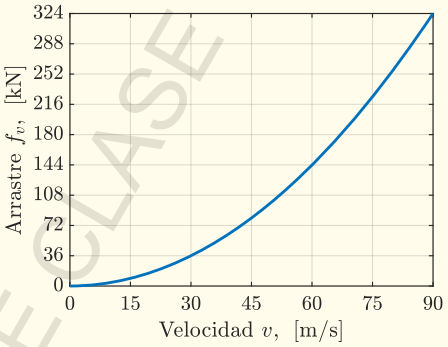
BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

Basado en Meriam 9th ed, Problem 3/25



Un avión jet de masa $m = 9\,\text{ton}$ aterriza tocando la pista con velocidad $v_0 = 90\,\text{m/s}$, instante en el cual despliega un paracaídas y apaga sus motores. El arrastre total sobre el avión varía con la velocidad como muestra la gráfica y se puede aproximar con $f_v = c\,v^2$, donde c es una constante. Determine la distancia requerida para que el avión reduzca su velocidad a $v = 45\,\text{m/s}$.



La gráfica f_v—v permite determinar la constante de roce viscoso c. Cualquier par de valores sirve para ello, y en este caso se toma el valor máximo $f_v = 324000\,\text{N}$ cuando la velocidad es $v = 90\,\text{m/s}$:

$$c\,v^2 = f_v \qquad \longrightarrow \qquad c\,(90^2) = 324000$$
$$c = 40\ \text{N s}^2/\text{m}^2$$

El DCL del avión entrega como única fuerza actuando f_v. Postulando la 2da ley de Newton y considerando como positivo el sentido en que el avión se mueve:

$$\sum \mathbf{f} = m\,\ddot{\mathbf{u}} \qquad \longrightarrow \qquad -c\,v^2 = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
$$-\frac{c}{m}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}v$$
$$-\frac{c}{m}\,t + C_1 = -\frac{1}{v}$$
$$v = \frac{m}{c\,t - m\,C_1}$$
$$v = \frac{m}{c\,t + C_1} \qquad \text{(redefiniendo } -m\,C_1 \to C_1\text{)}$$

Sabemos que la velocidad inicial es $v_0 = 90\,\text{m/s}$, con lo que se puede obtener C_1:

$$v\,(0) = 90\,\text{m/s} \qquad \longrightarrow \qquad 90 = \frac{m}{0 + C_1}$$
$$C_1 = \frac{m}{90}$$

Integrando una vez más para obtener la posición:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = v = \frac{m}{c\,t + \frac{m}{90}} = \frac{90}{90\,\frac{c}{m}\,t + 1}$$
$$u = \frac{m}{c}\,\log\,(m + 90\,c\,t) + C_2$$

Si fijamos el origen $u = 0$ en el punto donde el avión toca el piso, entonces $u_0 = 0$ y con ello:

$$u\,(0) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad 0 = \frac{m}{c}\,\log\,(m) + C_2$$
$$C_2 = -\frac{m}{c}\,\log\,(m)$$

Finalmente, las ecuaciones que describen el movimiento del avión son:

$$v\,(t) = \frac{90}{90\,\frac{c}{m}\,t + 1} \qquad ; \qquad u\,(t) = \frac{m}{c}\,\log\left(1 + 90\,\frac{c}{m}\,t\right)$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

El instante en que el avión en redujo su velocidad a $45\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ es:

$$v\left(t^{\star}\right) = 45 = \frac{90}{\frac{2}{5}\,t^{\star} + 1} \qquad \longrightarrow \qquad t^{\star} = \frac{5}{2}\ \mathrm{s}$$

Su posición medida desde el origen, el punto donde hace contacto con el suelo, es:

$$\Delta u = u\left(t^{\star}\right) - u_0 = u\left(t^{\star}\right) - 0 = 225\,\log\left(1 + \frac{2}{5}\,t^{\star}\right)$$

$$\Delta u = 225\,\log\left(2\right) = 155{,}96\ \mathrm{m}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Capítulo 4

Trabajo & Energía

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

La 2$^{\text{da}}$ ley de Newton establece la relación entre la resultante de fuerzas actuando sobre una partícula y la aceleración que experimenta la misma. Por otro lado, podemos integrar la aceleración para obtener la variación de velocidad y de desplazamiento. Extensiones de la relación fuerza–aceleración consisten en:

a) Integrar las fuerzas en función del desplazamiento de la partícula[1]: principio de **trabajo y energía**.

b) Integrar las fuerzas en función del tiempo de aplicación: principio de **impulso y momentum**.

En ambos casos, la integral se podría hacer en función del tiempo: en el primer caso de la fuerza con un diferencial desplazamiento (resultado es escalar), y en el segundo caso es la fuerza en el tiempo (resultado es vectorial). En esta sección, nuestro estudio estará enfocado al primer caso: trabajo y energía.

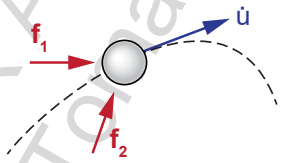


Figura 4.1: Partícula de masa m que se mueve con velocidad $\dot{\mathbf{u}}$, y sobre la cual actúa una fuerza neta $\mathbf{f} = \sum \mathbf{f}_i$.

La Figura 4.1 muestra una partícula de masa m sobre la cual actúan fuerzas. La 2$^{\text{da}}$ ley de Newton establece que (Ecuación (3.1)):

$$\sum \mathbf{f}_i = \mathbf{f} = m\,\ddot{\mathbf{u}}$$

Esta es una ecuación vectorial; tiene componentes asociados a cada eje del sistema de coordenadas. Tomando el producto punto con la velocidad a ambos lados de la ecuación:

$$\mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{u}} = m\,\ddot{\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{u}} = m\,\frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{u}}}{\mathrm{d}t}\cdot\dot{\mathbf{u}} = \frac{m}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\,\dot{\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}}\right)$$

$$\mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\,|\dot{\mathbf{u}}|^2\right)$$

[1]En realidad, el producto de las fuerzas por el desplazamiento será la integral de la fuerza por la velocidad. La integral de la velocidad es la variación de la posición; es decir, el desplazamiento.

Integrando en función del tiempo entre instantes t_1 y t_2:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}t = \frac{m}{2}\left[|\dot{\mathbf{u}}(t_2)|^2 - |\dot{\mathbf{u}}(t_1)|^2\right]} \tag{4.1}$$

, donde $U_{1\to 2} = U_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}t$ = es el *trabajo* ejercido por la resultante de las fuerzas externas sobre la partícula en $t_1 \to t_2$;
$T = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{u}}|^2$ = es la *energía cinética de la partícula*. Con ello, la variación de energía cinética de la partícula es $\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{m}{2}\left[|\dot{\mathbf{u}}(t_2)|^2 - |\dot{\mathbf{u}}(t_1)|^2\right]$.

Las unidades de trabajo (U) y de energía (T) deben ser iguales: $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = 1\,\mathrm{J}$, donde J es *Joule*. Lo obtenido es una ecuación escalar (a diferencia de una ecuación para cada eje):

trabajo sobre la partícula $\rightarrow \quad U_{12} = \Delta T \quad \leftarrow$ variación de energía cinética de la partícula

Una notación alternativa y equivalente a la anterior es:

$$\boxed{T_1 + U_{12} = T_2} \tag{4.2}$$

En esta última queda claro el principio de trabajo y energía: si a un sistema con energía cinética T_1 se le aplica el trabajo U_{12}, terminará con energía cinética T_2.

> En algunos textos, se utilizan las nomenclaturas W y K para trabajo y energía cinética, respectivamente. La explicación que algunos dan es que así se evita confundir: el trabajo con la posición $\mathbf{u}$; y la energía cinética con la tensión en una cuerda T. La verdad es que el problema persiste porque: W se puede confundir con peso W; y la energía cinética K con la rigidez de un resorte k. La diferenciación la suele dar el contexto en que se usan y si son escalares o vectores.

4.1. Trabajo hecho por fuerzas típicas

4.1.1. Trabajo hecho por una fuerza constante

Cuando la fuerza $\mathbf{f}$ es constante en el tiempo, se puede sacar de la integral de trabajo:

$$U_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}t = \mathbf{f} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}t = \mathbf{f} \cdot [\mathbf{u}(t_2) - \mathbf{u}(t_1)]$$

$$U_{12} = \mathbf{f} \cdot \Delta\mathbf{u} \tag{4.3}$$

Es decir, el trabajo es el producto punto de la fuerza por el desplazamiento de la partícula.

El producto punto de la fuerza por el desplazamiento puede ser interpretado de dos formas, como muestra la Figura 4.2:

- como la magnitud de la fuerza multiplicada por la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza.
- como la magnitud del desplazamiento por la componente de fuerza en la dirección del desplazamiento.

Lo que fue previamente explicado en la Sección 1.3.4 pero sin un contexto aplicado.

> La Ecuación (4.3) es comúnmente estudiada en la educación escolar, pero sólo para movimiento rectilíneo (1D). Es decir, en versión escalar, donde el producto punto se transforma en una simple

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

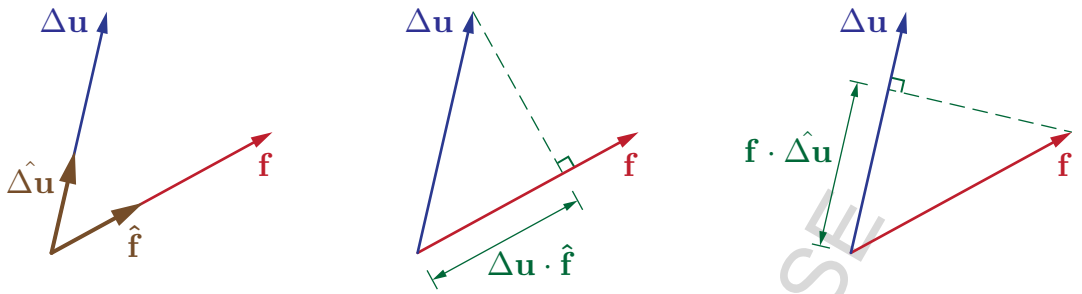


Figura 4.2: Trabajo hecho por una fuerza constante: **(a)** vectores de fuerza $\mathbf{f}$ y de desplazamiento $\Delta\mathbf{u}$, y sus respectivos directores; **(b)** proyección de $\Delta\mathbf{u}$ sobre la dirección $\hat{\mathbf{f}}$; y **(c)** proyección de $\mathbf{f}$ sobre la dirección $\hat{\Delta\mathbf{u}}$.

multiplicación. Olvidar que se trata de un producto punto es un error frecuente en estos problemas.

Otro error común en estos problemas consiste en aplicar la Ecuación (4.3) a casos en que la fuerza no es constante.

4.1.2. Trabajo hecho por una fuerza central

Cuando la fuerza sobre una partícula tiene:

a) una dirección que siempre pasa por un mismo punto fijo central,

b) magnitud que sólo depende de la distancia r entre la partícula y ese punto central;

se tiene entonces una *fuerza central*. En ese caso es conveniente utilizar coordenadas polares[2], donde la velocidad está definida por (Ecuación (2.12)):

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

La Figura 4.3 ilustra una fuerza central, la que actúa en la dirección $-\hat{\mathbf{e}}_r$ para así siempre pasar por un mismo punto fijo central. Los vectores base son ortogonales entre sí, por lo que se cumple que:

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = |\hat{\mathbf{e}}_r|^2 = 1 \qquad \text{y} \qquad \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta = 0$$

El producto punto de la fuerza con la velocidad resulta:

$$\mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} = [-f(r)\ \hat{\mathbf{e}}_r] \cdot \left[\dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\right] = -\dot{r}\ f(r)$$

El trabajo de una fuerza central entre $t_1 \to t_2$ es:

$$U_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}}\ \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} -\dot{r}\ f(r)\ \mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} f(r)\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t$$

Con un cambio de variable de integración, resulta:

$$U_{12} = -\int_{r(t_1)}^{r(t_2)} f(r)\ \mathrm{d}r = -\int_{r_1}^{r_2} f(r)\ \mathrm{d}r$$

Si tenemos una función $V(r)$ que es la *antiderivada* de $f(r)$ tal que $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = f$, entonces el trabajo es:

$$U_{12} = -V(r_2) + V(r_1) \tag{4.4}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

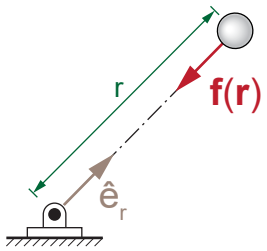


Figura 4.3: Fuerza central: la fuerza $f\,(r)$ actúa siempre en la dirección $-\hat{\mathbf{e}}_r$, donde el punto central está siempre en la trayectoria de la fuerza.

, donde las constantes en la función $V(r)$ no son de importancia ya que se eliminan al calcular el trabajo (lo que realmente nos interesa).

La función $V(r)$ recibe el nombre de *potencial*. Es relevante notar que el trabajo hecho es igual a la diferencia de potencial con distinto signo. Es decir:

$$U_{12} = -\left[V(r_2) - V(r_1)\right] = -\Delta V \tag{4.5}$$

Esto nos será de utilidad en las secciones siguientes cuando estudiemos la relación entre trabajo y energía potencial. Algunos potenciales de uso frecuente utilizan la nomenclatura V en vez de V, como se verá en las siguientes secciones.

> La derivación del trabajo hecho por una fuerza central parece muy teórico, pero la realidad es que es una fuerza bastante común. Las dos fuerzas centrales que estudiaremos son: **(1)** resortes y **(2)** gravedad a escala planetaria.
>
> La gravedad a escala planetaria no actúa en el sentido $-\hat{\mathbf{k}}$, sino que lo hace hacia el centro de los astros; en el sentido $-\hat{\mathbf{e}}_r$.

4.1.3. Trabajo hecho por un resorte lineal (fuerza central)

Un resorte *ideal* que tiene uno de sus extremos fijos, aplica una fuerza central sobre su extremo libre con $f(r)$ conocido:

$$f(r) = k\,(r - \ell_0)$$

, como ilustra la Figura 4.4. El signo es positivo ya que en la derivación anterior se asumió que $f(r)$ apunta en el sentido $-\hat{\mathbf{e}}_r$ (ver Figura 4.3). En este caso, la función $V\,(r)$ es:

$$V\,(r) = \int f(r)\ \mathrm{d}r = \frac{k}{2}\,(r - \ell_0)^2$$

Si definimos el estiramiento del resorte como $\delta = r - \ell_0$, entonces:

$$V\,(r) = \frac{k}{2}\,(r - \ell_0)^2 = \frac{k}{2}\,\delta^2$$

Finalmente, el trabajo hecho por un resorte es:

$$U_{12} = -\frac{k}{2}\left[\delta^2\,(t_2) - \delta^2\,(t_1)\right] \tag{4.6}$$

Debido a que un resorte (fuerza elástica) es también una fuerza central, se puede escribir en términos de su *potencial*:

$$U_{12} = -\left[\frac{k}{2}\,\delta_2^2 - \frac{k}{2}\,\delta_1^2\right] = -\Delta V_e \tag{4.7}$$

[2]En el caso 3D correspondería utilizar coordenadas esféricas.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

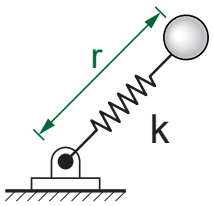


Figura 4.4: Resorte fijo en un extremo que actúa como una fuerza central.

, donde $V_e = \frac{k}{2}\delta^2$ es el *potencial de energía elástica*. Esto nos será de utilidad en las secciones siguientes cuando estudiemos la relación entre trabajo y energía potencial.

> Anteriormente utilizamos V en vez para hablar de la antiderivada de cualquier $f(r)$. En el caso de la fuerza elástica, su potencial se atribuye a la fuerza elástica y se suele utilizar la nomenclatura V_e.

4.1.4. Trabajo hecho por la fuerza de gravedad

En la superficie de la tierra la fuerza de gravedad es $\mathbf{f}_g = -mg\,\hat{\mathbf{k}}$, y con ello:

$$U_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_g \cdot \dot{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_g \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{u}(t_1)}^{\mathbf{u}(t_2)} \mathbf{f}_g \cdot \mathrm{d}\mathbf{u}$$

, donde se hizo un cambio de variable de integración. El diferencial $\mathrm{d}\mathbf{u}$ se puede descomponer como:

$$U_{12} = \int_{\mathbf{u}(t_1)}^{\mathbf{u}(t_2)} \mathbf{f}_g \cdot \mathrm{d}\mathbf{u} = \int_{\mathbf{u}(t_1)}^{\mathbf{u}(t_2)} \left(-mg\,\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{i}}\,\mathrm{d}x + \hat{\mathbf{j}}\,\mathrm{d}y + \hat{\mathbf{k}}\,\mathrm{d}z\right) = \int_{\mathbf{u}(t_1)}^{\mathbf{u}(t_2)} -mg\,\mathrm{d}z$$

Finalmente, el trabajo hecho por la fuerza de gravedad es:

$$U_{12} = -mg\left[u_z\left(t_2\right) - u_z\left(t_1\right)\right] = -mg\,\Delta z \tag{4.8}$$

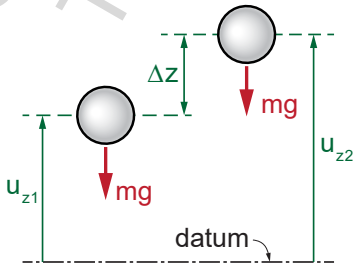


Figura 4.5: Trabajo de la fuerza de gravedad, donde $U_{12} < 0$ si la partícula gana altitud $\Delta z > 0$.

El trabajo hecho por la fuerza de gravedad se puede escribir en términos de un *potencial*:

$$U_{12} = -mg\left[z_2 - z_1\right] = -\Delta V_g \tag{4.9}$$

, donde $V_g = mgz$ es el *potencial de energía gravitatoria*. Esto nos será de utilidad en las secciones siguientes cuando estudiemos la relación entre trabajo y energía potencial.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

El signo del trabajo hecho por la gravedad se puede interpretar fácilmente: una partícula que sube tiene un desplazamiento $\Delta z > 0$ que es contrario a $\downarrow mg$, y por ende el trabajo es negativo.

Cuando la partícula desciende, el trabajo de la gravedad es positivo.

4.1.5. Trabajo hecho por la fuerza de gravedad (gran escala)

La fuerza de gravedad en la superficie de la tierra es un caso particular de la ley de gravitación universal de Newton, como quedó demostrado en la sección 3.2.1. Específicamente, para el caso de un cuerpo de masa m cercano a la tierra se tiene que:

$$f_p = -G\,\frac{m_e\,m}{r^2}\,\hat{\mathbf{e}}_r = -m\,\frac{3{,}9858\cdot 10^{14}}{r^2}\,\hat{\mathbf{e}}_r$$

Es de importancia notar que a gran escala la fuerza de gravedad sigue el comportamiento de una *fuerza central* del tipo:

$$f_p = -f(r)\;\hat{\mathbf{e}}_r \qquad \text{con} \qquad f(r) = m\,\frac{3{,}9858\cdot 10^{14}}{r^2}$$

y cuyo potencial es:

$$V_p = -G\,\frac{m_e\,m}{r} = -m\,\frac{3{,}9858\cdot 10^{14}}{r} \tag{4.10}$$

, donde r es la distancia de la masa m al centro de la tierra. Finalmente, el trabajo hecho por la fuerza de gravedad a escala planetaria es:

$$U_{12} = -\Delta V_p = G\,m_e\,m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{4.11}$$

El potencial $V_p = -G\,\frac{m_e\,m}{r}$ es siempre negativo, lo que podría parecer inusual. Lo importante en este caso es recordar que lo importante es la *variación de potencial* ΔV y no el potencial mismo.

4.2. Fuerzas conservativas y no-conservativas

Cuando el trabajo hecho sólo depende de las posiciones iniciales y finales de la partícula sobre la cual actúan las fuerzas, entonces el trabajo es independiente del trayecto entre el inicio y final. Esto es siempre cierto para las *fuerzas conservativas*.

Cuando el trabajo hecho por una fuerza actuando sobre una partícula depende del trayecto (e.g. distancia recorrida), se trata de una *fuerza no-conservativa*. El roce (o fricción) es un ejemplo de fuerza no-conservativa; mientras más largo sea el camino recorrido, más trabajo hace la fuerza de roce.

En el ejemplo de la Figura 4.6, se cumple que:

- $U_{12}^{\mathrm{I}} = U_{12}^{\mathrm{II}}$ si todas las fuerzas $\mathbf{f}_i$ son conservativas.
- $U_{12}^{\mathrm{I}} \neq U_{12}^{\mathrm{II}}$ si una (o más) de las fuerzas $\mathbf{f}_i$ es no-conservativa.

4.2.1. Trabajo hecho por la fuerza de roce (fricción seca)

La fuerza de roce $\mathbf{f}_r$ siempre actúa en contra del movimiento (en el sentido $-\hat{\mathbf{u}}$), como muestra la Figura 4.7(a). Es decir, produce trabajo negativo (ver Ecuación (4.1)), y es igual a:

$$U_{12} = -f_r\;s_{12}$$

Aquí llamamos s_{12} a la distancia recorrida entre $\mathbf{u}_1 \to \mathbf{u}_2$, y que no es igual al desplazamiento $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$, como ejemplifica la Figura 4.7(b).

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

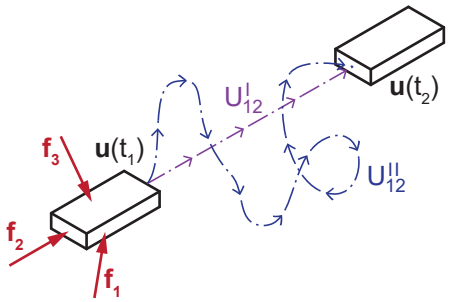


Figura 4.6: Objeto (o partícula) que se desplaza por dos trayectos diferentes entre $\mathbf{u}(t_1) \to \mathbf{u}(t_2)$: si todas las fuerzas son conservativas se cumple que $U^{\mathrm{I}}_{12} = U^{\mathrm{II}}_{12}$; mientras que basta una de ellas no-conservativas para que el trayecto importe y se tenga $U^{\mathrm{I}}_{12} \neq U^{\mathrm{II}}_{12}$.



(a) (b)

Figura 4.7: Trabajo hecho por la fuerza de roce: **(a)** la fuerza $\mathbf{f}_r$ se opone al movimiento, por lo que produce trabajo negativo; y **(b)** el trabajo de la fuerza de roce es a lo largo del trayecto s_{12}, y no del desplazamiento Δu_{12} (i.e. el camino recorrido sí importa).

4.3. Conservación de energía

4.3.1. Relación trabajo y energía potencial

En el caso de las Ecuaciones (4.7) y (4.9), notamos que existe un potencial V tal que:

$$U_{12} = -\Delta V \tag{4.12}$$

Es decir, el trabajo hecho por la fuerza es igual a su *variación de energía potencial*. Cuando se tienen fuerzas de este tipo se puede calcular el trabajo U_{12} usando sus potenciales: V_e para la fuerza elástica, y V_g para la fuerza gravitatoria.

> No hemos llamado al trabajo entre $t_1 \to t_2$ como ΔU, ya que esto último implica que se puede siempre calcular como una diferencia de valores.
>
> Se puede calcular el trabajo como una diferencia de valores, pero sólo para fuerzas con potenciales. En los potenciales para el resorte y gravedad (Ecuaciones (4.6) y (4.8)), notamos que ambos tienen un signo negativo que los antecede. Además, la derivación general de trabajo escrito por un potencial (Ecuación (4.5)) también lo tiene. El signo negativo explica que $U_{12} = -\Delta V$: el trabajo es el opuesto a la diferencia de energía potencial.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

4.3.2. Ecuación de energía utilizando potenciales

Utilizando la energía potencial elástica V_e y gravitatoria V_g para representar el trabajo de estas fuerzas, podemos expandir la expresión del trabajo de la Ecuación 4.2:

$$T_1 + \overbrace{U_{12}}^{-\Delta V + U^\star_{12}} = T_2$$

$$T_1 - (V_2 - V_1) + U^\star_{12} = T_2 \tag{4.13}$$

$$\boxed{V_1 + T_1 + U^\star_{12} = V_2 + T_2} \tag{4.14}$$

, donde $V_1 = V_{g1} + V_{e1}$ = energía potencial total en el instante t_1;
T_1 = energía cinética en el instante t_1;
$U^\star_{12}$ = trabajo hecho por las fuerzas que no tienen potenciales entre $t_1 \to t_2$. En nuestro caso, eso corresponde a fuerzas externas y fuerzas no-conservativas.

4.3.3. Energía mecánica total

Cuando todas las fuerzas que actúan son conservativas y pueden ser descritas por sus respectivos potenciales, entonces de la Ecuación (4.2) se tiene que:

$$U_{12} = \Delta T$$

$$-\Delta V = \Delta T \tag{4.15}$$

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1 \tag{4.16}$$

$$V(t_1) + T(t_1) = V(t_2) + T(t_2) \tag{4.17}$$

Es decir, cuando todas las fuerzas son conservativas se cumple:

$$V(t) + T(t) = \text{constante} \tag{4.18}$$

, donde $V(t) + T(t)$ es la *energía (mecánica) total*. Las fuerzas conservativas de uso común y para las cuales tenemos expresiones de su energía potencial son: el resorte y la gravedad (elástica y gravitatoria).

4.4. Resumen: trabajo y energía

Hay dos formas equivalentes de aplicar la ecuación de trabajo y energía; las Ecuaciones (4.2) y (4.14) que se muestran a continuación:

$$T_1 + U_{12} = T_2 \qquad\qquad V_1 + T_1 + U^\star_{12} = V_2 + T_2$$

, donde T_1 , T_2 = energía cinética en los instantes t_1 y t_2, respectivamente, e igual a $T = \frac{m}{2}\left|\dot{\mathbf{u}}\right|^2$;
U_{12} = trabajo hecho por las fuerzas entre $t_1 \to t_2$;
V_1 , V_2 = energía potencial de las fuerzas para las cuales conocemos su potencial en los instantes t_1 y t_2, respectivamente;
$U^\star_{12}$ = trabajo hecho por las fuerzas que no tienen potenciales entre $t_1 \to t_2$, i.e., fuerzas externas y fuerzas no-conservativas.

Las fuerzas constante, elástica, gravitatoria, y de roce, tienen expresiones de trabajo conocidas:

$$\text{constante:} \quad U_{12} = \mathbf{f} \cdot \Delta\mathbf{u}$$

$$\text{elástica:} \quad U_{12} = \frac{k}{2}\left(\delta_1^2 - \delta_2^2\right)$$

$$\text{gravitatoria:} \quad U_{12} = -mg\,\Delta z$$

$$\text{gravitatoria (gran escala):} \quad U_{12} = G\,m_e\,m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\text{roce:} \quad U_{12} = -f_r\ s_{12}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

El trabajo hecho por otro tipo de fuerzas, debe calcularse con la expresión general:

$$U_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}t$$

Las fuerzas que tienen potenciales, relacionan su trabajo con la energía potencial según:

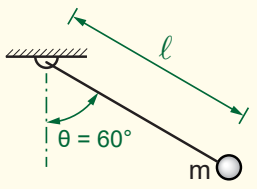
$$U_{12} = -\Delta V$$

Los potenciales de las fuerzas elástica y gravitatoria son:

$$\begin{aligned} \text{elástica:} \quad & V_e = \frac{k}{2}\delta^2 \\ \text{gravitatoria:} \quad & V_g = mg\,z \\ \text{gravitatoria (gran escala):} \quad & V_p = -G\,\frac{m_e\,m}{r} \end{aligned}$$

Ejemplo

Un péndulo de masa m se suelta en $\theta = 60°$ desde el reposo ($\dot{\theta}_0 = 0$) como muestra la Figura. Determine la tensión en la cuerda en función de θ.

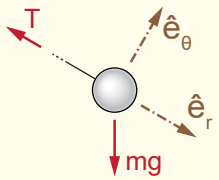


El primer paso consiste en hacer un DCL del péndulo, el que se muestra en la Figura al costado. Aplicando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton:

$$-T\,\hat{\mathbf{e}}_r + mg\,(\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r - \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta) = m\left(-\ell\,\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_r + \ell\,\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\right)$$

La ecuación en $\hat{\mathbf{e}}_r$ entrega la tensión:

$$T = mg\,\cos\theta + m\,\ell\,\dot{\theta}^2$$



Hasta aquí sólo hemos utilizado la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton, y de conocer la velocidad angular $\dot{\theta}$ tendríamos la tensión pedida. Para ello, utilizaremos el principio de trabajo y energía. Llamando t_1 al instante en que se suelta la masa; las condiciones iniciales son:

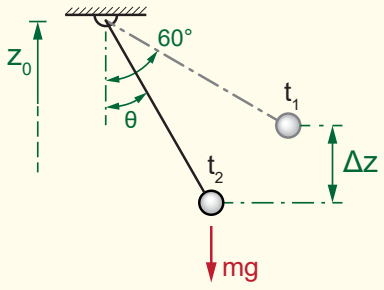
$$\theta\,(t_1) = 60° \qquad\qquad |v\,(t_1)| = 0$$

Por otro lado, para cualquier instante t_2, se tiene que:

$$|v\,(t_2)|^2 = \ell^2\,\dot{\theta}^2$$

La tensión en la cuerda no hace trabajo. Esto es porque la tensión apunta en la dirección $-\hat{\mathbf{e}}_r$, mientras que el vector de velocidad es tangente a la trayectoria y perpendicular a $\hat{\mathbf{e}}_r$, con lo que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}t = 0$$



Es decir, sólo la fuerza de gravedad hace trabajo, y es igual a:

$$\begin{aligned} U_{12} &= -mg\,\Delta z = -mg\,(z_2 - z_1) \\ U_{12} &= -mg\,[(z_0 - \ell\,\cos\theta) - (z_0 - \ell\cos 60°)] \\ U_{12} &= mg\,\ell\,(\cos\theta - \cos 60°) \end{aligned}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Utilizando el principio de trabajo y energía:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \Delta T \\ mg\,\ell\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}m\left(\ell^2\,\dot{\theta}^2 - 0\right) \\ m\,\ell\,\dot{\theta}^2 &= 2mg\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Reemplazando este valor en la ecuación de la tensión:

$$T = mg\,\cos\theta + 2mg\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) = mg\,(3\cos\theta - 1)$$

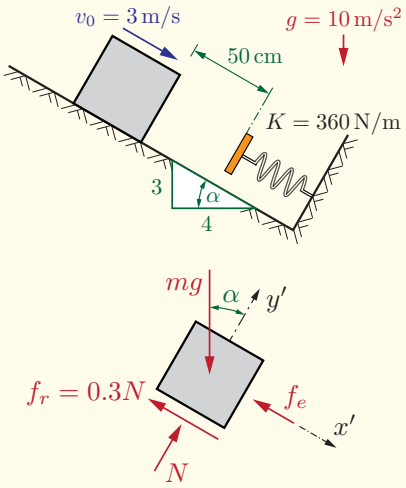
El valor máximo de tensión en la cuerda es $T_{\max} = 2mg$ ocurre cuando $\theta = 0$.

Nota: La ecuación en el sentido $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ es igual a $(-g\,\sin\theta = \ell\,\ddot{\theta})$, y sirve para obtener la posición del péndulo en el tiempo $\theta\,(t)$. Esto se estudiará en detalle en futuras secciones.

Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Example 2.11

Un bloque de peso $W = mg = 100\,\text{N}$ desliza por una superficie con coeficiente de roce (estático y dinámico) $\mu = 0{,}3$ y velocidad inicial $v_0 = 3\,\text{m/s}$. El resorte es ideal y se encuentra inicialmente en reposo. Considere que $g = 10\,\text{m/s}^2$. Determine la fuerza máxima que se produce en el resorte.



El primer paso consiste en hacer un DCL del bloque mientras desciende por la rampa, el que se muestra en la Figura al costado. Aplicando la 2da ley de Newton en el sentido y' se tiene:

$$\begin{aligned} \sum f_y &= m\,\ddot{u}_y \\ N - mg\,\cos\alpha &= (m)\,(0) \\ N &= mg\,\cos\alpha = (100)\,(4/5) = 80\,\text{N} \end{aligned}$$

Con ello, la fuerza de roce es:

$$f_r = 0{,}3\,N = (0{,}3)\,(80) = 24\,\text{N}$$

La fuerza máxima en el resorte ocurre cuando está en el punto máximo de compresión. Es decir, cuando el bloque tiene velocidad cero y el resorte se ha comprimido en δ. Con ello, las velocidades inicial y final son:

$$|v\,(t_1)| = v_0 \qquad\qquad |v\,(t_2)| = 0$$

La variación de energía cinética es:

$$\Delta T = \frac{1}{2}\,m\left[|v\,(t_2)|^2 - |v\,(t_1)|^2\right] = -\frac{1}{2}\,m\,v_0^2$$

El cálculo del trabajo U_{12} se hace analizando cada fuerza por separado:

a) fuerza normal N: no hace trabajo porque el movimiento es perpendicular a ella.

b) fuerza de roce f_r: hace trabajo negativo por una distancia igual a $50\,\text{cm} + \delta$. Es decir, el trabajo de la fuerza de roce es $U_{12} = -\,(24\,\text{N})\,(0{,}5 + \delta)$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

c) peso W: hace trabajo positivo e igual a $U_{12} = -100\,\Delta z$, con $\Delta z = -\frac{3}{5}\,(0{,}5+\delta)$.

d) resorte f_e: inicialmente se encuentra con $\delta = 0$ hasta el momento de contacto. Luego se comprime hasta llegar a δ en el instante t_2. El trabajo es $U_{12} = -\frac{k}{2}\left[(-\delta)^2 - (0)^2\right] = -\frac{k}{2}\delta^2$.

Utilizando el principio de trabajo y energía para determinar el valor de δ:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \Delta T \\ -(24)\,(0{,}5+\delta) + (100)\left(\frac{3}{5}\right)(0{,}5+\delta) - \frac{360}{2}\delta^2 &= -\frac{1}{2}\,(10)\,(3^2) \\ -180\,\delta^2 + 36\,\delta + 63 &= 0 \\ 20\,\delta^2 - 4\,\delta - 7 &= 0 \\ \rightarrow \qquad \delta &= \frac{4 \pm \sqrt{16+560}}{40} = \frac{1 \pm 6}{10} \end{aligned}$$

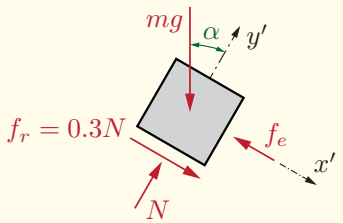
En nuestro caso, sólo la raíz positiva tiene significado físico: el resorte se comprime a $\delta = 0{,}7\,\text{m}$. La fuerza máxima que ejerce el resorte es:

$$(f_e)_{\max} = k\,\delta = (360)\,(0{,}7) = 252\,\text{N}$$

Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Example 2.12

Continuando el ejemplo anterior, encuentre la siguiente posición en que el bloque se encuentra detenido.



El primer paso consiste en hacer un DCL del bloque. El resorte se encuentra en su estado de compresión máxima y el bloque se moverá hacia arriba por el plano inclinado. Debido a ello, la fuerza de roce actúa en el sentido opuesto (siempre se opone al movimiento o al intento de movimiento).

La sumatoria de fuerzas en el sentido del plano inclinado, considerando como positivo hacia abajo del plano, es:

$$\sum f_{x'} = W\sin\alpha - f_e + f_r = (100)\left(\frac{3}{5}\right) - 252 + 24 = -168\,\text{N}$$

El signo negativo indica que hay un desbalance hacia arriba del plano inclinado. Es decir, el bloque no está en equilibrio y comenzará a subir por el plano inclinado.

Las velocidades inicial (máxima compresión del resorte) y final (nuevamente detenido) son cero: la variación de energía cinética es $\Delta T = 0$.

Supuesto 1: El bloque regresa una distancia s menor a δ por lo que el resorte quedará comprimido $\delta - s$. En ese caso, los trabajos de las fuerzas son:

a) fuerza normal N: no hace trabajo.

b) fuerza de roce f_r: hace trabajo negativo por una distancia igual a s, y con ello $U_{12} = -24\,s$.

c) peso W: hace trabajo negativo $U_{12} = -100\,\Delta z$, con $\Delta z = \frac{3}{5}s$.

d) resorte f_e: reduce su compresión desde δ a $\delta - s$. El trabajo es $U_{12} = -\frac{k}{2}\left[(-\delta+s)^2 - (-\delta)^2\right]$.

BORRADOR PUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Utilizando el principio de trabajo y energía para determinar el valor de s:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \Delta T \\ -(24)(s) + (100)\left(\frac{3}{5}\right)(-s) - \frac{360}{2}\left[(-\delta+s)^2 - (-\delta)^2\right] &= 0 \\ 180\,s^2 - 168\,s &= 0 \\ 15\,s^2 - 14\,s &= 0 \end{aligned}$$

La primera solución es $s_1 = 0$; condición con el resorte en compresión máxima. La segunda solución es $s_2 = \frac{14}{15}$ y es el segundo punto en que se detiene el bloque. El problema es que como $s_2 > \delta$, el bloque en realidad se despega del resorte: el supuesto está errado.

Supuesto 2: El bloque regresa una distancia s mayor a δ por lo que el resorte quedará en reposo y el bloque se despegará del mismo. En ese caso, los trabajos serán iguales al caso anterior excepto por el resorte, el cual terminará con $\delta = 0$ (condición de reposo). Utilizando el principio de trabajo y energía para determinar el valor de s:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \Delta T \\ -(24)(s) + (100)\left(\frac{3}{5}\right)(-s) - \frac{360}{2}\left[(0)^2 - (-\delta)^2\right] &= 0 \\ 84\,s - \frac{441}{5} &= 0 \\ 20\,s - 21 &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, el bloque sube desde la posición de máxima compresión $s = \frac{21}{20}\,\mathrm{m}$, que medido desde la posición de reposo del resorte es:

$$s - \delta = \frac{21}{20} - \frac{7}{10} = \frac{7}{20} = 0{,}35\,\mathrm{m}$$

Es decir, el bloque que inicialmente comenzó a 0,5 m del resorte y con velocidad inicial $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$, choca con el resorte y vuelve a subir hasta detenerse a una distancia de 0,35 m del mismo.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

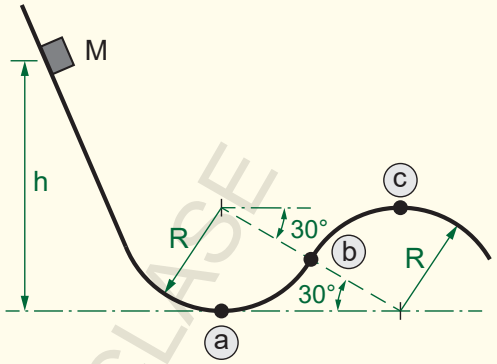
Sugerido

Resuelva los dos problemas anteriores usando potenciales V_g y V_e para la fuerza de gravedad y resorte, respectivamente. Notar que para el cálculo de V_g, puede fijar $z = 0$ en cualquier altura.

Ejemplo

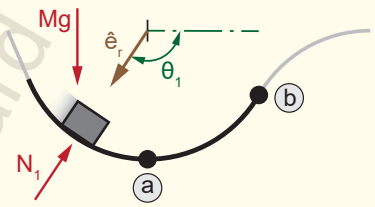
Lim Yung-Kuo *Problems and Solutions on Mechanics*, Problem 1007

Un bloque de masa M desliza por un tobogán sin roce desde una altura h, comenzando su carrera desde el reposo ($v_0 = 0$). Las secciones curvas del tobogán tienen radio R. Para cierta altura h, la masa dejará de estar en contacto con el tobogán. Determine el punto en el tobogán donde la masa deja de hacer contacto, y la altura mínima $h_{\min}$ para que ocurra.



Haremos dos DCL, uno para cada tramo curso, para así comprender mejor lo que ocurre. En cada tramo curvo definimos θ_1 y θ_2, respectivamente, para indicar la posición del bloque dentro de la curva. Para describir una trayectoria circular, es necesario tener una aceleración radial igual a $\ddot{u}_r = -R\dot{\theta}^2 = -v_\theta^2/R$.

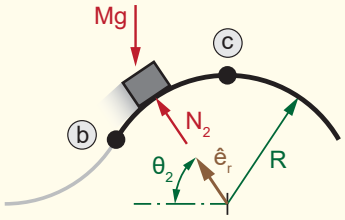
En el primer tramo curvo, utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton en la dirección radial $\hat{\mathbf{e}}_r$:



$$\sum f_r = m\,\ddot{u}_r$$
$$Mg\,\sin\theta_1 - N_1 = M\left(-\frac{v_\theta^2}{R}\right)$$
$$N_1 = M\left(g\,\sin\theta_1 + \frac{v_\theta^2}{R}\right)$$

La normal es positiva para todo θ_1 posible (notar que $30° < \theta_1 < 180°$) y para cualquier velocidad mayor a cero. Debido a ello, la masa se mantiene pegada a la pista en todo el primer tramo.

En el segundo tramo curvo, utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton en la dirección radial $\hat{\mathbf{e}}_r$:



$$\sum f_r = m\,\ddot{u}_r$$
$$-Mg\,\sin\theta_2 + N_2 = M\left(-\frac{v_\theta^2}{R}\right)$$
$$N_2 = M\left(g\,\sin\theta_2 - \frac{v_\theta^2}{R}\right)$$

Si la rapidez v_θ es considerablemente grande, la normal deberá ser negativa. Es decir, la pista debe "tirar" o "jalar" del bloque para que se mantenga en la pista: ¡imposible!

La contribución del peso, el término positivo de N_2, será mínimo en el punto **(b)**; i.e. cuando $\theta_2 = 30°$. Intuitivamente, se puede deducir que la rapidez v_θ es máxima para ese tramo curvo en ese punto (algo que se confirmará a continuación). Es decir, la masa perderá contacto con la pista (i.e. $N_2 < 0$) en el punto **(b)**.

La rapidez en el punto **(b)** depende de la altura inicial del bloque. Utilizando el principio de trabajo y energía para una posición cualquiera del segundo tramo curvo, se tiene que:

$$U_{12} = \Delta T$$
$$-Mg\,\Delta z = \frac{1}{2}M\left(v^2 - \underbrace{v_0^2}_{0}\right)$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Tomando como datum ($z = 0$) el punto más bajo del tobogán, entonces $\Delta z = R\sin\theta_2 - h$, y con ello:

$$-Mg\,(R\sin\theta_2 - h) = -\frac{1}{2}M\,v^2$$

$$v = \sqrt{2g\,(h - R\sin\theta_2)}$$

El resultado anterior confirma que el punto de máxima velocidad del segundo tramo curvo coincide con el punto **(b)**, donde $\theta_2 = 30°$. Es decir:

$$(v_\theta)_{\text{b}} = v\,(\theta_2 = 30°) = \sqrt{g\,(2h - R)}$$

La altura mínima $h_{\min}$ es la que resulta en una fuerza normal $N_2 = 0$:

$$N_2 = M\left[g\,\frac{1}{2} - \frac{g\,(2h-R)}{R}\right] = Mg\left(\frac{1}{2} - 2\frac{h}{R} + 1\right)$$

$$N_2 = \frac{Mg}{2}\left(3 - 4\frac{h}{R}\right)$$

Es decir, la masa se despega de la pista si es liberado desde una altura h tal que:

$$h > h_{\min} = \frac{3}{4}R$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

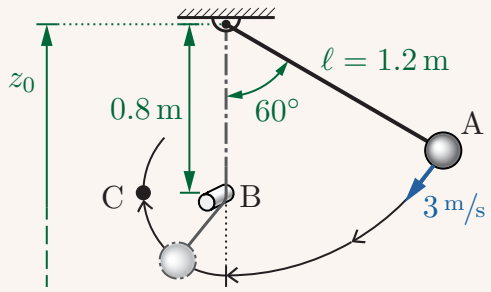
Sugerido

Basado en Meriam 7th ed, Problem 3/129

Una bola de masa m se suelta desde la posición A con velocidad $3\,\text{m/s}$. En el punto más bajo de su trayectoria, la cuerda que lo sujeta golpea un *pin* (o clavija) que se encuentra en B. La bola continua su trayectoria pasando luego por el punto C. Se pide determinar:

a) La rapidez v_c de la bola cuando pasa por el punto C.

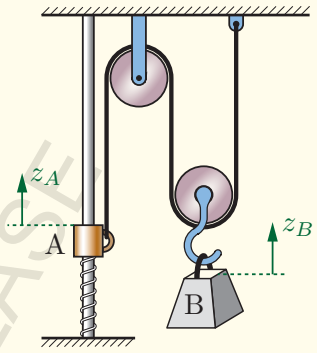
b) La razón entre las velocidades angulares ω_C/ω_A.



Nota: Trate de resolver el problema utilizando conservación de energía, i.e. $V_1 + T_1 = V_2 + T_2$.

Ejemplo

En el sistema de la Figura, el resorte tiene una rigidez $k = 200\,\mathrm{N/m}$ y se encuentra unido al collarín. Las masas del collarín y contrapeso son $m_\mathrm{a} = 60\,\mathrm{kg}$ y $m_\mathrm{b} = 110\,\mathrm{kg}$, respectivamente. Considere la aceleración de la gravedad como $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Inicialmente, el sistema del resorte y collarín se encuentran en equilibrio y reposo (sin la masa B). El sistema comienza a moverse tras colgar la masa B. Determine las velocidades de A y B una vez que B ha caído 1 m.



Inicialmente, el resorte se encuentra comprimido una distancia:

$$\delta_1 = \frac{W_\mathrm{a}}{k} = \frac{m_\mathrm{a}\, g}{k}$$

Para los cuerpos A y B, consideraremos como datum ($z = 0$) las posiciones iniciales, i.e., $z_\mathrm{a} = z_\mathrm{b} = 0$ en el instante en que se cuelga la masa B. Es decir, el collarín tiene comprimido el resorte δ_1 cuando $z_\mathrm{a} = 0$. Como no hay fuerzas adicionales actuando sobre el sistema y ambas fuerzas tienen potenciales: se conservará la energía total del sistema. Evaluando cada fuerza en los estados inicial t_1 y de interés t_2, se tiene:

1. Energía potencial elástica (resorte):

$$\begin{aligned}\text{Inicial:}\quad & V_{e1} = \frac{k}{2}\,\delta_1^2 = \frac{k}{2}\left(\frac{m_\mathrm{a}\, g}{k}\right)^2 \\ \text{Interés:}\quad & V_{e2} = \frac{k}{2}\left(z_\mathrm{a} - \delta_1\right)^2 = \frac{k}{2}\left(z_\mathrm{a} - \frac{m_\mathrm{a}\, g}{k}\right)^2\end{aligned}$$

2. Energía potencial gravitatoria:

$$\begin{aligned}\text{Inicial:}\quad & V_{g1} = \left(V_{g1}\right)_\mathrm{a} + \left(V_{g1}\right)_\mathrm{b} = 0 \\ \text{Interés:}\quad & V_{g2} = \left(V_{g2}\right)_\mathrm{a} + \left(V_{g2}\right)_\mathrm{b} = m_\mathrm{a}\, g\, z_\mathrm{a} + m_\mathrm{b}\, g\, z_\mathrm{b}\end{aligned}$$

3. Energía cinética:

$$\begin{aligned}\text{Inicial:}\quad & T_1 = \left(T_1\right)_\mathrm{a} + \left(T_1\right)_\mathrm{b} = 0 \\ \text{Interés:}\quad & T_2 = \left(T_2\right)_\mathrm{a} + \left(T_2\right)_\mathrm{b} = \frac{1}{2}\, m_\mathrm{a}\left(v_\mathrm{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\, m_\mathrm{b}\left(v_\mathrm{b}\right)^2\end{aligned}$$

Luego, por conservación de energía, se tiene que:

$$\begin{aligned} V_1 + T_1 &= V_2 + T_2 \\ \frac{k}{2}\left(\frac{m_\mathrm{a}\, g}{k}\right)^2 &= \frac{1}{2}\, m_\mathrm{a}\left(v_\mathrm{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\, m_\mathrm{b}\left(v_\mathrm{b}\right)^2 + m_\mathrm{a}\, g\, z_\mathrm{a} + m_\mathrm{b}\, g\, z_\mathrm{b} + \frac{k}{2}\left(z_\mathrm{a} - \frac{m_\mathrm{a}\, g}{k}\right)^2\end{aligned}$$

Utilizando la ligadura del sistema de poleas, se obtienen las siguientes relaciones:

$$z_\mathrm{a} = -2\, z_\mathrm{b} \qquad\qquad v_\mathrm{a} = -2\, v_\mathrm{b}$$

Se puede resolver para la velocidad v_b si reemplazamos $z_\mathrm{b} = -1\,\mathrm{m}$, $z_\mathrm{a} = 2\,\mathrm{m}$, y $v_\mathrm{a} = -2\, v_\mathrm{b}$, en la ecuación de conservación de energía:

$$\begin{aligned}\frac{200}{2}\left(\frac{60\cdot 10}{200}\right)^2 &= \frac{60}{2}\left(-2\, v_\mathrm{b}\right)^2 + \frac{110}{2}\left(v_\mathrm{b}\right)^2 + (60)\,(10)\,(2) + (110)\,(10)\,(-1) + \frac{200}{2}\left(2 - \frac{60\cdot 10}{200}\right)^2 \\ 900 &= 120\, v_\mathrm{b}^2 + 55\, v_\mathrm{b}^2 + 1200 - 1100 + 100 \\ 700 &= 175\, v_\mathrm{b}^2 \\ v_\mathrm{b}^2 &= 4\end{aligned}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Se tienen dos soluciones $v_\mathrm{b} = \pm 2\,\mathrm{m/s}$, pero como sabemos que B baja (mientras que A sube), la velocidad negativa es la de interés. Es decir, cuando $z_\mathrm{b} = -1\,\mathrm{m}$, las velocidades de la masa y collarín son:

$$v_\mathrm{b} = -2\,\mathrm{m/s} \qquad\qquad v_\mathrm{a} = 4\,\mathrm{m/s}$$

Nota: La masa B continuará descendiendo pero el resorte hará que desacelere hasta detenerla y hacerla regresar. La solución $v_\mathrm{b} = 2\,\mathrm{m/s}$ es válida: será la velocidad que tendrá la masa B en $z_\mathrm{b} = -1\,\mathrm{m}$ luego de llegar a su punto más bajo y comenzar a subir. El sistema oscilará infinitamente ya que la energía se conserva. Los osciladores serán estudiados en detalle en las próximas secciones.

4.5. Potencia

Un motor pequeño puede hacer mucho trabajo si tiene el tiempo suficiente. Un motor poderoso puede hacer el mismo trabajo en menor tiempo. La capacidad de una máquina de hacer trabajo (o entregar energía) en un periodo de tiempo es *potencia*:

$$P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int \mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}t\right)$$

Es decir, la potencia es un escalar definido como:

$$\boxed{P = \mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{u}}} \tag{4.19}$$

La unidad de potencia más común es el Watt:

$$\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}$$

En el área de motores, se usa también la unidad de *caballo de fuerza*, cuya nomenclatura es hp:

$$746\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{hp}$$

Adquirido el concepto de potencia, la relación inversa cobra sentido físico: el trabajo es toda la potencia entregada entre $t_1 \to t_2$:

$$U_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} P\,(t)\;\mathrm{d}t$$

4.5.1. Eficiencia

La razón entre la potencia que entrega una máquina y la potencia que se le suministra es la *eficiencia mecánica*:

$$e_m = \frac{P_\mathrm{output}}{P_\mathrm{input}}$$

, donde P_output = es la potencia de salida;
P_input = es la potencia de entrada (suministrada).

Toda máquina con partes móviles va a tener pérdidas de energía producto del roce, el cual disipa energía por medio de calor y sonido. Como la energía no se puede crear, menos aún en el interior de una máquina, la eficiencia es siempre menor a 1. Es decir:

$$e_m = \frac{P_\mathrm{output}}{P_\mathrm{input}} < 1 \tag{4.20}$$

Además de la eficiencia mecánica (e_m); existe la *eficiencia eléctrica* (e_e), y la *eficiencia térmica* (e_t). Con ello, la *eficiencia total* (e) es:

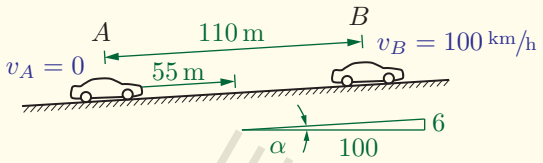
$$e = e_m\, e_e\, e_t \tag{4.21}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

Meriam 7th ed, Problem 3/119

Un automóvil de 1700 kg de masa comienza desde el reposo en A y acelera uniformemente cuesta arriba alcanzando 100 km/h en el punto B. Se pide determinar:

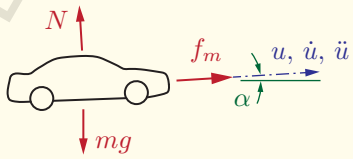


a) La fuerza requerida f_m.

b) La potencia requerida en el punto B.

c) La potencia requerida en el punto C (punto medio entre A y B).

El primer paso consiste en hacer un DCL del automóvil.



Luego, la velocidad en el punto B es:

$$v_B = 100\,\text{km/h} = \frac{250}{9}\,\text{m/s} = 27{,}778\,\text{m/s}$$

Con el DCL se puede ver que si la aceleración del vehículo es constante, es porque f_m es constante. La diferencia de altura entre los puntos A y B es:

$$\Delta z = 110\,\sin\alpha = (110)\left(\frac{6}{\sqrt{100^2+6^2}}\right) = 6{,}5882\,\text{m}$$

Luego, utilizando el principio de trabajo y energía:

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \Delta T \\ -mg\,\Delta z + f_m\,110 &= \frac{1}{2}\,m\left(27{,}778^2 - 0\right) \\ f_m &= 6961{,}2\,\text{N} \end{aligned}$$

, donde la fuerza normal no hizo trabajo porque es ortogonal al vector de velocidad. Con ello, la potencia en el punto B es:

$$\begin{aligned} P_B &= v_B\,f_m = (27{,}778)\,(6961{,}2) = 193367\,\text{W} \\ P_B &= 193{,}37\,\text{kW} \quad (259\,\text{hp}) \end{aligned}$$

Habiéndo calculado f_m, es sencillo determinar la velocidad en C utilizando el principio de trabajo y energía. La diferencia de altura entre los puntos A y C es:

$$\Delta z = 55\,\sin\alpha = (55)\left(\frac{6}{\sqrt{100^2+6^2}}\right) = 3{,}2941\,\text{m}$$

Con ello, la velocidad en el punto C se obtiene de:

$$\begin{aligned} U_{AC} &= \Delta T \\ -mg\,\Delta z + f_m\,55 &= \frac{1}{2}\,m\left(v_C^2 - 0\right) \\ 327932{,}1 &= \frac{1}{2}\,m\,v_C^2 \\ v_C &= 19{,}64\,\text{m/s} \end{aligned}$$

Finalmente, la potencia en C es:

$$\begin{aligned} P_C &= v_C\,f_m = (19{,}64)\,(6961{,}2) = 136718\,\text{W} \\ P_C &= 136{,}72\,\text{kW} \quad (183\,\text{hp}) \end{aligned}$$

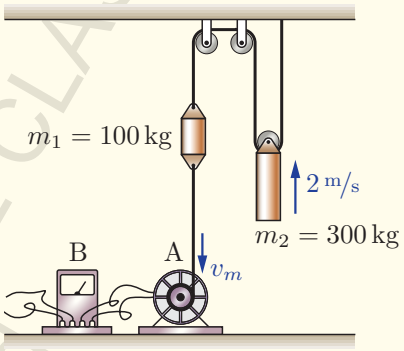
BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Nota: Alternativamente, para determinar la fuerza f_m se podría haber buscado la aceleración necesaria para tener $v_B = 100\,{}^{\text{km}}/_{\text{h}}$; obteniéndose $a = 3{,}5073\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$. Este procedimiento es igualmente válido, pero requiere un desarrollo más extenso, y probablemente requiere calcular los tiempos $t_A = 7{,}92\,\text{s}$ y $t_B = 5{,}6\,\text{s}$.

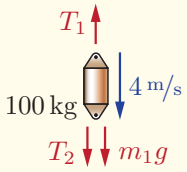
Ejemplo

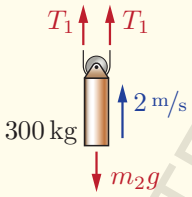
Meriam 9th ed, Problem 3/96

Un motor en A eleva un cilindro de masa $m_2 = 300\,\text{kg}$ de la Figura a velocidad constante e igual a $2\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}}$. El multímetro en B registra una entrada de $2{,}2\,\text{kW}$ al motor. Determine la eficiencia combinada e (eléctrica y mecánica) del sistema.



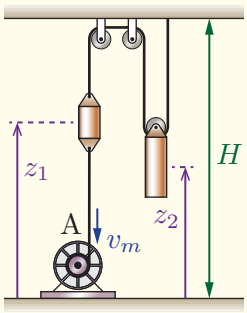
El primer paso consiste en hacer DCLs para cada uno de los cilindros del sistema.





Utilizando la 2da ley de Newton con el cilindro mayor de $300\,\text{kg}$ que se mueve a velocidad constante (aceleración es nula) se tiene que:

$$2\,T_1 - \underbrace{300\,g}_{m_2\,g} = \underbrace{m_2\,\ddot{z}_2}_{0} \qquad \longrightarrow \qquad T_1 = 150\,g$$



, mientras que para el cilindro menor se tiene que:

$$T_1 - T_2 - \underbrace{100\,g}_{m_1\,g} = \underbrace{m_1\,\ddot{z}_1}_{0} \qquad \longrightarrow \qquad T_2 = 50\,g$$

Es decir, el motor tira de la cuerda con tensión (fuerza) igual a $T_2 = 50\,g$. Las ecuaciones de ligadura (movimiento dependiente) se obtiene de las dos cuerdas del problema. En ellas, se debe considerar que el motor reduce la longitud de la cuerda menor a velocidad v_m constante:

$$\ell_1 - v_m\,t = z_1 + \text{cte} \qquad\qquad \ell_2 = (H - z_1) + 2\,(H - z_2) + \text{cte}$$

Sabemos que $\dot{z}_2 = 2\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}}$, y con las ecuaciones de ligadura en velocidad se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} v_m &= -\dot{z}_1 \\ \dot{z}_1 &= -2\,\dot{z}_2 \end{aligned}\right\} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= -4\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}} \\ v_m &= 4\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}} \end{aligned}$$

Con ello, la potencia que entrega el motor es:

$$P = \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} = T_2\,v_m = (50\,g)\,(4) = 200\,g = 1962\,\text{W}$$

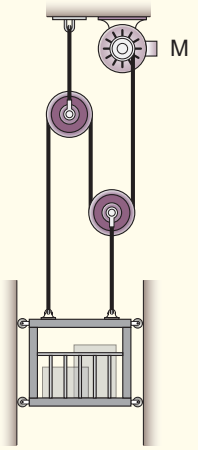
Finalmente, la eficiencia (combinada) del motor es:

$$e = \frac{P_{\text{output}}}{P_{\text{input}}} = \frac{1962}{2200} = 0{,}8918$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

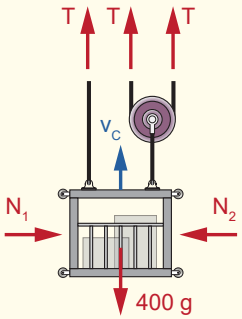
Ejemplo

Basado en Hibbeler 14th ed, Problem 14–51



El motor en M sube una caja de elevador la cual tiene masa $m_c = 400\,\text{kg}$. El motor ejerce una fuerza constante de 2000 N en el cable. La eficiencia total del motor es $e = 0{,}65$. Los cables y poleas son ideales, y no hay roce en las poleas ni apoyos laterales del elevador. El motor pone en movimiento al elevador el cual se encontraba inicialmente en reposo. Determine la potencia que se debe suministrar al motor cuando el elevador ha subido 5 m. Exprese su resultado en caballos de fuerza.

El primer paso consiste en hacer un DCL de la caja del elevador. El DCL incluye la polea para así determinar que la fuerza sobre la caja del elevador es igual a $3\,T_1$ (si se hace un DCL de la polea aislada se obtiene el mismo resultado).



Las fuerzas normales (N_1 y N_2) ejercidas por las paredes laterales no producen trabajo al ser ortogonales al movimiento. Las fuerzas T_1 y de gravedad $m\,g = 400\,g$ son ambas constantes, y su trabajo es sencillo de calcular. Utilizando el principio de trabajo y energía para un desplazamiento de 5 m hacia arriba:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \Delta T \\ (3\,T - mg)\,(\Delta u) &= \frac{1}{2}\,m\,(v_c^2 - 0) \\ 10380 &= 200\,v_c^2 \\ v_c &= 7{,}204\,\text{m/s} \end{aligned}$$

La potencia que requiere el motor se puede determinar de dos maneras: **(a)** en la caja del elevador; y **(b)** en la salida del motor.

Método 1: potencia en la caja del elevador.

El motor ejerce sobre la caja del elevador una fuerza total de $3\,T = 6000\,\text{N}$, al mismo tiempo que la eleva a $v_c = 7{,}204\,\text{m/s}$. Es decir, la potencia que ejerce el motor es:

$$P_{\text{output}} = 3\,T\,v_c = 43{,}225\,\text{kW} = 57{,}94\,\text{hp}$$

Método 2: potencia en la salida del motor.

El motor sobre el cable una fuerza $T = 2000\,\text{N}$, al mismo tiempo que recoge (o consume) el cable con velocidad $v_m = 3\,v_c = 21{,}612\,\text{m/s}$. Es decir, la potencia que ejerce el motor es:

$$P_{\text{output}} = T\,v_m = 43{,}225\,\text{kW} = 57{,}94\,\text{hp}$$

Finalmente, si la eficiencia del motor es $e = 0{,}65$, la potencia que se requiere suministrar es:

$$\begin{aligned} e &= \frac{P_{\text{output}}}{P_{\text{input}}} \\ P_{\text{input}} &= \frac{57{,}94}{0{,}65} = 89{,}14\,\text{hp} \end{aligned}$$

Nota: En el cálculo de la potencia no se considera el peso mg ya que esa fuerza no la ejerce el motor.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Capítulo 5

Vibración & Osciladores

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Las vibraciones son de especial importancia en ingeniería sísmica (estructural), mecánica, acústica, y eléctrica. A modo de ejemplo, la respuesta (desplazamiento) en el tiempo de un edificio sometido a las cargas de un terremoto se analiza con vibraciones.

5.0.1. Vibración libre sin amortiguamiento



Figura 5.1: Sistema masa–resorte: **(a)** un carro de masa m conectado a un resorte horizontal de rigidez k constituye un sistema masa–resorte; y **(b)** diagrama de cuerpo libre del sistema masa–resorte suponiendo un estiramiento x del resorte.

Consideremos un sistema masa–resorte como muestra la Figura 5.1(a). El DCL de la masa se muestra en la Figura 5.1(b), donde se asume un estiramiento del resorte x. En la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ sólo actúa la fuerza $f_e = -kx\,\hat{\mathbf{x}}$, donde se ha asumido que el resorte es de tipo lineal-elástico (e ideal). Utilizando la 2^{da} ley de Newton en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ (movimiento rectilíneo) se obtiene:

$$\sum f_x = m\,\ddot{x}$$
$$-k\,x = m\,\ddot{x}$$

Es decir, la *ecuación del movimiento* del sistema es la ecuación diferencial:

$$m\,\ddot{x} + k\,x = 0 \tag{5.1}$$

, que corresponde a un *oscilador armónico simple*. Es conveniente reescribir la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$\ddot{x} + \omega_n^2\,x = 0 \tag{5.2}$$

, donde $\omega_n = \sqrt{k/m} =$ es la *frecuencia natural circular*, la cual tiene unidades de $^{\text{rad}}/_{\text{s}}$.

La solución de la EDO en la Ecuación (5.2) es:

$$\boxed{x\left(t\right) = A\,\cos\left(\omega_n\,t\right) + B\,\sin\left(\omega_n\,t\right)} \tag{5.3}$$

, donde A y B se determinan utilizando las condiciones iniciales del oscilador. Es decir:

$$A = x_0 \qquad\qquad B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \tag{5.4}$$

Se puede verificar fácilmente que la Ecuación (5.3) es en efecto la solución de la EDO de la Ecuación (5.2). Si derivamos la solución dos veces se obtiene:

$$\dot{x} = -A\,\omega_n\,\sin\left(\omega_n\,t\right) + B\,\omega_n\,\cos\left(\omega_n\,t\right)$$
$$\ddot{x} = -A\,\omega_n^2\,\cos\left(\omega_n\,t\right) - B\,\omega_n^2\,\sin\left(\omega_n\,t\right)$$

Reemplazando en la EDO, se comprueba que efectivamente satisface la ecuación:

$$\ddot{x} + \omega_n^2\,x \stackrel{?}{=} 0$$
$$-A\,\omega_n^2\,\cos\left(\omega_n\,t\right) - B\,\omega_n^2\,\sin\left(\omega_n\,t\right) + \omega_n^2\,\left[A\,\cos\left(\omega_n\,t\right) + B\,\sin\left(\omega_n\,t\right)\right] = 0$$
$$0 = 0$$

Utilizando identidades trigonométricas, la solución de la Ecuación (5.3) se puede reescribir como:

$$x\left(t\right) = C\,\sin\left(\omega_n\,t + \psi\right) \tag{5.5}$$

, donde C es la *amplitud* de la oscilación, y ψ es el *ángulo de fase*. Esta ecuación es también una solución de la EDO de la Ecuación (5.2), y cuyas constantes son:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \qquad \psi = \operatorname{atan}\left(\frac{A}{B}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{x_0\,\omega_n}{\dot{x}_0}\right) \tag{5.6}$$

En vibraciones (mecánicas, eléctricas, óptica, y acústica) se suele utilizar un *fasor*[1] para analizar y representar gráficamente una oscilación. Su análisis se basa en una representación compleja de la oscilación a través de la ecuación de Euler; algo que escapa el contenido de este curso. No obstante, nos permite visualizar gráficamente los parámetros de un oscilador. La Figura 5.2 muestra un fasor, que consiste en un vector que rota con rapidez ω_n. Al respecto se puede ver:

a) El largo del vector giratorio es la amplitud de la oscilación C.

b) El vector gira con rapidez ω_n.

c) Inicialmente ($t = 0$) el fasor se encuentra en la posición del ángulo de fase ψ.

d) La amplitud de la oscilación se registra en uno de los ejes coordenados del vector giratorio versus el eje tiempo t.

e) La posición inicial x_0 corresponde a la intersección con el eje x cuando $t = 0$, y corresponde a $x_0 = C\,\sin\psi$.

f) La velocidad inicial $\dot{x}_0$ corresponde a la pendiente inicial de la oscilación, y corresponde a $\dot{x}_0 = C\,\omega_n\,\cos\psi$.

g) La duración de una oscilación completa corresponde a T_n.

h) El número de oscilaciones que ocurren durante $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ corresponde a f_n (no mostrado en la Figura).

[1] En inglés *phasor*.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

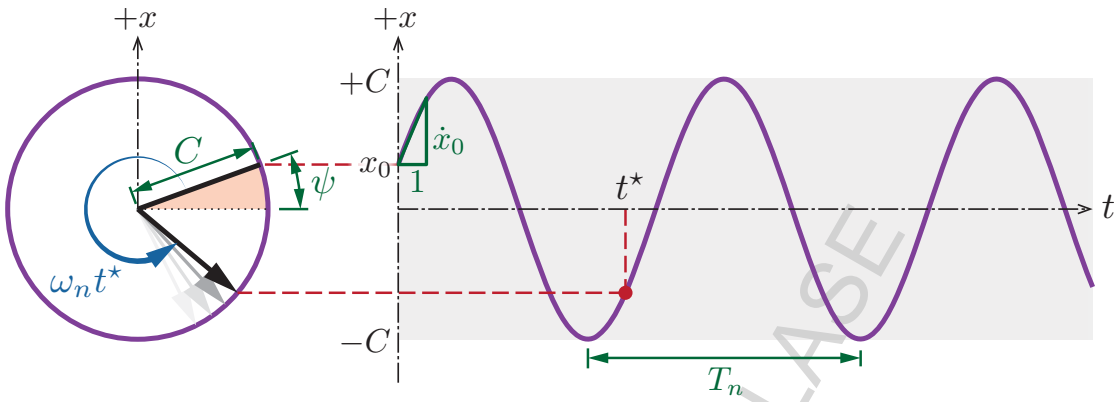


Figura 5.2: Fasor; que constituye una representación gráfica para una oscilación. La oscilación se suele estudiar en su forma compleja, lo que ofrece ventajas para su análisis.

> Esto tiene relación con la corriente de hogar, también conocida como *monofásica*, la que tiene 1 sólo oscilador en su polaridad. En cambio, la corriente industrial, también conocida como *trifásica*, tiene 3 osciladores. En la corriente trifásica cada fasor está a 120° uno del otro (distintos valores de ψ).

5.0.2. Péndulos

En las secciones anteriores determinamos que la ecuación diferencial para obtener la posición de un péndulo es:

$$m\ell\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \tag{5.7}$$

La serie de Taylor para el seno es:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$$

Si las oscilaciones son pequeñas, entonces $\theta^3 \approx 0$ y con ello $\sin\theta \approx \theta$. Es decir, un péndulo cuyas oscilaciones son pequeñas está gobernado por:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0} \tag{5.8}$$

, que es la ecuación de un oscilador armónimo simple con $\omega_n = \sqrt{g/\ell}$.

> No está de más repetirlo: la Ecuación (5.8) es aproximada. Tratar un péndulo como un oscilador armónico es bastante preciso en la medida en que las oscilaciones sean pequeñas.

5.0.3. Posición de equilibrio con fuerzas estáticas

El caso de un oscilador con cargas estáticas no difiere mucho del caso estándar. La Figura 5.3 muestra un resorte de longitud natural ℓ_0 que se encuentra inicialmente en reposo. Si al resorte se le cuelga una masa m, la fuerza elástica y de gravedad estarán en equilibrio (estático) con el resorte estirado δ_{st}:

$$\sum f_z = f_e - mg = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \delta_{st} = \frac{mg}{k}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Es decir, si el oscilador se ubica en la posición $z_a = \delta_{st}$ y se suelta, el mismo se mantendrá quieto ya que $\sum f = m\,a = 0$ (el sistema no acelera). Esto corresponde a la *posición de equilibrio del oscilador*: el punto en el cual el oscilador se quedará quieto si no es perturbado.

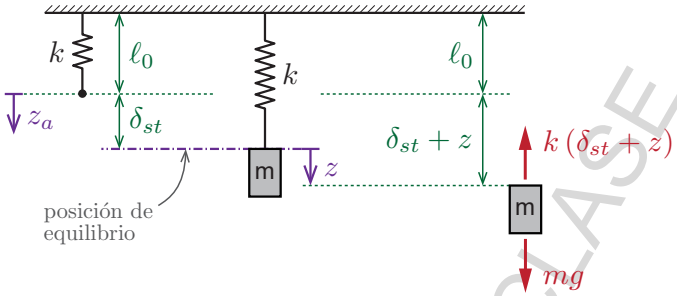


Figura 5.3: Oscilador con carga estática producto de la gravedad. La coordenada z_a se mide desde la posición de reposo del resorte, mientras que z se mide desde la nueva posición de equilibrio es $z_a = \delta_{st} = {}^{mg}/_{k}$.

> Siempre existirán fuentes de roce y pérdidas de energía, por lo que todo oscilador eventualmente se detendrá. La posición en la que se detiene el oscilador una vez que haya transcurrido suficiente tiempo es también la *posición de equilibrio*.
>
> Los osciladores sobre-amortiguados son una excepción de esto. Los osciladores amortiguados serán estudiados en detalle en las siguientes secciones.

Volviendo al ejemplo de las Figura 5.3; definiremos una nueva coordenada z desde la posición de equilibrio. La masa se cuelga en $t = 0$, instante en el cual el oscilador se encuentra en $z_0 = -\delta_{st}$ (en coordenada absoluta corresponde a $z_a = 0$). La masa comenzará a oscilar debido a que se encuentra con posición inicial distinta de cero. La misma Figura 5.3 muestra el DCL de la masa en una posición perturbada (fuera de su posición de equilibrio). Utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton, y considerando el eje $+z$ hacia abajo:

$$-f_e + mg = m\,\ddot{z}$$
$$-k\,(\delta_{st} + z) + mg = m\,\ddot{z}$$

Sabemos que $\delta_{st} = {}^{mg}/_{k}$, que reemplazado en la ecuación anterior resulta:

$$-k\left(\frac{mg}{k} + z\right) + mg = m\,\ddot{z} m\,\ddot{z} + k\,z \qquad = 0$$

Es decir, la aplicación de una carga estática no cambia la naturaleza del oscilador, sino que sólo redefine su posición de equilibrio.

La aplicación de una fuerza estática, que en este caso se produce al "colgar" una masa del resorte, resulta en un oscilador cuya posición en el tiempo es:

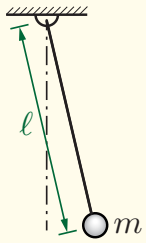
$$z_a\,(t) = \delta_{st} + z(t) \tag{5.9}$$

Es decir, la posición es $z(t)$ que corresponde al oscilador ignorando la carga estática, a lo que se le suma una deformación producto de la carga estática. La solución de $z(t)$ se puede obtener con la Ecuación (5.3).

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

Determine la longitud ℓ que debe tener un péndulo de oscilaciones pequeñas (θ pequeño) para que su periodo sea de 2 s.



$$T_n = 2\,\text{s} \quad \longrightarrow \quad f_n = \frac{1}{2} = 0{,}5\,\text{Hz}$$
$$\omega_n = 2\pi\, f_n = \pi\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$$

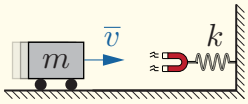
Sabemos que en un péndulo de oscilaciones pequeñas se cumple que $\sin\theta \approx \theta$, y con ello también:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$
$$\omega_n^2 = \pi^2 = \frac{g}{\ell}$$
$$\ell = \frac{g}{\pi^2} = 0{,}994\,\text{m}$$

Es decir, el péndulo (de oscilaciones pequeñas) debe tener un largo $\ell = 0{,}994\,\text{m}$ para que cada oscilación tarde $T_n = 2\,\text{s}$.

Ejemplo

Un carro de masa m viaja con velocidad $\overline{v}$ hacia un resorte con un imán en su extremo. En el instante $t = 0$ el imán se adhiere al carro. Se pide determinar:



a) La compresión máxima del resorte.

b) El tiempo que tarda el resorte en regresar a su longitud inicial (longitud natural) luego del choque.

c) La velocidad en $t = {}^{2\pi}/_{3}\,\text{s}$ si se tiene que $k = 160\,{}^{\text{N}}/_{\text{m}}$, $m = 2{,}5\,\text{kg}$, y $\overline{v} = 6\sqrt{3}\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}}$.

Sabemos que en $t = 0$ la masa hace contacto con el imán y el oscilador (sistema masa–resorte) tendrá como condiciones iniciales:

$$x_0 = 0 \qquad\qquad \dot{x}_0 = \overline{v}$$

, y con ello las constantes de la ecuación de movimiento del oscilador son:

$$A = x_0 = 0 \qquad\qquad B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} = \frac{\overline{v}}{\omega_n}$$

, con $\omega_n = \sqrt{{}^{k}/_{m}}$. Es decir, la ecuación del oscilador es:

$$x(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$
$$x(t) = \frac{\overline{v}}{\omega_n}\sin(\omega_n t)$$

La amplitud del oscilador es:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\overline{v}}{\omega_n}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

, con lo que la compresión máxima del resorte es justamente:

$$\delta_{\max} = C = \overline{v}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La masa hace una oscilación completa en T_n, por lo que regresa a su largo inicial en:

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega_n}\right) = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La ecuación que describe la velocidad del sistema es:

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \overline{v}\,\cos\left(\omega_n\, t\right)$$

Por otro lado, si $k = 160\,{}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m}}$ y $m = 2{,}5\,\mathrm{kg}$ la frecuencia natural circular del sistema es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{160}{2{,}5}} = \sqrt{64} = 8\,{}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}}$$

Finalmente, la velocidad en $t = {}^{2\pi}/_{3}\,\mathrm{s}$ es:

$$\dot{x}\left(t = \frac{2\pi}{3}\right) = \overline{v}\,\cos\left(\omega_n\,\frac{2\pi}{3}\right) = 6\sqrt{3}\,\cos\left(8\,\frac{2\pi}{3}\right) = 6\sqrt{3}\,\cos\left(\frac{4\pi}{3} + 4\pi\right)$$
$$\dot{x}\left(t = \frac{2\pi}{3}\right) = \left(6\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -3\sqrt{3}\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$$

5.1. Vibración libre amortiguada

La vibración amortiguada no solía incluirse cuando los cursos ICE1514 y FIS1514 coordinaban sus contenidos y evaluaciones. El contenido se estudia y evalúa cuando ICE1514 opera de forma independiente debido a su relevancia en disciplinas como la ingeniería estructural, mecánica, y eléctrica.

Todos los sistemas mecánicos disipan energía producto del roce. Debido a ello, las oscilaciones decaen en el tiempo. Adicionalmente, se puede instalar un amortiguador para limitar la vibración y hacer que la amplitud de la oscilación decaiga más rápido.



(a) (b)

Figura 5.4: Sistema masa–resorte–amortiguador: **(a)** un carro de masa m conectado a un resorte y amortiguador de constantes k y c, respectivamente; y **(b)** diagrama de cuerpo libre del sistema masa–resorte–amortiguador suponiendo un estiramiento x del resorte y una velocidad $\dot{x}$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

La Figura 5.4(a) muestra un sistema masa–amortiguador–resorte, cuyo DCL se muestra en la Figura 5.4(b). Utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton se obtiene:

$$\begin{aligned} -k\,x - c\,\dot{x} &= m\,\ddot{x} \\ m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x &= 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

La Ecuación (5.10) gobierna el movimiento de un oscilador amortiguado, pero su solución no es trivial. Dado un sistema con amortiguamiento c, podemos calcular la *razón de amortiguamiento* ζ como:

$$\zeta = \frac{c}{c_{\text{crit}}} = \frac{c}{2\,m\,\omega_n} \tag{5.11}$$

, donde $c_{\text{crit}} = 2\,m\,\omega_n$ es el *amortiguamiento crítico* del sistema con masa m y frecuencia natural circular ω_n.

La solución de la Ecuación (5.10) tiene tres posibles soluciones dependiendo del grado de amortiguamiento del sistema:

- **Sobre-amortiguado ($\zeta > 1$)**: no hay oscilación y $x \to 0$ para $t \to \infty$.

  $$x(t) = A_1\,e^{\lambda_1\,t} + A_2\,e^{\lambda_2\,t} \tag{5.12}$$

  , con $\lambda_1 = \omega_n\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$ y $\lambda_1 = \omega_n\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$. Un sistema sobre-amortiguado converge asintóticamente a su posición de equilibrio.

- **Amortiguamiento crítico ($\zeta = 1$)**: el sistema tiene el amortiguamiento mínimo para no oscilar.

  $$x(t) = (A_1 + A_2\,t)\,e^{-\omega_n t} \tag{5.13}$$

- **Sub-amortiguado ($\zeta < 1$)**: oscilaciones con amplitud decreciente.

  $$x(t) = e^{-\zeta\,\omega_n\,t}\left[\,A_1\,\cos(\omega_d\,t) + A_2\,\sin(\omega_d\,t)\,\right] \tag{5.14}$$

  , donde el sistema vibra con la *frecuencia natural circular amortiguada* $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Es decir, el amortiguamiento ralentiza la vibración del sistema ya que $\omega_d < \omega_n$.

La Figura 5.5(a) muestra tres osciladores: sobre-amortiguado, amortiguado críticamente, y sub-amortiguado. Los tres osciladores tienen condición inicial $u_0 > 0$ y velocidad inicial nula (i.e. $v_0 = 0$). En la Figura se puede apreciar que:

a) El sistema sobre-amortiguado no oscila. Además, el mismo alcanzará su posición de equilibrio en $t \to \infty$.

b) El sistema con amortiguamiento crítico tampoco oscila. En teoría alcanza también la posición de equilibrio en $t \to \infty$, pero queda suficientemente cerca transcurrido un tiempo razonable.

c) El sistema sub-amortiguado tiene amplitud que decrece con $e^{-\zeta\omega_n t}$. El oscilador cruzará varias veces la posición de equilibrio y sólo se detendrá cuando $t \to \infty$.

La Figura 5.5(b) muestra el efecto que tiene el amortiguamiento para varios osciladores sub-amortiguados. Aplicaciones de osciladores sub-amortiguados se encuentran en cuerdas de guitarra, péndulos, edificios (sismos), y más.

> Las constantes del oscilador subamortiguado se llaman A_1 y A_2 para distinguirlas del caso no-amortiguado (constantes A y B). En realidad, el requerimiento $x(t) = x_0$ resulta en una expresión idéntica al caso no-amortiguado:
>
> $$A_1 = x_0$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

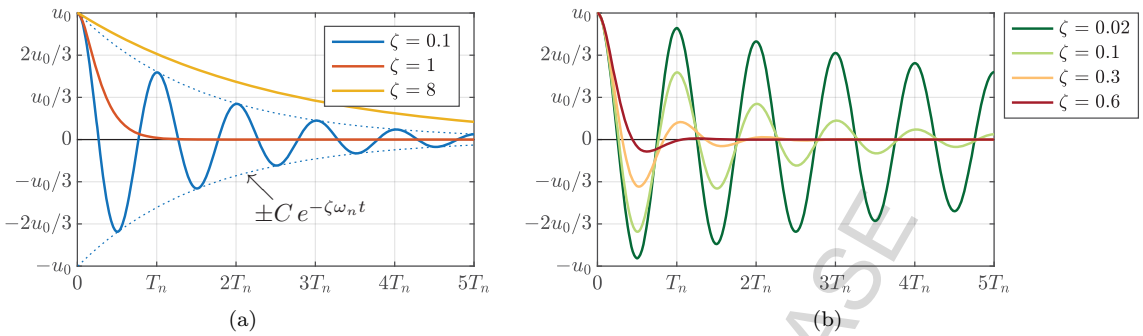


Figura 5.5: Posición en el tiempo $x(t)$ de varios osciladores: **(a)** evolución en el tiempo de un oscilador sub-amortiguado ($\zeta < 1$), amotiguado críticamente ($\zeta = 1$), y sobre-amortiguado ($\zeta > 1$); y **(b)** efectos del amortiguamiento en varios osciladores sub-amortiguados ($\zeta < 1$).

, pero esto no es igualmente cierto para A_2. Para obtener A_2 se necesita la expresión de la velocidad (donde ya se reemplazó $A_1 = x_0$):

$$\dot{x}(t) = e^{-\zeta\,\omega_n\,t}\left[-x_0\,\zeta\,\omega_n\,\cos(\omega_d\,t) - A_2\,\zeta\,\omega_n\,\sin(\omega_d\,t) - x_0\,\zeta\,\omega_d\,\sin(\omega_d\,t) + A_2\,\omega_d\,\cos(\omega_d\,t)\right]$$

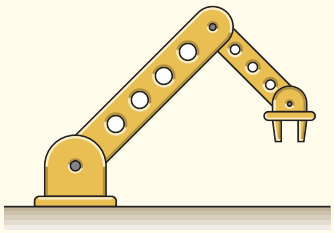
Luego, utilizando la condición $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$ se tiene que:

$$A_2 = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\,\omega_n\,x_0}{\omega_d}$$

Nota: Verificar que cuando $\zeta = 0$, la constante A_2 se simplifica al caso no-amortiguado.

Ejemplo

Cuando un brazo robótico se detiene su extremo vibra como un oscilador sub-amortiguado con $\zeta = 0{,}25$. La rigidez del extremo del brazo a cualquier movimiento es $k = 19{,}2\,\mathrm{kN/m}$, mientras que su masa asociada es $m = 12\,\mathrm{kg}$.



Se pide determinar:

a) La frecuencia natural circular a la que oscila el extremo del brazo robótico.

b) El intervalo de tiempo Δt necesario para que la amplitud de la oscilación se reduzca a un 20 %.

La frecuencia natural circular es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{19200}{12}} = \sqrt{1600} = 40\,\mathrm{rad/s}$$

Un oscilador sub-amortiguado oscila con frecuencia natural circular amortiguada:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 40\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = (40)\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = 10\sqrt{15}\,\mathrm{rad/s}$$

Es decir, si bien el extremo del brazo robótico tiene una frecuencia natural circular $\omega_n = 40\,\mathrm{rad/s}$, cuando este se detiene en realidad oscila con $\omega_d = 10\sqrt{15} = 38{,}73\,\mathrm{rad/s}$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

La amplitud de la oscilación en cierto instante $t^\star$ es:

$$C_d\left(t^\star\right) = e^{-\zeta\,\omega_n\,t^\star} C = e^{-\zeta\,\omega_n\,t^\star}\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

, donde A_1 y A_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales del oscilador y no varían en el tiempo. Buscamos el intervalo Δt tal que:

$$\begin{aligned}
\frac{C_d\left(t^\star + \Delta t\right)}{C_d\left(t^\star\right)} &= 0{,}2 \\
\frac{e^{-\zeta\,\omega_n\,\left(t^\star+\Delta t\right)}\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}{e^{-\zeta\,\omega_n\,t^\star}\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} = e^{-\zeta\,\omega_n\,\Delta t} &= 0{,}2 \\
-\zeta\,\omega_n\,\Delta t &= \log\left(0{,}2\right) \\
\Delta t &= -\frac{\log\left(0{,}2\right)}{10} = 0{,}1609\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

Es decir, la amplitud de la oscilación decae a un 20 % cada 0,1609 s.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Capítulo 6

Impulso & Momentum

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Toda fuerza que actúa por algún intervalo de tiempo producirá un *impulso*. Los impulsos tienen la capacidad de cambiar el momentum de una partícula u objeto[1], que es una medida vectorial proporcional a la masa y la velocidad del objeto[2].

El caso de una fuerza de magnitud considerable que actúa por un periodo muy breve de tiempo, no es sencillo de analizar utilizando la ley de Newton o bien el principio de trabajo y energía. El cuerpo experimentará una considerable aceleración que podría cambiar su velocidad casi de forma instantánea. Debido a ello, el principio de impulso y momentum es útil para analizar la dinámica de colisiones, golpes, capturas, y fragmentaciones.

Existen dos términos que fonéticamente y en escritura son muy similares: *momentum* y *momento*. El momentum es la magnitud física $m\mathbf{v}$; mientras que el momento es una fuerza que tiende a producir un giro. En ciertos textos y cursos suelen llamar *torque* al momento (fuerza), y utilizan indistintamente momento o momentum para referirse a $m\mathbf{v}$. Dependiendo si el texto (o curso) es más afín con la ingeniería o la física, se podría utilizar una u otra convención:

Término	**Ingeniería**	**Física**
$\mathbf{L} = m\mathbf{v}$	Momentum	Momento/Momentum
Fuerza que produce giro	Momento	Torque

Este curso es más afín con ingeniería, por lo que utilizará *momentum* y *momento* según corresponda y evitando confundirlos. No obstante, se debe tener conciencia que otras personas y textos podrían llamar indistintamente *momentum* o *momento* a la misma magnitud física lo que puede crear confusión.

6.1. Impulso y momentum lineal

La 2$^{\text{da}}$ ley de Newton (Ecuación (3.1)) se tiene que:

$$\sum_i \mathbf{f}_i = m\,\ddot{\mathbf{u}} = m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\mathbf{u}}\right) = m\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{v}\right)$$

Integrando la ecuación entre tiempos t_1 y t_2, y llamando $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}\left(t_1\right)$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}\left(t_2\right)$, se tiene:

$$\sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_i \,\mathrm{d}t = m \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} \mathrm{d}\mathbf{v}$$

[1] Análogo a cómo el trabajo cambia la energía cinética de una partícula u objeto.

[2] En el caso de energía cinética la proporcionalidad es a la masa y al cuadrado de la velocidad. Sería más apropiado decir que es proporcional al cuadrado de la norma del vector de velocidad.

Es decir, el principio de impulso y momentum dice:

$$\sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_i \, \mathrm{d}t = m\,\mathbf{v}_2 - m\,\mathbf{v}_1 \tag{6.1}$$

, donde $m\,\mathbf{v} = \mathbf{L}$ = es el *momentum lineal*;
$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \, \mathrm{d}t = \mathbf{I}$ = es el *impulso lineal* de la fuerza $\mathbf{f}$ en el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2.

La Ecuación (6.1) se puede reescribir como:

$$\mathbf{I} = \Delta\mathbf{L} \tag{6.2}$$

, que en el caso cuando $\Delta t \to 0$ resulta en:

$$\boxed{\dot{\mathbf{L}} = \sum \mathbf{f}} \tag{6.3}$$

La Ecuación (6.1) es una ecuación vectorial. Es decir, nos entrega una ecuación escalar por cada eje coordenado[3]. Además, debido a que la masa es un escalar positivo, el momentum lineal $\mathbf{L}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$. La unidad de impulso y momentum es $^{\mathrm{kg\cdot m}}/_{\mathrm{s}}$, que es lo mismo que $\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$.

La Ecuación (6.1) se suele utilizar para conocer la velocidad final $\mathbf{v}_2$ de una partícula u objeto si se conocen las fuerzas que actúan en función del tiempo:

$$\boxed{m\,\mathbf{v}_1 + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_i \, \mathrm{d}t = m\,\mathbf{v}_2} \tag{6.4}$$

En el caso cartesiano, por ejemplo, esto resulta en 3 ecuaciones:

$$m\,v_{1x} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{ix} \, \mathrm{d}t = m\,v_{2x}$$
$$m\,v_{1y} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{iy} \, \mathrm{d}t = m\,v_{2y}$$
$$m\,v_{1z} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{iz} \, \mathrm{d}t = m\,v_{2z}$$

En la aplicación del principio de impulso y mometum se recomienda hacer una extensión del DCL llamada *diagrama de impulso y momentum*, donde 3 dibujos se hacen acordes a la Ecuación (6.4), Un ejemplo de *diagrama de impulso y momentum* se muestra en la Figura 6.1.

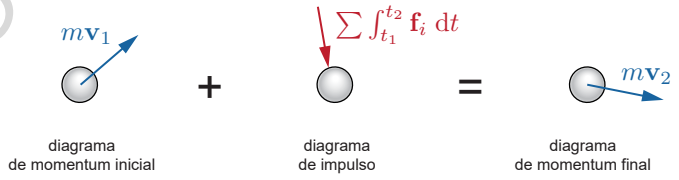


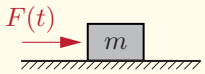
Figura 6.1: Ejemplo de un diagrama de impulso y momentum.

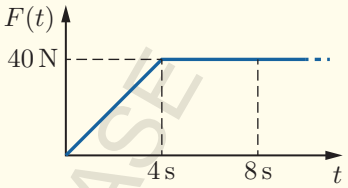
[3] A diferencia del principio de trabajo y energía.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

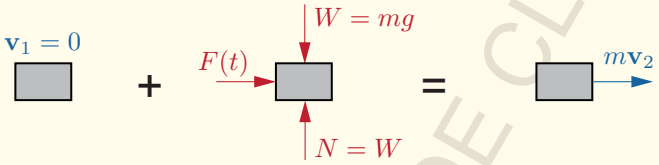
Ejemplo

Una caja de masa $m = 10\,\text{kg}$ se encuentra inicialmente en reposo. Sobre la caja se aplica una fuerza $F(t) = \min(10\,t\,,\,40)$ N. El roce entre la caja y la superficie es despreciable, i.e. $\mu = 0$. Determine la velocidad en $t = 8\,\text{s}$.





El primer paso consiste en hacer un diagrama de impulso y momentum:



Con ello, se puede formular el principio de impulso y momentum para la dirección horizontal (eje x), donde la fuerza neta es $\mathbf{f}_x = F(t)$:

$$m\,v_{1x} + \int_{t=0}^{t=8\,\text{s}} F(t)\;\text{d}t = m\,v_{2x}$$

La integral del impulso se puede calcular de forma gráfica con facilidad:

$$\int_{t=0}^{t=8\,\text{s}} F(t)\;\text{d}t = A_{\triangle} + A_{\square} = \frac{1}{2}\,(4\,\text{s})\,(40\,\text{N}) + (4\,\text{s})\,(40\,\text{N}) = 240\,\text{N}\cdot\text{s}$$

Finalmente, se puede despejar la velocidad $v_{2x} = v\,(8)$ de la ecuación:

$$0 + 240\,\text{N}\cdot\text{s} = m\,v_{2x}$$

$$v_{2x} = \frac{240\,\text{N}\cdot\text{s}}{10\,\text{kg}} = 24\,\text{m/s}$$

Ejemplo

Repita el problema anterior pero considerando un roce con coeficientes $\mu_s = \mu_k = 0{,}2$ y asumiendo que $g = 10\,\text{m/s}^2$.

La fuerza de roce máxima es:

$$(f_r)_{\text{max}} = \mu\,N = \left(\frac{1}{5}\right)(10)\,(10) = 20\,\text{N}$$

Es importante comprender que la fuerza de roce aumentará en respuesta a $F(t)$ hasta su valor máximo de 20 N. El punto límite ocurre para un tiempo $t^\star$ tal que:

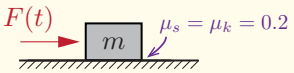
$$\begin{aligned}\mathbf{f}_x = F(t^\star) - (f_r)_{\text{max}} &= 0\\ 10\,t - 20\,\text{N} &= 0\\ t^\star &= 2\,\text{s}\end{aligned}$$

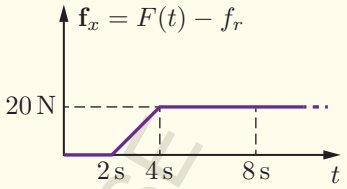
Es decir, la fuerza neta $\mathbf{f}_x$ deja de ser nula en el instante $t^\star = 2\,\text{s}$, tras lo cual crece linealmente hasta llegar a:

$$(\mathbf{f}_x)_{\text{max}} = F(t = 4\,\text{s}) - (f_r)_{\text{max}} = 20\,\text{N}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Finalmente, la fuerza neta horizontal para el problema con roce queda descrito como muestra la siguiente Figura:





El impulso generado por la fuerza neta hasta $t = 8\,\mathrm{s}$ es:

$$\int_{t=0}^{t=8\,\mathrm{s}} \mathbf{f}_x \,\mathrm{d}t = A_{\triangle} + A_{\square} = \frac{1}{2}\,(2\,\mathrm{s})\,(20\,\mathrm{N}) + (4\,\mathrm{s})\,(20\,\mathrm{N}) = 100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$$

Finalmente, se puede despejar la velocidad $v_{2x} = v\,(8)$ de la ecuación:

$$0 + 100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s} = m\,v_{2x}$$

$$v_{2x} = \frac{100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}}{10\,\mathrm{kg}} = 10\,{}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}}$$

Ejemplo

Basado en Bedford & Fowler 5th ed, Example 16.2



Un motociclista recorre una pista circular de radio $R = 570\,\mathrm{m}$. El motociclista comienza desde el reposo y acelera de modo que su fuerza neta tangencial es:

$$\sum \mathbf{f}_t = \sum \mathbf{f}_\theta = 300 - 9\,t \qquad \text{para} \quad t = 0\ldots 30\,\mathrm{s}$$

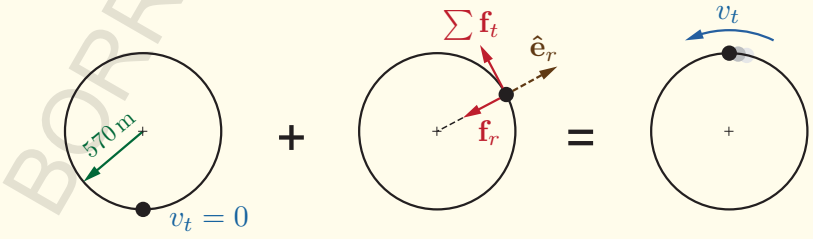
La masa total del motociclista y su moto es $m = 225\,\mathrm{kg}$. Se pide determinar:

a) La magnitud de la velocidad en $t = 30\,\mathrm{s}$.

b) La fuerza neta tangencial promedio entre $t = 0\ldots 30\,\mathrm{s}$.

c) La fuerza radial promedio entre $t = 0\ldots 30\,\mathrm{s}$.

El primer paso consiste en hacer un diagrama un diagrama de impulso y momentum:



La fuerza centrípeta apunta hacia el centro (dirección $-\hat{\mathbf{e}}_r$) y su módulo (magnitud) es igual a:

$$\mathbf{f}_r = m\,a_c = m\frac{(v_t)^2}{R}$$

Usando el principio de impulso–momentum en la dirección θ (que coincide con la tangencial en un

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

movimiento circular), y recordando que comienza su carrera del reposo:

$$\begin{aligned} m\,v_{1t} + \int_{t=0}^{t=30} (300 - 9\,t)\ \mathrm{d}t &= m\,v_{2t} \\ 300\,t - \frac{9}{2}\,t^2 \Big|_{t=0}^{t=30} &= m\,v_{2t} \\ 4950\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s} &= (225)\,(v_{2t}) \\ v_{2t} &= 22\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

La fuerza neta tangencial promedio $\overline{\mathbf{f}}_t$ debe producir el mismo impulso:

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=30} \overline{\mathbf{f}}_t\ \mathrm{d}t = \overline{\mathbf{f}}_t \int_{t=0}^{t=30} \mathrm{d}t &= 4950\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s} \\ \overline{\mathbf{f}}_t\,(30-0) &= 4950 \\ \overline{\mathbf{f}}_t &= 165\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Utilizando el principio de impulso–momentum entre instantes $\tau = 0 \ldots t$, donde τ es una variable muda para integrar en el tiempo, se obtiene una expresión para la velocidad en cualquier instante t:

$$\begin{aligned} m\,v_{1t} + \int_{\tau=0}^{\tau=t} (300 - 9\,\tau)\ \mathrm{d}\tau &= m\,v\,(t) \\ v\,(t) &= \frac{4}{3}\,t - \frac{1}{50}\,t^2 \end{aligned}$$

, con lo que (el módulo de) la fuerza centrípeta es:

$$\mathbf{f}_r = m\frac{(v_t)^2}{R} = \frac{225}{570}\left(\frac{4}{3}\,t - \frac{1}{50}\,t^2\right)^2 = \frac{15}{38}\left(\frac{4}{3}\,t - \frac{1}{50}\,t^2\right)^2$$

El impulso que genera esa fuerza entre $t = 0 \ldots 30$ es:

$$\int_{t=0}^{t=30} \mathbf{f}_r\ \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=30} \frac{15}{38}\left(\frac{4}{3}\,t - \frac{1}{50}\,t^2\right)^2\ \mathrm{d}t = 2820\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$$

Es decir, la fuerza radial promedio es:

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=30} \overline{\mathbf{f}}_r\ \mathrm{d}t &= 2820\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s} \\ \overline{\mathbf{f}}_r\,(30-0) &= 2820 \\ \overline{\mathbf{f}}_r &= 94\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

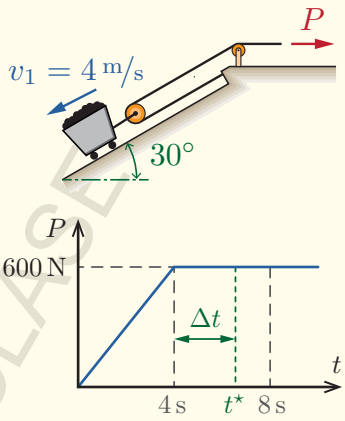
, la cual apunta en la dirección $-\hat{\mathbf{e}}_r$ para describir un movimiento circular.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

Basado en Meriam 9th ed, Sample problem 3/22

Una tolva con carga tiene masa 150 kg y desciende por una rampa con rapidez 4 m/s. En $t = 0$ comienza a aplicarse una fuera P en el cable que aumenta linealmente hasta los 600 N en $t = 4$ s, tras lo cual se mantiene en 600 N.

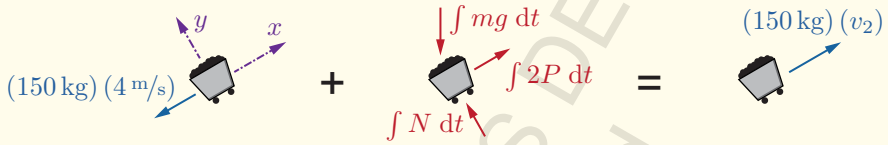


Se pide determinar:

a) El tiempo $t^\star$ en que la tolva cambia su sentido de movimiento.

b) La velocidad de la tolva en $t_2 = 8$ s.

El primer paso consiste en hacer un diagrama un diagrama de impulso y momentum:



, donde la fuerza ejercida sobre la tolva es $2P$ debido al sistema de poleas. El sentido de movimiento cambia en $t^\star$ tal que la velocidad de la tolva es cero. Asumiendo que $t^\star > 4$ s, con $t^\star = 4 + \Delta t$, se tiene que:

$$m\,\mathbf{v}_{1x} + \int \sum \mathbf{f}_x \, \mathrm{d}t = m\,\mathbf{v}_{2x}$$

$$(150)\,(-4) + \underbrace{(1/2)\,(1200\,\mathrm{N})\,(4\,\mathrm{s})}_{\text{triángulo de } 2P} + \underbrace{(1200\,\mathrm{N})\,(\Delta t)}_{\text{rectángulo de } 2P} - \underbrace{(150)\,(9{,}81)\,(\sin 30^\circ)\,(4+\Delta t)}_{\text{peso tolva}} = (150)\,(0)$$

$$-600 + 2400 + 1200\,\Delta t - 2943 - 735{,}75\,\Delta t = 0$$

$$464{,}25\,\Delta t = 1143$$

$$\Delta t = 2{,}46\,\mathrm{s}$$

Es decir, el sentido de movimiento de la tolva cambia en $t^\star = 4 + \Delta t = 6{,}46$ s.

Nota: En caso de haber hecho el supuesto $t^\star < 4$ s, se obtiene una ecuación cuadrática que resulta en $t_1^\star = -0{,}712$ s y $t_2^\star = 5{,}617$ s. Sólo la solución positiva es de interés pero inválida ya que viola el supuesto inicial $t^\star < 4$ s. Esto justifica cambiar el supuesto inicial hacia la solución correcta $t^\star > 4$ s.

La velocidad de la tolva en $t_2 = 8$s se obtiene de reformular la ecuación de impulso y momentum:

$$m\,\mathbf{v}_{1x} + \int \sum \mathbf{f}_x \, \mathrm{d}t = m\,\mathbf{v}_{2x}$$

$$(150)\,(-4) + \underbrace{(1/2)\,(1200\,\mathrm{N})\,(4\,\mathrm{s})}_{\text{triángulo de } 2P} + \underbrace{(1200\,\mathrm{N})\,(8\,\mathrm{s}-4\,\mathrm{s})}_{\text{rectángulo de } 2P} - \underbrace{(150)\,(9{,}81)\,(\sin 30^\circ)\,(8\,\mathrm{s})}_{\text{peso tolva}} = (150)\,(\mathbf{v}_{2x})$$

$$714 = 150\,\mathbf{v}_{2x}$$

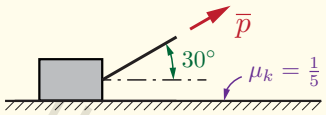
$$\mathbf{v}_{2x} = 4{,}76\,\mathrm{m/s}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

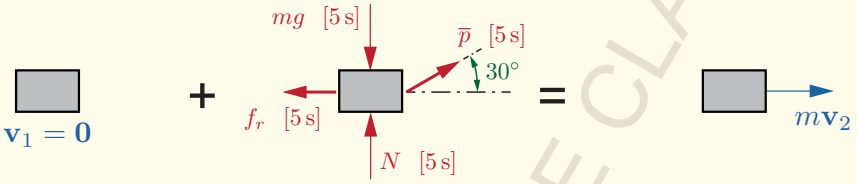
Ejemplo

Basado en Hibbeler 14th ed, Problem 15–10

La caja de masa $m = 50\,\text{kg}$ está siendo tirada por una fuerza constante $\overline{\mathbf{p}}$. El coeficiente de roce dinámico entre la caja y el suelo es $\mu_k = 0{,}2$. La caja comienza desde el reposo y se sabe que alcanza una velocidad de $10\,\text{m/s}$ transcurridos $5\,\text{s}$. Determine la magnitud de $\overline{\mathbf{p}}$.



El primer paso consiste en hacer un diagrama un diagrama de impulso y momentum:



La fuerza normal se puede determinar fácilmente con el equilibrio de fuerzas verticales, pero se obtendrá con la ecuación de impulso–momentum para demostrar su equivalencia:

$$\begin{aligned} m\,v_{1y} + \int_{t=0}^{t=5} (-mg)\ \mathrm{d}t + \int_{t=0}^{t=5} \overline{p}\,\sin(30°)\ \mathrm{d}t + \int_{t=0}^{t=5} N\ \mathrm{d}t &= m\,v_{2y} \\ -mg\,[5-0] + \overline{p}\,\sin(30°)\,[5-0] + N\,[5-0] &= 0 \\ N &= mg - \frac{1}{2}\,\overline{p} \end{aligned}$$

Con ello, la fuerza de roce es:

$$f_r = \mu\,N = \frac{mg}{5} - \frac{1}{10}\,\overline{p}$$

Ahora que se ha determinado la fuerza de roce, se utiliza el principio de impulso–momentum pero en la dirección horizontal:

$$\begin{aligned} m\,v_{1x} + \int_{t=0}^{t=5} (-f_r)\ \mathrm{d}t + \int_{t=0}^{t=5} \overline{p}\,\cos(30°)\ \mathrm{d}t &= m\,v_{2x} \\ \left(\frac{mg}{5} - \frac{\overline{p}}{10}\right)[5-0] + \overline{p}\,\cos(30°)\,[5-0] &= 10\,m \\ mg - \frac{1}{2}\,\overline{p} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\,\overline{p} &= 10\,m \\ \overline{p} &= \frac{2\,m\,(10+g)}{5\sqrt{3}+1} = 205{,}1\,\text{N} \end{aligned}$$

6.2. Conservación de momentum lineal

Cuando la suma de impulsos externos actuando sobre un sistema es cero; el momentum inicial y final del sistema no varía. Es decir:

$$\sum_i m_i\,\mathbf{v}_{i1} = \sum_i m_i\,\mathbf{v}_{i2} \qquad \text{cuando} \qquad \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{\text{ext}}\ \mathrm{d}t = \mathbf{0} \tag{6.5}$$

Esta ecuación representa la *conservación de momentum lineal*. Cuando las partículas colisionan, estas ejercen fuerzas impulsivas entre ellas. Pero estos *impulsos internos* se cancelan ya que ocurren en pares iguales, colineales, pero con sentido opuesto (3ra ley de Newton: acción y reacción).

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Es importante reiterar que para que el momentum lineal se conserve en un sistema sólo es necesario que la suma de fuerzas externas sea cero. El sistema puede tener fuerzas internas producto de la interacción de las partículas o componentes del mismo; e.g. colisiones, fragmentación, separación, entre otros.

6.3. Colisiones

Utilizando el principio de impulso y momentum antes y después de una colisión (un intervalo breve de tiempo), se pueden distinguir dos tipos de fuerzas:

- **fuerzas impulsivas**: las fuerzas producto del choque son considerables, por lo que pese a actuar en un intervalo breve de tiempo producirán un impulso significativo. Esto causará cambios en el momentum de las partículas del sistema.
- **fuerzas no-impulsivas**: fuerzas que normalmente no son despreciables (e.g. el roce), pero que debido a que actúan por un intervalo muy breve; no producirán un impulso significativo. Es decir, generalmente pueden ser despreciadas en el análisis de la colisión.

Una colisión es un impacto entre dos cuerpos o partículas donde se generan fuerzas de contacto relativamente grandes en un periodo de tiempo breve. Las colisiones son eventos complejos que involucran deformación, calor, sonido, fracturas, y más. Pequeños cambios en las condiciones de la colisión suelen tener gran efecto en los resultados. Es decir, el resultado de un análisis de colisión no debe ser considerado una "verdad absoluta".

Existen dos tipos de colisiones:

- **Impacto central**: Ocurre cuando las velocidades de las partículas son colineales. Las fuerzas de interacción producto de la colisión serán también colineales con la velocidad y el problema puede ser analizado en una sola dimensión, como muestra la Figura 6.2(a).
- **Impacto oblicuo**: La colisión es un problema bidimensional donde las fuerzas de interacción se generan en la dirección normal al plano de contacto; mientras que no hay interacción en las demás direcciones[4], como muestra la Figura 6.2(b).

El análisis de las colisiones será inicialmente derivado para un impacto central, y luego extendido a un impacto oblicuo.

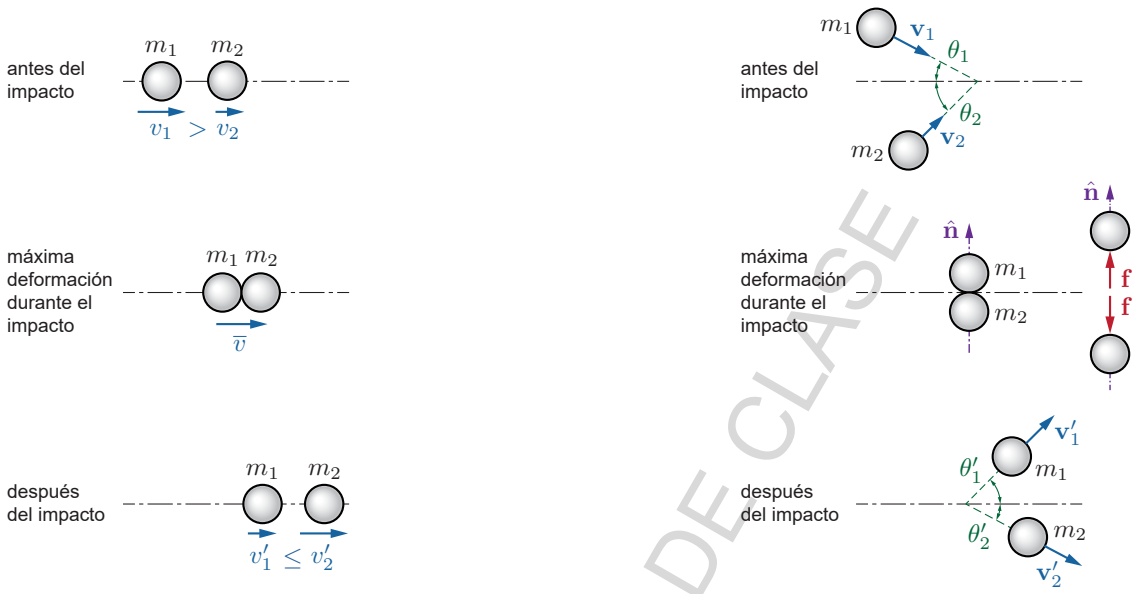
6.3.1. Impacto central

El impacto central se analiza como un problema 1D. Las partículas de la Figura 6.3 tienen inicialmente $v_1 > v_2$ debido a lo cual colisionarán. Cuando ambas partículas entran en contacto comienzan a deformarse y ejercer fuerzas (impulsos) entre ellas: fase de *deformación*. En cierto instante ambas partículas se moverán con la misma velocidad $\overline{v}$. Luego de moverse juntas comienzan a retornar a sus estados originales sin deformar total o parcialmente, durante lo cual continúan ejerciendo fuerzas entre ellas: fase de *recuperación* Finalmente, las partículas tendrán velocidades $v_1' \leq v_2'$.

Cuando colisionan dos cuerpos de dimensiones no-despreciables (i.e. no una colisión de partículas), puede ocurrir que se tenga en realidad un *impacto oblicuo* pese a que las velocidades sean colineales. Dependiendo de la forma de los cuerpos, la superficie de contacto podría no ser perpendicular a las velocidades.

[4] La fuerza de roce suele ser no-impulsiva en una colisión.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard



(a) impacto central (b) impacto oblicuo

Figura 6.2: Tipos de colisiones: **(a)** *impacto central*, donde las velocidades y fuerzas de interacción son todas colineales; y **(b)** *impacto oblicuo*, donde las fuerzas de interacción ocurren en la dirección normal al plano de contacto.

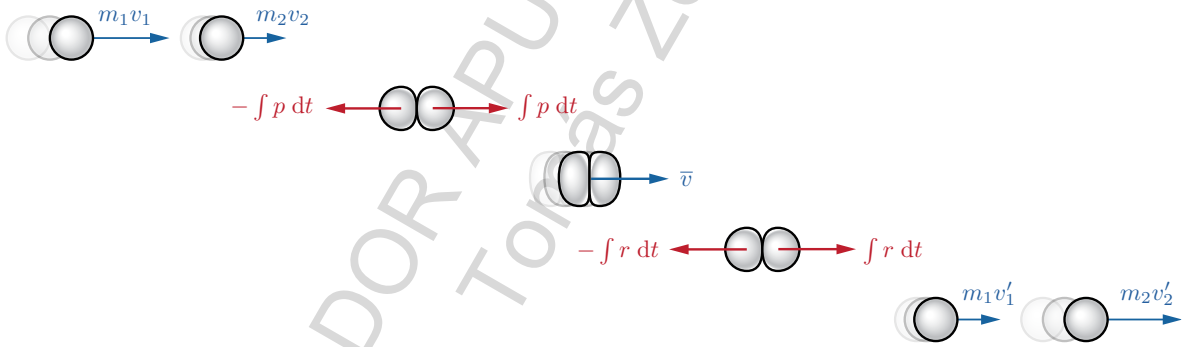


Figura 6.3: Evolución o secuencia de un "impacto central" destacando los impulsos de *deformación* y *recuperación*.

> En ciertos casos podría darse que luego de una colisión se tenga que $v'_1 > v'_2$. Esto ocurre cuando una partícula *atraviesa* otra; e.g., una bala atravesando un saco de arroz. Este caso especial es frecuentemente olvidado o ignorado por los textos.
>
> El caso en que $v'_1 = v'_2$ ocurre cuando las partículas quedan unidas. Esto podría ocurrir si por ejemplo ambas partículas son de plastilina.

Notar que en el diagrama de la Figura 6.3, en ambas fases (deformación y recuperación) los impulsos son iguales pero opuestos. Además, por lo general los impulsos de recuperación $\int r\,\mathrm{d}t$ son menores a los de deformación $\int p\,\mathrm{d}t$: la colisión no es *perfectamente elástica* y hay una pérdida de energía. Al considerar ambas partículas como nuestro sistema de análisis los impulsos generados se

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

cancelan. Esto significa que se debe conservar el momentum del sistema, y con ello:

$$\boxed{m_1\, v_1 + m_2\, v_2 = m_1\, v_1' + m_2\, v_2'} \tag{6.6}$$

6.3.2. Coeficiente de restitución

Considerando la Ecuación (6.6), si conocemos v_1 y v_2 necesitamos una segunda ecuación para obtener v_1' y v_2'. Usando el principio de impulso y momentum para cada partícula por separado, tanto en deformación como en restitución, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} m_1\, v_1 - \int p\, \mathrm{d}t = m_1\, \overline{v} \\ m_1\, \overline{v} - \int r\, \mathrm{d}t = m_1\, v_1' \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad e = \frac{\int r\, \mathrm{d}t}{\int p\, \mathrm{d}t} = \frac{\overline{v} - v_1'}{v_1 - \overline{v}}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_2\, v_2 + \int p\, \mathrm{d}t = m_2\, \overline{v} \\ m_2\, \overline{v} + \int r\, \mathrm{d}t = m_2\, v_2' \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad e = \frac{\int r\, \mathrm{d}t}{\int p\, \mathrm{d}t} = \frac{v_2' - \overline{v}}{\overline{v} - v_2}$$

, donde e es el *coeficiente de restitución* y corresponde a la razón entre el impulso de restitución y el de deformación.

> Cuando se aplica el principio de impulso y momentum a cada partícula por separado, las fuerzas de la colisión dejan de ser fuerzas internas. Los impulsos de la colisión no tienen un par opuesto, por lo que el momentum analizado para cada partícula por separado, no se conserva.

Eliminando $\overline{v}$ de ambas expresiones para e se obtiene:

$$\begin{aligned} 1^{\text{ra}} \text{ ecuación:} \quad & e\,(v_1 - \overline{v}) = \overline{v} - v_1' \quad \rightarrow \quad e\, v_1 + v_1' = e\, \overline{v} + \overline{v} \\ 2^{\text{da}} \text{ ecuación:} \quad & e\,(\overline{v} - v_2) = v_2' - \overline{v} \quad \rightarrow \quad e\, v_2 + v_2' = e\, \overline{v} + \overline{v} \\ \text{Combinando ambas:} \quad & e\, v_1 + v_1' = e\, v_2 + v_2' \end{aligned}$$

Finalmente, el coeficiente de restitución es:

$$\boxed{e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}} \quad = \frac{\text{vel. relativa separación}}{\text{vel. relativa acercamiento}} \tag{6.7}$$

Es decir, si conocemos el coeficiente de restitución de una colusión; entonces utilizando las Ecuaciones (6.6) y (6.6) podemos determinar v_1' y v_2'. El valor de e define el tipo de colisión:

- **Caso** $e = 1$: Ambas partículas restituyen los mismo que se deforman y el impacto es *perfectamente elástico*.
- **Caso** $e = 0$: Las partículas no restituyen nada, se quedan pegadas, y el impacto es *perfectamente plástico*. Luego de la colisión ambas partículas se mueven con velocidad $\overline{v}$.
- **Caso** $0 < e < 1$: Caso frecuente en la práctica. El valor de e depende de los materiales de las partículas, sus superficies, geometrías, y de la velocidad relativa del impacto.
- **Caso** $e < 0$: Este caso sólo ocurre cuando una partícula atraviesa la otra. Es un caso poco común.

La Figura 6.4 muestra el comportamiento de e con la velocidad relativa de impacto y los materiales de las partículas. Notar que si la velocidad relativa de impacto es baja, las colisiones tienden a comportarse de forma elástica.

> Un error frecuente en el análisis de colisiones consiste en utilizar: **(1)** ecuación de conservación de momentum; y **(2)** conservación de energía. Esto es un grave error ya que la energía sólo se conserva

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

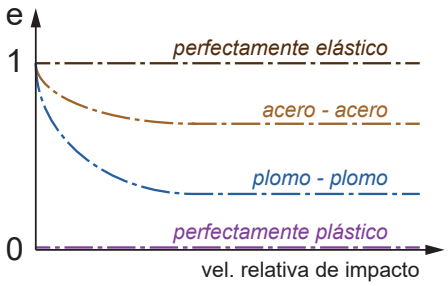


Figura 6.4: Variación del coeficiente de restitución e con la velocidad relativa del impacto y los materiales de las partículas.

cuando el choque es perfectamente elástico, i.e. cuando $e = 1$.

No es recomendable utilizar la ecuación de conservación de energía (incluso) cuando $e = 1$. La ecuación del coeficiente de restitución es lineal respecto a la velocidad. La ecuación de energía cinética en cambio, tiene la velocidad al cuadrado. Es decir, incluso en el caso en que $e = 1$, no es recomendable utilizar la ecuación de conservación de energía para analizar una colisión.

6.3.3. Impacto oblicuo

En el impacto oblicuo las velocidades iniciales y finales no son paralelas. El plano de contacto es tangente a la colisión, y con ello se descompone el vector de velocidad en componentes normal (n) y tangencial (t) al plano de contacto[5]. Utilizando el diagrama de la Figura 6.5 se tiene:

$$(\mathbf{v}_1)_n = -v_1 \sin\theta_1 \qquad (\mathbf{v}_2)_n = v_2 \sin\theta_2$$
$$(\mathbf{v}_1)_t = v_1 \cos\theta_1 \qquad (\mathbf{v}_2)_t = v_2 \cos\theta_2$$

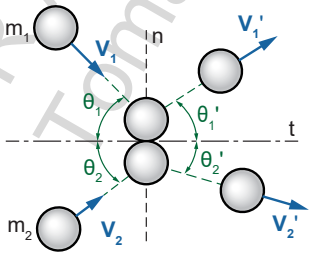


Figura 6.5: Impacto oblicuo. Descomponiendo en los ejes n y t, se tiene un impacto central en el eje n y nada de interacción en el t.

La fuerza de impacto (y por ende el impulso) entre las partículas ocurre en el eje n. Es decir, en el eje n el comportamiento es el de un impacto central y con ello:

$$m_1 (\mathbf{v}_1)_n + m_2 (\mathbf{v}_2)_n = m_1 (\mathbf{v}_1')_n + m_2 (\mathbf{v}_2')_n \tag{6.8a}$$

$$e = \frac{(\mathbf{v}_2')_n - (\mathbf{v}_1')_n}{(\mathbf{v}_1)_n - (\mathbf{v}_2)_n} \tag{6.8b}$$

Mientras que en el eje t (plano tangente) no hay impulsos, con lo que utilizando el principio de

[5] En esta sección se usa t para indicar *tangencial* y no *tiempo*.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

impulso y momentum con cada partícula por separado se tiene:

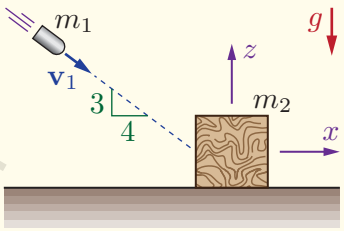
$$\boxed{\begin{aligned}(\mathbf{v}_1)_t &= (\mathbf{v}'_1)_t \\ (\mathbf{v}_2)_t &= (\mathbf{v}'_2)_t\end{aligned}} \qquad \begin{aligned}&(6.9a)\\ &(6.9b)\end{aligned}$$

Una vez que se ha determinado $(\mathbf{v}'_1)_n$, $(\mathbf{v}'_1)_t$, $(\mathbf{v}'_2)_n$, y $(\mathbf{v}'_2)_t$; se puede obtener θ'_1 y θ'_2 en caso que fueran requeridos.

Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Example 2.14

Un bloque de madera de masa m_2 inicialmente en reposo está sobre una superficie sin roce. Una bala de masa m_1 y velocidad $\mathbf{v}_1$ impacta al bloque como muestra la Figura, quedando embebida en el bloque. Se pide determinar:



a) La velocidad del bloque después del impacto.

b) El impulso en x (horizontal) sobre el bloque producto de la interacción.

Como la bala queda embebida en el bloque, el choque es *perfectamente plástico* y con ello:

$$e = \frac{(\mathbf{v}'_2)_x - (\mathbf{v}'_1)_x}{(\mathbf{v}_1)_x - (\mathbf{v}_2)_x} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad (\mathbf{v}'_1)_x = (\mathbf{v}'_2)_x = \overline{v}$$

Por otro lado, sabemos que se conserva el momentum del sistema completo en la colisión:

$$\begin{aligned} m_1\,(\mathbf{v}_1)_x &= m_1\,\overline{v} + m_2\,\overline{v} \\ m_1\left(\frac{4}{5}\right)(v_1) &= (m_1+m_2)\,\overline{v} \qquad \longrightarrow \qquad \overline{v} = \frac{4\,m_1\,v_1}{5\,(m_1+m_2)} \end{aligned}$$

Utilizando el principio de impulso y momentum sólo sobre el bloque de madera y en la dirección x:

$$(m_2)\,(0) + \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{f})_x \;\mathrm{d}t = m_2\,\overline{v} \qquad \longrightarrow \qquad \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{f})_x \;\mathrm{d}t = \frac{4\,m_1\,m_2\,v_1}{5\,(m_1+m_2)}$$

Nota: Podemos también calcular el impulso del bloque sobre la bala en la dirección z (vertical) que hace que la bala se detenga en esa dirección:

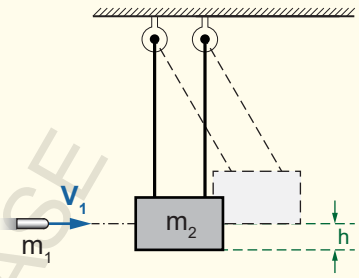
$$\begin{aligned} m_1\,(\mathbf{v}_1)_z + \int_{t_1}^{t_2} [F - m_1\,g] \;\mathrm{d}t &= (m_1)\,(0) \\ m_1\left(-\frac{3}{5}\right)(v_1) + \int_{t_1}^{t_2} F\;\mathrm{d}t - m_1\,g\,(t_2-t_1) &= 0 \\ \int_{t_1}^{t_2} F\;\mathrm{d}t &= \frac{3}{5}\,m_1\,v_1 + m_1\,g\,\Delta t \end{aligned}$$

Debido a que el intervalo de tiempo Δt es pequeño, la fuerza de gravedad no tiene una contribución significativa al impulso en z. Es decir, la fuerza de gravedad es de tipo *no-impulsiva*.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

Una bala de masa m_1 se dispara contra un *péndulo balístico* de masa m_2. La bala queda embebida en el bloque luego del impacto. Se pide determinar:



a) La velocidad del péndulo justo después del impacto.

b) Si la energía cinética del sistema se conserva/reduce/aumenta.

c) La velocidad de la bala si se conoce la altura máxima h del péndulo.

La velocidad del péndulo con la bala $\overline{v}$ será la velocidad tangencial del péndulo después de la colisión. Basados en el problema anterior, se sabe entonces que:

$$v_\theta = \overline{v} = \frac{m_1\, v_1}{m_1 + m_2}$$

Sólo la bala tiene energía cinética antes de la colisión, por lo que:

$$T_1 = \frac{1}{2}\, m_1\, (v_1)^2$$

La energía cinética después del impacto es:

$$T_2 = \frac{1}{2}\, (m_1 + m_2)\, (\overline{v})^2 = \frac{1}{2}\, (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1\, v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = \left[\frac{1}{2}\, m_1\, (v_1)^2\right] \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right]$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

Es decir, $T_2 < T_1$ lo que indica que hay una pérdida de energía.

Concluido el impacto se conservará la energía. En el punto más alto no tiene velocidad, i.e., no hay energía cinética y $T_3 = 0$. Considerando el punto más bajo del péndulo como el datum ($z = 0$), entonces se tiene que $V_2 = 0$ y luego la energía potencial en el punto más alto es:

$$V_3 = V_g = (m_1 + m_2)\, g\, h$$

, con lo que por conservación de energía se tiene:

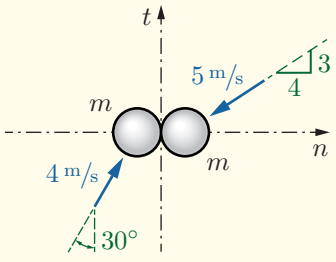
$$V_2 + T_2 = V_3 + T_3$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m_1^2\, v_1^2}{m_1 + m_2}\right) = (m_1 + m_2)\, g\, h \qquad \longrightarrow \qquad v_1 = \sqrt{2gh} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)$$

Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Example 2.16

Dos tejos de hockey idénticos chocan como muestra la Figura. Si el coeficiente de restitución es $e = 0{,}8$, se pide determinar:



a) Las velocidades (vectores) después de la colisión.

b) El impulso de la fuerza de interacción si $m = 170\,\text{gr}$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Los vectores de velocidad iniciales (previo a la colisión) en términos de $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{t}}$ son:

$$\mathbf{v}_1 = 4\,\sin(30°)\,\hat{\mathbf{n}} + 4\,\cos(30°)\,\hat{\mathbf{t}} = 2\,\hat{\mathbf{n}} + 2\sqrt{3}\,\hat{\mathbf{t}}$$
$$\mathbf{v}_2 = 5\left(-\frac{4}{5}\right)\hat{\mathbf{n}} + 5\left(-\frac{3}{5}\right)\hat{\mathbf{t}} = -4\,\hat{\mathbf{n}} - 3\,\hat{\mathbf{t}}$$

Inmediatamente sabemos que las componentes en $\hat{\mathbf{t}}$ después de la colisión son:

$$(\mathbf{v}_1')_t = 2\sqrt{3}\,\text{m/s} \qquad (\mathbf{v}_2')_t = -3\,\text{m/s}$$

En la dirección normal se tiene un impacto central. Es decir, utilizando las ecuaciones de conservación de momentum y de coeficiente de restitución, se tiene:

$$m\,(\mathbf{v}_1)_n + m\,(\mathbf{v}_2)_n = m\,(\mathbf{v}_1')_n + m\,(\mathbf{v}_2')_n \qquad e = 0{,}8 = \frac{(\mathbf{v}_2')_n - (\mathbf{v}_1')_n}{(\mathbf{v}_1)_n - (\mathbf{v}_2)_n}$$
$$2 = (\mathbf{v}_1')_n + (\mathbf{v}_2')_n \qquad (6)\,(0{,}8) = (\mathbf{v}_2')_n - (\mathbf{v}_1')_n$$

La solución del sistema de ecuaciones resulta en:

$$(\mathbf{v}_1')_n = -3{,}4\,\text{m/s} \qquad (\mathbf{v}_2')_n = 1{,}4\,\text{m/s}$$

Finalmente, las velocidades de los tejos después de colisionar son:

$$\mathbf{v}_1' = -3{,}4\,\hat{\mathbf{n}} + 2\sqrt{3}\,\hat{\mathbf{t}}$$
$$\mathbf{v}_2' = 1{,}4\,\hat{\mathbf{n}} - 3\,\hat{\mathbf{t}}$$

Los impulsos de interacción (colisión) son iguales y contrarios, y gracias a ello no es necesario incluirlos en los cálculos de la colisión cuando se utiliza el principio de impulso–momentum sobre el sistema completo. Para determinar el impulso de interacción se debe entonces utilizar el principio de impulso–momentum sobre un único tejo (cualquiera). La interacción (fuerzas de colisión) sólo ocurre en el eje "n", por lo que la interacción se puede estudiar en una sola dimensión. Analizando el tejo número 2, se obtiene:

$$m\,(\mathbf{v}_2)_n + \int f_n\,\mathrm{d}t = m\,(\mathbf{v}_2')_n$$
$$(0{,}17)\,(-4) + \int f_n\,\mathrm{d}t = (0{,}17)\,(1{,}4)$$
$$\int f_n\,\mathrm{d}t = 0{,}918\,\hat{\mathbf{n}}\ \text{kg·m/s} \quad [\text{N}\cdot\text{s}]$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Sugerido

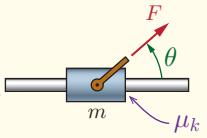
Determine el impulso de interacción del problema anterior utilizando el tejo número 1.

¿Era esperable la magnitud y signo obtenido para el impulso sobre el tejo número 1?

Ejemplo

Basado en Meriam 9th ed, Problem 3/155

El buje (collar) de masa m desliza por un eje rugoso ($\mu_k > 0$) bajo la acción de una fuerza de mangnitud F constante, con $F < mg$ pero dirección variable. El ángulo de la fuerza es $\theta(t) = k\,t$, donde k es una constante. El buje comienza con velocidad v_1 cuando $\theta = 0$. Se pide determinar:



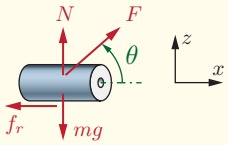
a) La velocidad v_2 cuando $\theta = 90°$.

b) El valor de F para que $v_1 = v_2$ si v_2 es la velocidad cuando $\theta = 90°$.

Lo primero es determinar el tiempo en que $\theta = 90°$:

$$\theta(t_f) = \frac{\pi}{2} = k\,t_f \qquad \longrightarrow \qquad t_f = \frac{\pi}{2k}$$

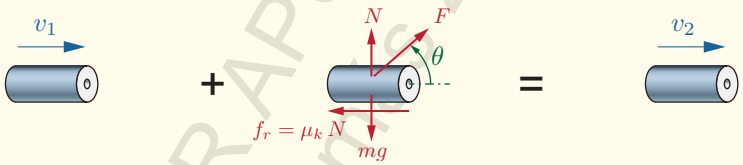
Luego, con ayuda de un DCL del buje, se utiliza la 2da ley de Newton en la dirección $\hat{\mathbf{k}}$. Se sabe que $\ddot{z} = 0$, lo que implica que $\sum \mathbf{f}_z = 0$:



$$N - mg + F\sin\theta = 0$$
$$N = mg - F\sin(k\,t)$$

Gracias a que $F < mg$, entonces sabemos que N es siempre positivo (según la dirección indicada en el DCL).

Luego de haber determinado las fuerzas y el tiempo durante el cual actúan, se puede utilizar el principio de impulso–momentum para determinar la velocidad final. Para ello, se comienza por hacer un diagrama de impulso–momentum:



En este caso, sólo es necesario utilizar la ecuación asociada a $\hat{\mathbf{i}}$:

$$m\,v_1 + \int_0^{t_f} F\cos(k\,t)\;\mathrm{d}t - \int_0^{t_f} \mu_k\,[mg - F\sin(k\,t)]\;\mathrm{d}t = m\,v_2$$
$$m\,v_1 + \left[\frac{F}{k}\sin(k\,t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2k}} - \left[\mu_k\,mg\,t + \frac{\mu_k\,F}{k}\cos(k\,t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2k}} = m\,v_2$$
$$m\,v_1 + \frac{F}{k} + \left[\mu_k\,\frac{F}{k} - \mu_k\frac{\pi\,mg}{2k}\right] = m\,v_2$$
$$v_2 = v_1 + \frac{F}{mk}(1+\mu_k) - \mu_k\,\frac{\pi\,g}{2k}$$

Para el caso que $v_1 = v_2$ se puede despejar el valor de la fuerza F de la ecuación:

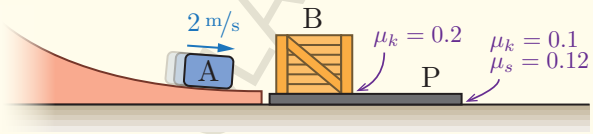
$$v_1 = v_1 + \frac{F}{mk}(1+\mu_k) - \mu_k\,\frac{\pi\,g}{2k}$$
$$\frac{F}{mk}(1+\mu_k) = \mu_k\,\frac{\pi\,g}{2k}$$
$$F = \frac{\mu_k\,\pi\,mg}{2\,(1+\mu_k)}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Nota: No es inusual que se intente resolver problemas de este tipo con el principio de trabajo–energía. En este caso es claramente no-recomendable ya que se conoce la fuerza en el tiempo y no respecto a la posición. En general (aunque siempre hay excepciones) se dice que: **(a)** cuando se tiene $F\,(t)$ suele ser mejor utilizar impulso–momentum; y **(b)** cuando se tiene $F\,(u)$ suele ser mejor utilizar trabajo–energía.

Ejemplo

Basado en Hibbeler 12$^{\text{th}}$ ed, Problem 15–44



Un bloque A de masa $m_{\text{A}} = 2\,\text{kg}$ desliza a $2\,\text{m/s}$ al interior de una caja B la cual está abierta por un solo lado. La caja B tiene masa $m_{\text{B}} = 3\,\text{kg}$ y se encuentra en reposo sobre una placa P de masa $m_{\text{P}} = 3\,\text{kg}$.

El coeficiente de roce cinético entre la caja y la placa es $\mu_k = 0{,}2$. Los coeficientes de roce cinético y estático de la placa con el suelo son $\mu_k = 0{,}1$ y $\mu_s = 0{,}12$, respectivamente.

Se pide determinar:

a) El tiempo que transcurre para que el sistema vuelva a estar en reposo.

b) La distancia que se desplaza la placa sobre el suelo antes de detenerse.

Lo primero que ocurre en el sistema es un choque perfectamente plástico entre el bloque y la caja (i.e. $e = 0$). Hay conservación de momentum lineal y luego del choque ambos se mueven a la misma velocidad (resultado de imponer $e = 0$):

$$\begin{aligned} m_{\text{A}}\, v_{\text{A}} &= (m_{\text{A}} + m_{\text{B}})\, v_2 \\ (2)\,(2) &= (2+3)\, v_2 \\ v_2 &= \frac{4}{5}\,\text{m/s} \end{aligned}$$

Ahora se tiene un cuerpo de $5\,\text{kg}$ (bloque y caja) que se mueve a $\frac{4}{5}\,\text{m/s}$ sobre la placa. Los DCL de ambos cuerpos son los siguientes:



Ninguno de los dos cuerpos acelera verticalmente, por lo que utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton para ambos:

$$N_1 = W_1 = (m_{\text{A}} + m_{\text{B}}) = 5g \qquad\qquad N_2 = W_2 + N_1 = m_{\text{P}} + 5g = 8g$$

El roce entre la caja y la placa intentará acelerar la placa, mientras que el roce de la placa con el suelo intentarán detener la placa. La placa se moverá hacia la derecha si $f_{r1} > f_{r2}^{\text{estático}}$. Es decir:

$$\begin{aligned} f_{r1} = 0{,}2\, N_1 &\overset{?}{>} f_{r2}^{\text{estático}} = 0{,}12\, N_2 \\ f_{r1} = (0{,}2)\,(5g) = g &\overset{?}{>} f_{r2}^{\text{estático}} = (0{,}12)\,(8g) = 0{,}96g \end{aligned}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Se cumple que $f_{r1} = g > 0{,}96g = f_{r2}^{\text{estático}}$, y con ello se vence el roce estático entre la placa y el suelo. Es decir, la placa acelerará hacia la derecha con la caja y bloque sobre ella.

La caja va a deslizar sobre la placa hasta que ambas tengan la misma velocidad v_3. Utilizando la ecuación de impulso y momentum en el sentido horizontal para ambos cuerpos se tiene:

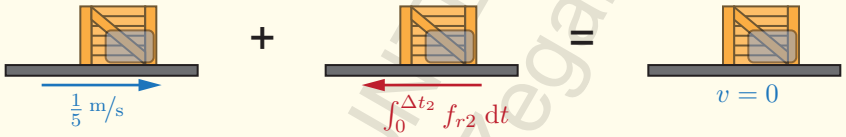
$$\text{caja:} \qquad (5)\left(\frac{4}{5}\right) - \int_0^{\Delta t_1} (0{,}2)\,(5g)\ \mathrm{d}t = 5\,v_2$$

$$\text{placa:} \qquad 0 + \int_0^{\Delta t_1} (0{,}2)\,(5g)\ \mathrm{d}t - \int_0^{\Delta t_1} (0{,}1)\,(8g)\ \mathrm{d}t = 5\,v_2$$

, donde se ha utilizado el coeficiente de roce cinético entre la placa y el suelo (ya se determinó que la placa desliza sobre el suelo). Las integrales son triviales ya que la fuerza de roce es constante, resultando en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 4 - g\,\Delta t_1 &= 5\,v_2 \\ g\,\Delta t_1 - 0{,}8g\,\Delta t_1 &= 3\,v_2 \end{aligned}\right\} \quad \longrightarrow \quad v_2 = \frac{1}{5}\,\text{m/s} \quad \text{y} \quad \Delta t_1 = \frac{3}{g}\,\text{s}$$

Transcurridos $\Delta t_1 = \frac{3}{g}\,\text{s}$, se tiene a la placa, caja y bloque, todos moviéndose juntos con velocidad $v_2 = \frac{1}{5}\,\text{m/s}$. Utilizando nuevamente la ecuación de impulso y momentum para determinar el tiempo necesario para que el sistema se detenga, se obtiene el siguiente diagrama y ecuación:



$$(8)\left(\frac{1}{5}\right) + \int_0^{\Delta t_2} (0{,}1)\,(8g)\ \mathrm{d}t = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta t_2 = \frac{2}{g}\,\text{s}$$

Es decir, el sistema se detiene por completo en el instante $t^\star$ tal que:

$$t^\star = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{3}{g} + \frac{2}{g} = \frac{5}{g} \qquad [\sim 0{,}51\,\text{s}]$$

Para determinar la distancia recorrida se puede utilizar la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton gracias a que los tiempos de duración de cada fase son conocidos y las aceleraciones son constantes. Se define como "fase 1" a la situación en que la caja desliza sobre la placa, y "fase 2" a la situación en que la caja y placa se mueven juntas hasta detenerse.

La aceleración de la placa en fase 1 es:

$$\begin{aligned} \sum f_x &= m_{\text{P}}\,a_{x1} \\ (0{,}2)\,(5g) - (0{,}1)\,(8g) &= 3\,a_{x1} \\ a_{x1} &= \frac{0{,}2}{3}\,g \end{aligned}$$

Luego, la distancia recorrida por la placa en fase 1 es:

$$\Delta d_1 = \underbrace{v_0\,\Delta t_1}_{=0} + \frac{1}{2}\,a_{x1}\,(\Delta t_1)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{0{,}2}{3}\,g\right)\left(\frac{3}{g}\right)^2$$

$$\Delta d_1 = \frac{0{,}3}{g}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

La aceleración de la placa (con la caja encima) en fase 2 es:

$$\begin{aligned}\sum f_x &= (m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B} + m_\mathrm{P})\, a_{x2} \\ -(0{,}1)\,(8g) &= 8\, a_{x2} \\ a_{x2} &= -\frac{0{,}8}{8}\, g = -\frac{g}{10}\end{aligned}$$

Luego, la distancia recorrida por la placa y caja en fase 2 es:

$$\Delta d_2 = v_0\, \Delta t_1 + \frac{1}{2}\, a_{x2}\, (\Delta t_1)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{g}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{g}{10}\right)\left(\frac{2}{g}\right)^2$$
$$\Delta d_2 = \frac{2}{5g} - \frac{1}{5g} = \frac{1}{5g}$$

La distancia total recorrida por la placa es:

$$\Delta d^\star = \Delta d_1 + \Delta d_2 = \frac{3}{10g} + \frac{1}{5g} = \frac{1}{2g} \qquad [\sim 0{,}051\,\mathrm{m}]$$

6.4. Sistemas de masa variable

Nuestro estudio de la dinámica de partículas ha asumido (hasta ahora) que la masa es constante. El caso de una partícula que gana/pierde masa se puede estudiar desde el punto de vista de impulso–momentum usando una metodología similar a la de colisiones y separaciones. Los sistemas de ganan o pierden masa en el tiempo requieren formular las ecuaciones de impulso–momentum de manera diferencial; i.e. para un Δt pequeño. Ejemplos de un sistema de masa variable son: cohetes, cosechadoras, y levantar una cadena pesada del piso.

6.4.1. Sistemas que pierden o eyectan masa

El caso general de un sistema que pierde masa es el de un cohete de masa m y velocidad v, y que expulsa (o eyecta) una cantidad de masa m_e a velocidad v_e; como muestra la Figura 6.6. El sistema puede también estar sometido a una fuerza externa neta $\sum \mathbf{f}$; e.g., la sumatoria del peso, resistencia del viento (roce viscoso), y otras fuerzas. El diagrama de impulso–momentum del cohete para un intervalo de tiempo Δt diferencial (muy pequeño) se muestra en la Figura 6.6.

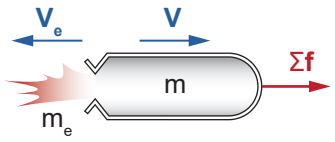


Figura 6.6: Sistema de masa variable: El recipiente, que se encuentra bajo la acción de fuerzas externas $\sum \mathbf{f}$, se propulsa debido a que está eyectando masa m_e con velocidad $\mathbf{v}_e$.

La "fuerza de empuje" que se genera producto de la eyección de masa es una fuerza de tipo *interno*, que al igual que con las colisiones actúa sobre el cohete y la pluma de eyección con igual magnitud y dirección, pero sentido opuesto. Si se formula el principio de impulso y momentum para el sistema completo, la fuerza de empuje (o impulso debido a la misma) se cancela. Llamaremos f a la componente de $\mathbf{f}$ en la dirección de movimiento del cohete. Formulando el principio de impulso

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

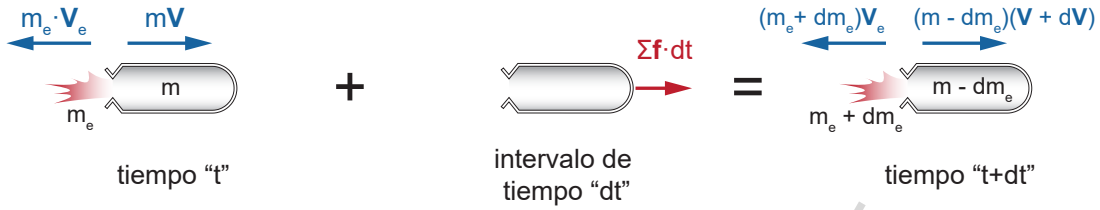


Figura 6.7: Diagrama de impulso–momentum para un sistema que eyecta masa.

y momentum en la dirección del movimiento del sistema según la Figura 6.7, se tiene:

$$
\begin{aligned}
m\,v - m_e\,v_e + \left(\sum f\right)\,\mathrm{d}t &= (m - \mathrm{d}m_e)\,(v + \mathrm{d}v) - (m_e + \mathrm{d}m_e)\,v_e \\
\left(\sum f\right)\,\mathrm{d}t &= -v\,\mathrm{d}m_e + m\,\mathrm{d}v - \underbrace{\mathrm{d}m_e \cdot \mathrm{d}v}_{2^{\text{do}}\text{orden}\,\to 0} - v_e\,\mathrm{d}m_e \\
\left(\sum f\right)\,\mathrm{d}t &= m\,\mathrm{d}v - (v + v_e)\,\mathrm{d}m_e \\
\sum f &= m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - (v + v_e)\,\frac{\mathrm{d}m_e}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

El término $(v + v_e)$ es la velocidad (rapidez) con que la pluma eyectada y el cohete se alejan entre sí, la que llamaremos *velocidad relativa de separación*. En otras palabras, es la velocidad con que el cohete se aleja para un observador en a pluma de eyección:

$$v_{c/e} = v + v_e$$

Llamando a la velocidad con que se eyecta masa:

$$\dot{m} = \frac{\mathrm{d}m_e}{\mathrm{d}t}$$

, se puede entonces reescribir la ecuación para llegar a:

$$\boxed{\sum f = m\,\dot{v} - v_{c/e}\,\dot{m}} \tag{6.10}$$

, donde $m\,\dot{v}$ es igual a (masa · aceleración); mientras que el término $\left(v_{c/e} \cdot \dot{m}\right)$ es el *empuje* generado por el motor del cohete.

6.4.2. Sistemas que ganan o capturan masa

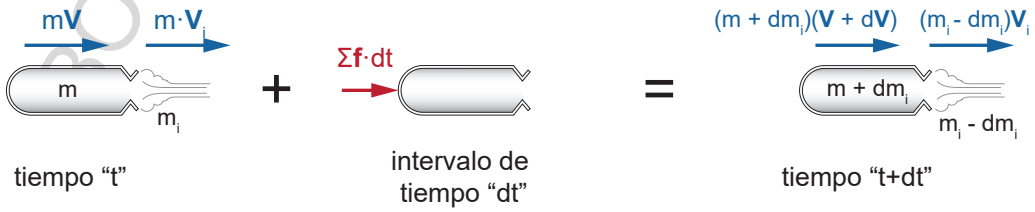


Figura 6.8: Diagrama de impulso–momentum para un sistema que captura masa.

Un sistema que gana masa es el caso de una botella (vaso, o tolva) que se mueve hacia adelante capturando masa a medida que avanza. Formulando el principio de impulso y momentum en la

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

dirección del movimiento del sistema según la Figura 6.8, se tiene:

$$\begin{aligned} m\,v + m_i\,v_i + \left(\sum f\right)\,\mathrm{d}t &= (m + \mathrm{d}m_i)\,(v + \mathrm{d}v) + (m_i - \mathrm{d}m_i)\,v_i \\ \sum f\,\mathrm{d}t &= v\,\mathrm{d}m_i + m\,\mathrm{d}v + \underbrace{\mathrm{d}m_i \cdot \mathrm{d}v}_{2^{\text{do}}\text{orden}\,\to\,0} - v_i\,\mathrm{d}m_i \\ \left(\sum f\right)\,\mathrm{d}t &= m\,\mathrm{d}v + (v - v_i)\,\mathrm{d}m_i \\ \sum f &= m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + (v - v_i)\,\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior; **f** es la resultante de todas las fuerzas externas exceptuando el *empuje*, que en el caso de un sistema que gana masa ralentiza al recipiente. Llamando $v_{c/i} = (v - v_i)$ a la velocidad con que se captura masa, se puede reescribir la ecuación para llegar a:

$$\boxed{\sum f = m\,\dot{v} + v_{c/i}\,\dot{m}} \tag{6.11}$$

, donde el término $\left(v_{c/i} \cdot \dot{m}\right)$ representa la fuerza que ejerce la masa ingresando al "recipiente" que ralentizará al mismo.

6.4.3. Caso general

Definiendo $\dot{m} < 0$ como una pérdida o eyección de masa, y $\dot{m} > 0$ a una ganancia o captura de la misma; podemos combinar las Ecuaciones (6.10) y (6.11) en una sola expresión general:

$$\boxed{\sum f = m\,\dot{v} + v_{c/p}\,\dot{m}} \tag{6.12}$$

, donde $v_{c/p}$ es la velocidad relativa del cohete con la pluma de eyección/captura.

Ejemplo

Basado en Hibbeler 14$^{\text{th}}$ ed, Example 15.18



Un cohete con masa inicial total m_0, masa que considera la masa del combustible m_f, consume combustible a una velocidad $\mathrm{d}m_e/\mathrm{d}t = c$. El combustible el eyectado a una velocidad u relativa al cohete. Suponga que no hay roce con el aire, g no varía con la altura, y el cohete parte del reposo ($v_0 = 0$). Determine la velocidad máxima del cohete (cuando se acaba el combustible).

Como es un caso de eyección de masa, se tiene que: $\dot{m} = -c$. La masa del cohete en el tiempo es:

$$m\,(t) = m_0 + \dot{m}\,t = m_0 - c\,t$$

Las fuerzas externas sobre el sistema se determinan de un DCL del sistema:

$$\sum f = -W = -mg$$

Es decir, la única fuerza externa sobre el sistema es la fuerza de gravedad. Usando la ecuación (general) para los sistemas de masa variable:

$$\begin{aligned} \sum f &= m\,\dot{v} + v_{c/p}\,\dot{m} \\ -mg &= m\,\dot{v} + (u)\,(-c) \end{aligned}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Reemplazando la masa por su expresión en el tiempo:

$$-(m_0 - c\,t)\,g = (m_0 - c\,t)\,\dot{v} + (u)\,(-c)$$
$$\dot{v} = \frac{-1}{m_0 - c\,t}\left[(m_0 - c\,t)\,g - u\,c\right] = \frac{u\,c}{m_0 - c\,t} - g$$

La ecuación diferencial se puede resolver por separación de variables con $\dot{v} = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}v = \left(\frac{u\,c}{m_0 - c\,t} - g\right)\mathrm{d}t$$
$$v = -u \cdot \log\left(m_0 - c\,t\right) - g\,t + C_1$$

Usando la condición inicial $v\,(t=0) = v_0 = 0$ se obtiene $C_1 = u \cdot \log\left(m_0\right)$, con lo que finalmente la velocidad es:

$$v = -u \cdot \log\left(m_0 - c\,t\right) - g\,t + u \cdot \log\left(m_0\right)$$
$$v = u \cdot \log\left(\frac{m_0}{m_0 - c\,t}\right) - g\,t$$

El combustible se termina en el instante $t^\star$ tal que:

$$m\,(t^\star) = m_0 - c\,t^\star = m_0 - m_f$$
$$c\,t^\star = m_f$$
$$t^\star = \frac{m_f}{c}$$

Con ello, la velocidad máxima del cohete es:

$$v_{\max} = v\,(t^\star) = u \cdot \log\left(\frac{m_0}{m_0 - m_f}\right) - \frac{g\,m_f}{c}$$

Nota: En la solución de este tipo de problemas frecuentemente se debe obtener $m\,(t)$ para usarse en conjunto con la ecuación del sistema de masa variable.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

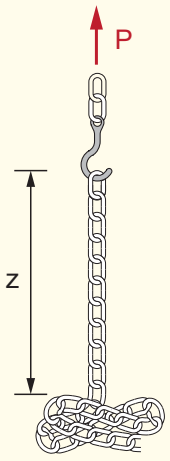
Ejemplo

Basado en Meriam 9th ed, Sample Problem 4/10

Una cadena de largo L y masa ρ por unidad de longitud, es levantada del reposo a velocidad constante $\overline{v}$ por una fuerza variable P. Se pide determinar:

a) La fuerza p en función de la altura z levantada.

b) La energía perdida al levantar la cadena completa.



Con ayuda de un DCL se determina que las fuerzas externas que actúan sobre el sistema son:

$$\sum \mathbf{f}_z: \qquad P - W = P - (\rho\,z)\,g$$

La masa del sistema en el tiempo es:

$$m\,(t) = \rho\,\overline{v}\,t$$

, con lo que la velocidad con la que el sistema gana masa es:

$$\dot{m} = \frac{\mathrm{d}m\,(t)}{\mathrm{d}t} = \rho\,\overline{v}$$

Como $\overline{v} = \text{const}$, entonces $\dot{v} = a = 0$. La velocidad relativa entre la cadena levantada y a pila en el suelo es:

$$v_{c/p} = \overline{v} - 0 = \overline{v}$$

Se tienen todos los ingredientes para usar la ecuación que gobierna los sistemas de masa variable:

$$\begin{aligned}\sum f = P - (\rho\,z)\,g = m\,\dot{v} + v_{c/p}\,\dot{m} = 0 + \overline{v}\,(\rho\,\overline{v})\\ P - \rho\,z\,g = \rho\,\overline{v}^2\\ P = \rho\left(g\,z + \overline{v}^2\right)\end{aligned}$$

Una vez que se levante la cadena completa su *centro de masa* se encontrará a una altura $z^\star = L/2$ sobre el suelo. La masa total de la cadena es $m_f = \rho\,L$. La pérdida de energía se obtiene calculando la diferencia de energía en la ecuación de conservación de energía (análogo al trabajo hecho por fuerzas no-conservativas):

$$\begin{aligned}(V_g)_1 + T_1 + \int_0^L P\;\mathrm{d}z + \Delta E = (V_g)_2 + T_2\\ 0 + 0 + \int_0^L \rho\left(g\,z + \overline{v}^2\right)\;\mathrm{d}z + \Delta E = \underbrace{(\rho\,L)}_{m}\,g\,\underbrace{\left(\frac{L}{2}\right)}_{z^\star} + \frac{1}{2}\,\underbrace{(\rho\,L)}_{m}\,\overline{v}^2\\ \frac{1}{2}\,\rho\,g\,L^2 + \rho\,L\,\overline{v}^2 + \Delta E = \frac{1}{2}\,\rho\,g\,L^2 + \frac{1}{2}\,\rho\,L\,\overline{v}^2\\ \Delta E = -\frac{1}{2}\,\rho\,L\,\overline{v}^2\end{aligned}$$

La energía perdida, que corresponde al trabajo hecho por las fuerzas no-conservativas, es $\Delta E = -\frac{1}{2}\,\rho\,L\,\overline{v}^2$. Esto implica que mientras más rápido se levante la cadena, más energía se deberá suministrar al sistema.

Bonus: Determine la fuerza P para bajar la cadena con $\overline{v} = \text{const}$.

Cuando la cadena se levanta, era la fuerza P la que producía el impulso para llevar a un eslabón del reposo a la velocidad $\overline{v}$. Cuando la cadena baja, los eslabones se detienen producto de una fuerza (impulso) contra el suelo, y no una reacción interna hacia los demás eslabones suspendidos. Es decir, no es un problema de masa variable y basta con utilizar la 2^a ley de Newton:

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{f}_z: \qquad P - (\rho\cdot z)\,g = m\cdot\dot{\overline{v}}\\ P - (\rho\cdot z)\,g = 0\\ P = \rho\cdot g\cdot z\end{aligned}$$

No es trivial la diferencia entre este caso y el anterior: requiere un tiempo de reflexión. Las siguientes preguntas le pueden ayudar a esclarecer la diferencia entre los dos casos:

- La fuerza normal (no está dibujada en el DCL): ¿Es parte del sistema de masa variable cuando se levanta la cadena?
- ¿Cómo varía la fuerza normal en el caso en que se levanta la cadena?
- La fuerza normal: ¿Es parte del sistema de masa variable cuando se baja la cadena?
- ¿Qué fuerza produce el impulso cuando se levanta la cadena? ¿Qué fuerza produce el impulso cuando se baja la cadena?

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Capítulo 7

Dinámica de cuerpos rígidos

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Hasta ahora hemos estudiado a fondo la dinámica de partículas (o cuerpos que pueden analizarse como partículas). En el caso de las partículas, basta con conocer su posición para definir su estado actual. Los cuerpos pueden trasladarse (cambio de posición), pero además pueden rotar. Es decir, en el caso de cuerpos la posición no basta para definir su estado actual.

Todos los cuerpos son tridimensionales[1]. Si un cuerpo es relativamente delgado y todos sus movimientos y rotaciones están contenidos en el mismo plano del cuerpo; sólo entonces se puede hacer un análisis plano (2D), como muestra la Figura 7.1. Un sistema rígido de partículas con vinculaciones se comporta y analiza como un cuerpo rígido: puede trasladarse y rotar.

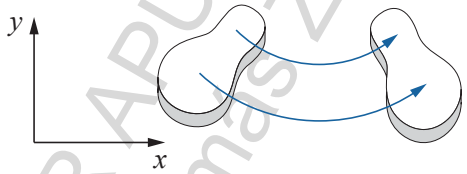


Figura 7.1: Cuerpo "plano" que se traslada y rota.

7.1. Momento (torque)

Las fueras que hemos estudiado hasta ahora tienden a mover un cuerpo en la misma dirección en que está aplicada la fuerza. Los *momentos*, también conocidos como *torque* o *momento torsor*, tienden a rotar un cuerpo sobre algún eje.

Recordatorio:
Los ingenieros civiles suelen referirse a este tipo de fuerza como *momento* y usan la letra $\mathbf{m}$. Los físicos en cambio, suelen llamar a la misma fuerza *torque* y emplean la letra $\boldsymbol{\tau}$.

Igualmente, en el caso de los textos/libros de dinámica: si el autor es más cercano a la ingeniería usará el término *momento*; mientras que si es más cercano a la física usará *torque*. El profesor de esta sección es un ingeniero civil (estructural), por lo que él está acostumbrado a usar la terminología *momento* (además que la sección `ICE` es de ingeniería). No obstante, se espera que usted se familiarice con ambas terminologías y evite confundir *momento* con *momentum*.

[1] Lo que es obvio al considerar que vivimos en un mundo tridimensional.

Pese a que el momento utiliza la misma letra que la masa (m), el significado se suele desprender del contexto (y unidades). Además, el momento es una fuerza $\mathbf{m}$ (vector), mientras que la masa es una magnitud m (escalar).

7.1.1. Momento respecto a un punto (2D)

Este es el caso de una fuerza actuando en el mismo plano de un cuerpo bidimensional, por lo que se puede simplificar el análisis a 2D. Si el cuerpo está "clavado" en un punto $\mathbf{a}$, entonces la fuerza intentará hacer rotar al cuerpo en torno a dicho punto. Es decir, existe un *momento* que hace rotar al cuerpo. La magnitud del momento es proporcional a la magnitud de la fuerza y al "brazo de momento" d:

$$\boxed{|\mathbf{m}| = f\, d} \tag{7.1}$$

, cuyas unidades son de (fuerza · distancia), e.g.: kN · m, N · cm, N · mm ... El momento es un vector que sale del plano:

$$\mathbf{m} = \pm m\, \hat{\mathbf{n}}$$

, cuyo signo se verá a continuación con la *regla de la mano derecha*. Para diferenciar un momento de una fuerza lineal (las fuerzas vistas hasta ahora) se puede utilizar una cabeza de flecha doble, como muestra la Figura 7.2; o bien una flecha que indica giro en torno a un eje.

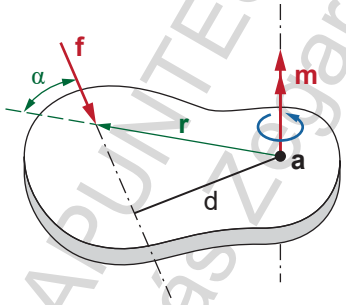


Figura 7.2: Cuerpo bidimensional "clavado" en el punto $\mathbf{a}$ que tiende a rotar por la acción de la fuerza $\mathbf{f}$.

Es muy importante comprender que el "brazo de momento" d es la distancia del punto (de interés) a la línea de acción de la fuerza: es la distancia **mínima** y **perpendicular** a la línea de acción, como muestra la Figura 7.2.

Un error frecuente es considerar d como la distancia entre el punto de interés y el punto de aplicación de la fuerza, que en el caso de la Figura 7.2 corresponde a $|\mathbf{r}|$. Esto es un error ya que $d \leq |\mathbf{r}|$.

7.1.2. Momento en tres dimensiones

El momento causado por una fuerza $\mathbf{f}$ respecto a un punto $\mathbf{a}$ es:

$$\boxed{\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}} \tag{7.2}$$

, donde $\mathbf{r}$ es el vector desde el punto $\mathbf{a}$ al punto de aplicación de la fuerza[2]. El resultado de la ecuación anterior es un vector (que sale del plano) con el signo correcto.

[2]En realidad $\mathbf{r}$ puede ser cualquier vector desde el punto $\mathbf{a}$ a la línea de acción de la fuerza. Pero típicamente lo más sencillo es tomar $\mathbf{r}$ al punto de aplicación de la fuerza (que suele ser conocido).

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Notar que el caso 2D es una simplificación del caso tridimensional, ya que por propiedad del producto cruz, la magnitud del vector (normal) resultante es:

$$|\mathbf{m}| = f\,d = f\,r\,\sin\alpha$$

, donde α está indicado en la Figura 7.2. Notar además que $(r \cdot \sin\alpha = d)$ es en efecto la distancia mínima (o proyección perpendicular) de $\mathbf{r}$.

Cuando es posible determinar el brazo d con facilidad, suele ser mejor y más rápido usar $\mathbf{m} = \pm\, m\,\hat{\mathbf{n}}$ y luego determinar el signo con la *regla de la mano derecha*. En el caso 3D se recomienda utilizar la ecuación vectorial $\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$, aunque es también posible utilizar el método $\mathbf{m} = \pm\, m\,\hat{\mathbf{n}}$ para cada uno de los tres planos (XY, YZ, y ZX), respectivamente, y luego componer el vector.

7.1.3. Regla de la mano derecha (RMD)

Para saber la dirección y sentido de un momento o una rotación (giro) se puede usar la *regla de la mano derecha* (RMD). El pulgar indica la dirección del vector (momento o giro), mientras que los otros dedos se curvan en la dirección de la rotación, como muestra la Figura 7.3. En el caso de un producto cruz ($\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$): los dedos se curvan desde el vector $\mathbf{r}$ hacia $\mathbf{f}$ en un plano (imaginario) que contiene a ambos vectores.



Figura 7.3: Regla de la mano derecha: los dedos se curvan en la dirección del giro (o de $\mathbf{r}$ a $\mathbf{f}$) y el pulgar apunta en la dirección del vector de giro/momento.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Una manera sencilla de estudiar y practicar en casa la convención de la RMD consiste en utilizar un perno y una tuerca: al girar la tuerca, la misma se desplazará en la dirección del vector.

La RMD requiere algo de práctica, y no es extraño ver personas curvando su mano en el aire mientras resuelven ejercicios (especialmente en cursos más avanzados como `ICE2005`, `ICE2114` y otros). Pareciera obvio pero vale la pena recalcarlo: no se puede hacer la RMD con la mano izquierda. Los signos resultantes estarán invertidos.

Una vez que se dominada la RMD será muy fácil responder preguntas como: "¿Hacia qué lado se suelta el tornillo/tuerca?", "¿En qué dirección debo girar la llave de agua para abrirla/cerrarla?", o ¿En qué dirección debo girar la tapa del recipiente para abrirlo?.

7.1.4. Centro de masa

En un cuerpo de dimensiones no-despreciables se puede considerar que el peso total del cuerpo actúa de forma concentrada en una posición específica llamada *centro de masa*. La posición donde actúa el peso se puede hallar gracias al momento que produce dicho peso respecto a cualquier punto de referencia; e.g. el origen del sistema coordenado. La Figura 7.4(a) muestra un cuerpo cuyo peso

total del cuerpo es:

$$W = \int \mathrm{d}w$$

Cada diferencial de peso dw aporta un pequeño momento respecto al origen, como muestra la Figura 7.4(a). La suma de todos los diferenciales de momentos calculados respecto al origen (de cada dw) es:

$$\mathbf{m}_z = \int x \, \mathrm{d}w \tag{7.3}$$

Llamando $\overline{x}$ a la coordenada del centro de masa según el eje $\hat{\mathbf{i}}$, y ubicando en dicha posición el peso total del cuerpo W, como muestra la Figura 7.4(a); el momento producido por W es:

$$\mathbf{m}_z = W \, \overline{x} \tag{7.4}$$

Ambos momentos, aquel causado por los diferenciales de peso y el causado por W, deben ser iguales. Igualando las ecuaciones (7.3) y (7.4) se puede despejar la posición (en el eje $\hat{\mathbf{i}}$) del centro de masa:

$$\overline{x} = \frac{\int x \, \mathrm{d}w}{W} = \frac{\int x \, \mathrm{d}w}{\int \mathrm{d}w} \tag{7.5}$$

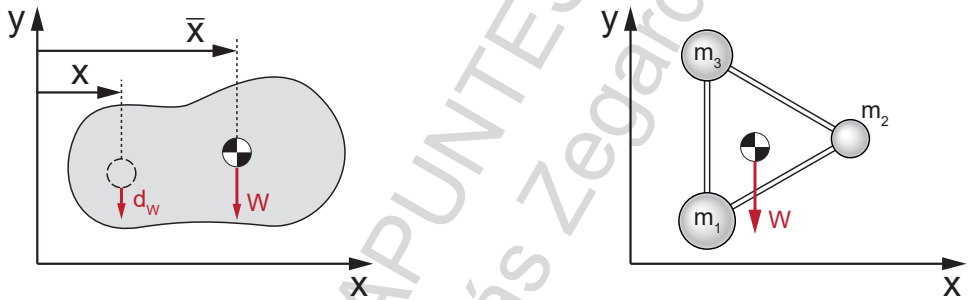


Figura 7.4: Ubicación $\overline{x}$ del centro de masa tal que el momento $\overline{x}\,W$ es igual a la sumatoria de diferenciales de momento de cada dw: **(a)** caso de un cuerpo de dimensiones no-despreciables; y **(b)** caso de un sistema rígido de partículas.

Un conjunto de partículas de masa m_i vinculadas rígidamente es también un cuerpo: el sistema rígido puede rotar, trasladarse, y tiene dimensiones no-despreciables. El cuerpo de la Figura 7.4(b) está compuesto por 3 partículas discretas, cada una con peso $w_i = m_i \cdot g$. El peso total del sistema de partículas de la figura es:

$$W = \int \mathrm{d}w = \sum_{i=0}^{3} w_i$$

Sumando la contribución al momento total de cada partícula del sistema se tiene:

$$\mathbf{m}_z = \sum_{i=0}^{3} x_i \, w_i$$

Finalmente, la coordenada según $\hat{\mathbf{i}}$ del centro de masa del sistema rígido de partículas es:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i \, w_i}{W} = \frac{\sum x_i \, w_i}{\sum w_i} \tag{7.6}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

El peso dw actúa en la dirección $-\hat{\mathbf{j}}$. El brazo de momento es la distancia mínima a su línea de acción, y corresponde a la coordenada x de dw. Esto es independiente de la *altura* (coordenada z) donde se ubica dw.

Ambos casos de la Figura 7.4 son simplificaciones 2D. En ese caso el momento es un vector que sale del plano: $\mathbf{m} = \pm m_z\,\hat{\mathbf{k}}$. Para un peso d$w$ que se encuentra a la derecha de $x = 0$, el momento será negativo según la regla de la mano derecha; mientras que si el peso se encuentra a la izquierda será positivo según la RMD.

Cuando se trata de cuerpos de dimensiones no-planetarias, la aceleración de gravedad g será constante en todo el cuerpo. Con ello, se tiene que:

$$W = m\,g \qquad\qquad \mathrm{d}w = \mathrm{d}m\,g$$

Es decir, las Ecuaciones (7.5) y (7.6) dependen directamente de la masa del cuerpo:

$$\text{caso contínuo:} \qquad \boxed{\overline{x} = \frac{\int x\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}} \tag{7.7}$$

$$\text{caso discreto:} \qquad \boxed{\overline{x} = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{\sum m_i}} \tag{7.8}$$

Se puede girar el cuerpo 90° a la vez, o bien asumir que la aceleración de gravedad actúa según los ejes $\hat{\mathbf{j}}$ y luego $\hat{\mathbf{k}}$ para obtener expresiones análogas en los otros ejes coordenados:

$$\text{caso contínuo:} \qquad \overline{y} = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} \qquad \overline{z} = \frac{\int z\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} \tag{7.9}$$

$$\text{caso discreto:} \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i \cdot m_i}{\sum m_i} \qquad \overline{z} = \frac{\sum z_i \cdot m_i}{\sum m_i} \tag{7.10}$$

Es interesante notar que el centro de masa (CM) podría ubicarse fuera del cuerpo (u objeto). Esto será frecuente con cuerpos cóncavos y en los sistemas rígidos de partículas.

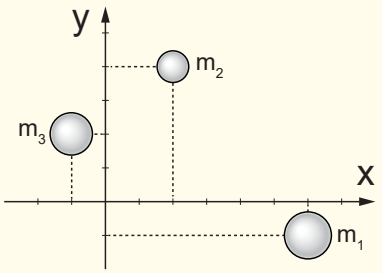
Ejemplo

Determine el centro de masa y peso total del sistema rígido de partículas vinculadas que se muestra en la Figura. Las masas de las partículas son:

$$m_1 = 5 \qquad m_2 = 3 \qquad m_3 = 4$$

, y están ubicadas en:

$$\mathbf{x}_1 = \{5\,;\,-1\} \qquad \mathbf{x}_2 = \{2\,;\,4\} \qquad \mathbf{x}_3 = \{-1\,;\,2\}$$



Determinaremos la posición del CM en una dirección (eje coordenado) a la vez:

$$\overline{x} = \frac{(\mathbf{x}_1)_x \cdot m_1 + (\mathbf{x}_2)_x \cdot m_2 + (\mathbf{x}_3)_x \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(5)\,(5) + (2)\,(3) + (-1)\,(4)}{5 + 3 + 4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

$$\overline{y} = \frac{(\mathbf{x}_1)_y \cdot m_1 + (\mathbf{x}_2)_y \cdot m_2 + (\mathbf{x}_3)_y \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(-1)\,(5) + (4)\,(3) + (2)\,(4)}{5 + 3 + 4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

, y el peso total es:

$$W = (m_1 + m_2 + m_3)\,g = 12 \cdot g$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Alternativamente, se puede determinar la posición del CM de forma vectorial (en todas las direcciones a la vez):

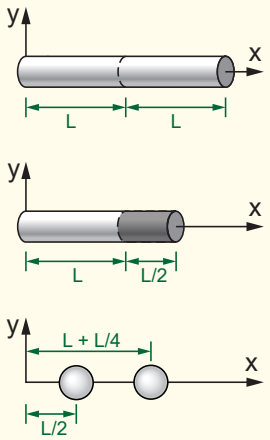
$$\overline{\mathbf{x}} = \{\overline{x}\,;\,\overline{y}\} = \frac{\mathbf{x_1}\cdot m_1 + \mathbf{x_2}\cdot m_2 + \mathbf{x_3}\cdot m_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{\{5\,;\,-1\}\cdot 5 + \{2\,;\,4\}\cdot 3 + \{-1\,;\,2\}\cdot 4}{5+3+4}$$

$$\overline{\mathbf{x}} = \{\overline{x}\,;\,\overline{y}\} = \frac{\{27\,;\,15\}}{12} = \{2{,}25\,;\,1{,}25\}$$

Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Example 2.1

Una barra uniforme y prismática de densidad ρ y largo $2L$ es deformada de modo que la mitad derecha está comprimida a una longitud $L/2$, sin variar su sección (transversal); como muestra la figura. Determine la ubicación del CM en la configuración deformada.



Método 1: composición de mitades con CM conocidos.

Cada mitad tiene masa $m_l = m_r = L\cdot a\cdot\rho$, donde a es el área de la sección transversal de la barra (uniforme según el enunciado). Se puede representar cada mitad como una partícula con su masa concentrada en su punto medio:

$$\overline{x} = \frac{m_l\,(L/2) + m_r\,(5L/4)}{m_l+m_r} = \frac{LA\rho\left(\frac{2L+5L}{4}\right)}{2La\rho} = \frac{7L}{8}$$

Método 2: cuerpo continuo con ρ variable.
La masa total de la barra es:

$$m = \int_0^L \rho\cdot a\,\mathrm{d}x + \int_L^{3L/2} (2\rho)\,a\,\mathrm{d}x = 2La\rho$$

, mientras que el promedio ponderado de los diferenciales de masa (asociado al momento):

$$m\,\overline{x} = \int_0^L \rho\cdot a\,x\,\mathrm{d}x + \int_L^{3L/2} (2\rho)\,a\,x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{L^2a\rho}{2} - 0\right] + \left[\frac{9L^2a\rho}{4} - L^2a\rho\right]$$
$$= \frac{9L^2a\rho}{4} - \frac{L^2a\rho}{2} = \frac{7L^2a\rho}{4}$$

Finalmente, el centro de masa se ubica en:

$$\overline{x} = \frac{m\,\overline{x}}{m} = \left(\frac{7L^2a\rho}{4}\right)\left(\frac{1}{2La\rho}\right) = \frac{7L}{8}$$

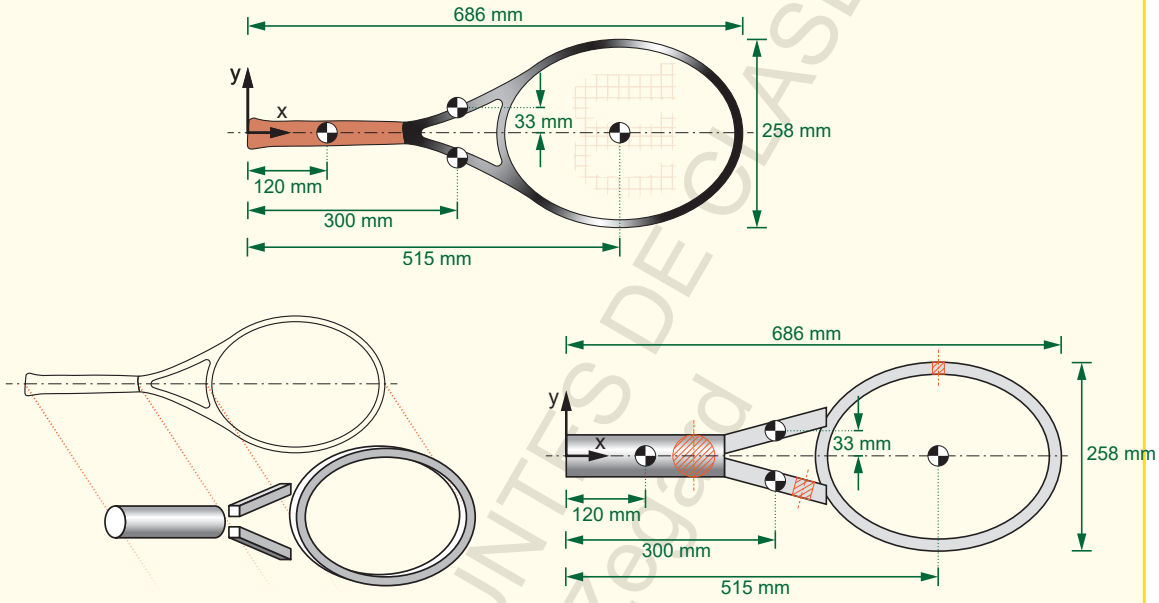
Nota: En el caso de un cuerpo compuesto por 2+ piezas de densidad variable: para cada pieza se puede determinar la masa y centro de masa usando la expresión integral. Luego se pueden combinar como si fueran cuerpos discretos.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

La raqueta de Pete Sampras del 2008, la *K Pro Staff 88*, se puede idealizar como un anillo elipsoidal de 146 gr de masa, dos tubos diagonales de 22 gr cada uno, y un mango de 154 gr. El encordado ocupa el área elipsoidal y tiene 17 gr de masa. El despiece de la raqueta y sus dimensiones se muestran en la figura a continuación.

Determine la ubicación $\overline{\mathbf{r}} = \{\overline{x}\,;\,\overline{y}\}$ del centro de masa.



Sabemos inmediatamente que $\overline{y} = 0$ debido a que el cuerpo es simétrico respecto a $y = 0$.

El centro de masa del anillo elipsoidal $\overline{\mathbf{r}}_e$ y del encordado $\overline{\mathbf{r}}_c$ coinciden con el centro de la elipse:

$$\overline{\mathbf{r}}_e = \overline{\mathbf{r}}_c = \{515\,\text{mm}\,;\,0\}$$

Para simplificar los cálculos, unificaremos las 2 diagonales en un nuevo cuerpo con masa 44 gr y cuyo CM está en:

$$\overline{\mathbf{r}}_d = \{300\,\text{mm}\,;\,0\}$$

Finalmente, calculamos la coordenada x del CM de la raqueta componiendo 4 cuerpos discretos:

$$\overline{x} = \frac{\overline{x}_h \cdot m_h + \overline{x}_d \cdot m_d + \overline{x}_e \cdot m_e + \overline{x}_c \cdot m_c}{\sum m_i}$$

$$\overline{x} = \frac{(154)\,(120) + (44)\,(300) + (146)\,(515) + (17)\,(515)}{154 + 44 + 146 + 17} = \frac{115625}{361} = 320{,}3\,\text{mm}$$

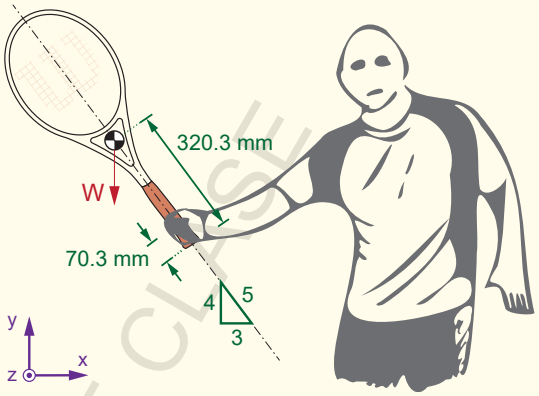
Es decir, el CM de la raqueta se encuentra en $\overline{\mathbf{r}} = \{320{,}3\,\text{mm}\,;\,0\,\text{mm}\}$.

Nota: Los componentes de un cuerpo se pueden combinar en etapas si eso le sirve para simplificar los cálculos. En este ejemplo se combinaron dos cuerpos (las diagonales) previo a combinar con el resto de las partes.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

Pete Sampras sujeta su raqueta a 70,3 mm del extremo y la tiene quieta como muestra la figura. Determine el momento (torque) que él siente sobre su mano. Asuma que $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

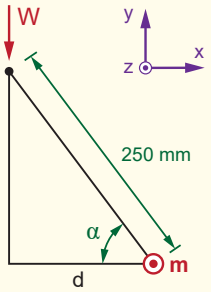


Sabemos del ejemplo anterior que la masa de la raqueta es $m = 361\,\mathrm{gr}$, y con ello su peso es:

$$W = 3{,}61\,\mathrm{N}$$

El brazo de momento d es la distancia más corta y perpendicular al eje de acción de la fuerza, en este caso el peso. Es decir, por geometría el brazo de momento d es:

$$d = 250 \cdot \cos\alpha = (250)\left(\frac{3}{5}\right) = 150\,\mathrm{mm}$$



El signo del momento es positivo según la regla de la mano derecha (sentido contrarreloj o saliendo del plano): ⊙.

Finalmente, la raqueta ejerce un momento sobre la mano de Pete Sampras igual a:

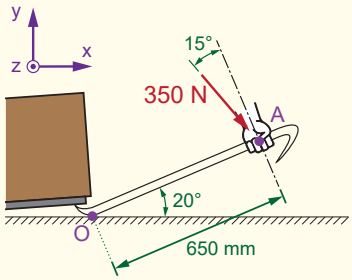
$$\mathbf{m} = +\,(0{,}15)\,(3{,}61)\;\hat{\mathbf{k}} = 0{,}5415\,\hat{\mathbf{k}}\;\mathrm{N\cdot m}$$

Nota: En este ejemplo la raqueta ejerce un momento igual a $\mathbf{m} = 0{,}5415\,\hat{\mathbf{k}}\;\mathrm{N\cdot m}$ sobre la mano del jugador. Para mantener la raqueta quieta, es decir con aceleración angular $\alpha = 0$, el jugador debe ejercer un momento igual pero con signo contrario $\mathbf{r}_\theta = -0{,}5415\,\hat{\mathbf{k}}\;\mathrm{N\cdot m}$. La fuerza (o momento) que ejerce la mano $\mathbf{r}_\theta$ para balancear el momento $\mathbf{m}$ se llama *reacción*. Esto es análogo a lo que ocurre con un objeto sobre una superficie: el objeto ejerce una fuerza de peso sobre la superficie, mientras que la superficie ejerce una reacción para balancear el peso, *la normal*.

Ejemplo

Meriam: Statics 8th ed, Problem 2/37

Una persona levanta la esquina de un "*hot tub*" (jacuzzi exterior) para hacerle mantenimiento. Determine el momento causado por la fuerza de 350 N respecto al punto O. Desprecie el espesor de la palanca.

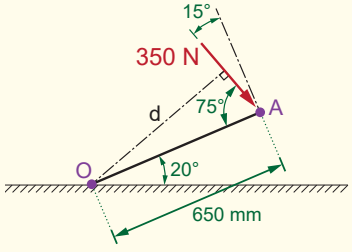


Método 1: $m = \pm f \cdot d$

Usando la regla de la mano derecha vemos que la fuerza produce un momento negativo respecto al punto O: ⊗.

El brazo de momento d (menor distancia a la línea de acción de la fuerza) se obtiene de la geometría del problema:

$$d = 650 \cdot \sin(75^\circ) = 627{,}9\,\mathrm{mm}$$



Finalmente, el momento respecto al punto O es:

$$\mathbf{m} = -\,(0{,}6279)\,(350)\;\hat{\mathbf{k}} = -219{,}7\,\hat{\mathbf{k}}\;\mathrm{N\cdot m}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Método 2: $\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$

El vector $\mathbf{r}$ va desde el punto de interés O hasta el punto de aplicación de la fuerza A:

$$\mathbf{r} = (0{,}65)\left[\cos(20°)\,\hat{\mathbf{i}} + \sin(20°)\,\hat{\mathbf{j}}\right]$$

El vector de fuerza es:

$$\mathbf{f} = (350)\left[\sin(35°)\,\hat{\mathbf{i}} - \cos(35°)\,\hat{\mathbf{j}}\right]$$

Finalmente, el momento respecto al punto O es:

$$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \det\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0{,}611 & 0{,}222 & 0 \\ 200{,}8 & -286{,}7 & 0 \end{bmatrix} = -219{,}7\,\hat{\mathbf{k}}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

7.2. Momentum angular

Dada una partícula de masa m que se mueve en el plano XY con velocidad $\mathbf{v}$, entonces su *momentum angular* respecto a un punto O es igual al "momento causado por su momentum" llamado $\mathbf{H}_O$, como muestra la Figura 7.5. En este caso $\mathbf{H}_O$ sólo tiene la componente z distinta de cero:

$$(\mathbf{H}_O)_z = \pm\,(d)\,(mv) \qquad \leftarrow \text{momento de momentum}$$

, lo que de forma vectorial es:

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times (m\,\mathbf{v}) \tag{7.11}$$

Las unidades de momentum angular son $^{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}/_{\mathrm{s}}$ o similares.

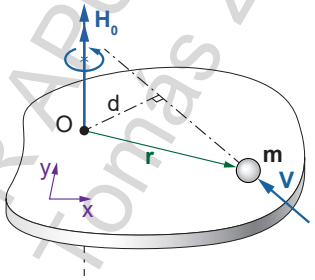


Figura 7.5: Partícula de masa m que se mueve en el plano XY con velocidad $\mathbf{v}$, y el *momentum angular* $\mathbf{H}_O = H_O\,\hat{\mathbf{k}}$ que genera respecto a un punto O.

7.2.1. Relación entre momento y momentum angular

Si la masa de una partícula es constante, entonces la 2^a Ley de Newton dice:

$$\sum \mathbf{f} = m\,\dot{\mathbf{v}}$$

El momento causado por la resultante de fuerzas $\sum \mathbf{f}$ respecto a un punto O es:

$$\sum \mathbf{m} = \mathbf{r} \times \sum \mathbf{f} = \mathbf{r} \times (m\,\dot{\mathbf{v}})$$

, que no es más que pre-cruz-multiplicar ambos lados por $\mathbf{r}$. Por otro lado, tenemos la definición de momentum angular de la Ecuación (7.11). Tomando la derivada temporal de dicha expresión:

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times (m\,\dot{\mathbf{v}})$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Como $\mathbf{r}$ es un vector desde el origen a la posición actual de la masa m, entonces $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ y con ello:

$$\dot{\mathbf{H}}_O = m \underbrace{(\mathbf{v} \times \mathbf{v})}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{r} \times (m\,\dot{\mathbf{v}})$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{H}}_O = \sum \mathbf{m}} \tag{7.12}$$

, que es análogo al caso de momentum (lineal) visto en la Ecuación (6.3).

El subíndice O en $\mathbf{H}_O$ indica que el momentum angular está calculado respecto a dicho punto. En la Ecuación (7.12), todos los momentos $\mathbf{m}$ en la sumatoria se deben calcular respecto al mismo punto O.

Recordatorio: La Sección 2.1 explica que si $\mathbf{r}$ es la posición, entonces $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$.

Integrando la Ecuación (7.12) entre instantes t_1 y t_2 se llega a la ley de impulso–momentum en su versión angular:

$$\boxed{(\mathbf{H}_O)_1 + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m}_i \, \mathrm{d}t = (\mathbf{H}_O)_2} \tag{7.13}$$

, donde el *impulso angular* también puede escribirse en términos de las fuerzas que causan los momentos:

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) \, \mathrm{d}t = (\mathbf{H}_O)_2$$

La Ecuación (7.13) es vectorial: nos entrega 3 ecuaciones adicionales asociadas a los giros θ_x, θ_y, y θ_z. Las 3 nuevas ecuaciones de impulso y momentum angular (Ecuación (7.13)) se suman a las 3 ecuaciones de impulso y momentum lineal vistas anteriormente (Sección 6.1). Es decir, para un problema en tres dimensiones se tiene:

$$\mathbf{L}_{1x} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{ix} \, \mathrm{d}t = \mathbf{L}_{2x} \qquad (\mathbf{H}_O)_{1x} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m}_{ix} \, \mathrm{d}t = (\mathbf{H}_O)_{2x}$$

$$\mathbf{L}_{1y} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{iy} \, \mathrm{d}t = \mathbf{L}_{2y} \qquad (\mathbf{H}_O)_{1y} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m}_{iy} \, \mathrm{d}t = (\mathbf{H}_O)_{2y}$$

$$\mathbf{L}_{1z} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{iz} \, \mathrm{d}t = \mathbf{L}_{2z} \qquad (\mathbf{H}_O)_{1z} + \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m}_{iz} \, \mathrm{d}t = (\mathbf{H}_O)_{2z}$$

7.2.2. Conservación de momentum angular

Cuando la suma de impulsos angulares actuando sobre un sistema es cero; el momentum angular inicial y final del sistema no varía. Es decir:

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad \text{cuando} \quad \sum \mathbf{m} = \mathbf{0} \tag{7.14}$$

Esta ecuación representa la *conservación de momentum angular*, y es análoga a la presentada en la Sección 6.2. La conservación de momentum angular ocurre frecuentemente cuando una partícula está sometida a una *fuerza central*: el momento que una fuerza central genera respecto a su punto central es siempre cero ya que el brazo de momento es cero.

7.2.3. Principio de impulso–momentum angular en 2D

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

En este curso es frecuente que los problemas que involucran giros sean bidimensionales debido a la dificultad que el análisis de rotaciones presenta para los alumnos. No obstante, se debe tener en cuenta que esto corresponde a un caso simplificado y particular.

Cuando un problema se puede analizar en 2D (los movimientos del cuerpo/partícula están contenidos en el plano); las traslaciones se encuentran en el plano XY, mientras que los giros están en el eje Z (según $\hat{\mathbf{k}}$). Es decir, uno cuenta con las siguientes 3 ecuaciones de impulso–momentum:

$$m\,(\mathbf{v}_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_x \,\mathrm{d}t = m\,(\mathbf{v}_x)_2$$
$$m\,(\mathbf{v}_y)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_y \,\mathrm{d}t = m\,(\mathbf{v}_y)_2$$
$$(\mathbf{H}_O)_{1z} + \sum \int_{t_1}^{t_2} m_z \,\mathrm{d}t = (\mathbf{H}_O)_{2z}$$

En el caso particular en que el impulso angular $\sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m}_z \,\mathrm{d}t$ es cero, entonces se conserva el momentum angular entre t_1 y t_2:

$$(\mathbf{H}_O)_{1z} = (\mathbf{H}_O)_{2z} \qquad \text{cuando} \quad \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m}_z \,\mathrm{d}t = 0 \tag{7.15}$$

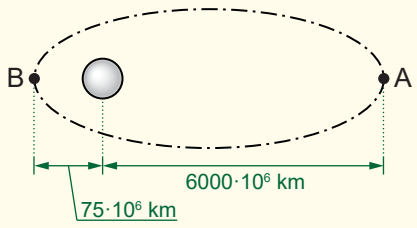
El momentum angular fue aquí derivado y estudiado para sistemas de *partículas*. Esto contradice el nombre del presente capítulo en que se supone estudiaríamos la dinámica de *cuerpos rígidos*. Se pide al lector paciencia al respecto; la progresión de partículas a cuerpos ocurrirá muy pronto.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

Meriam 9th ed, Sample Problem 3/25

Un cometa orbita alrededor del sol en una órbita muy excéntrica. La rapidez del cometa es $v_A = 740\,\mathrm{m/s}$ en el punto más lejano al sol (punto A). Determine la rapidez del cometa en el punto más cercano al sol (punto B).



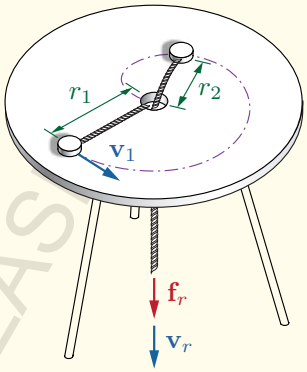
La única fuerza que actúa sobre el cometa es la fuerza de gravedad ejercida por el sol (fuerza de tipo *central*).

Como la fuerza siempre apunta al centro del sol, ésta no produce momento respecto al mismo sol. Es decir, el momentum angular respecto al sol se conserva.

$$(H_O)_A = (H_O)_B$$
$$r_A\,(m\,v_a) = r_B\,(m\,v_B)$$
$$\rightarrow \quad v_B = \left(\frac{r_A\,m}{r_B\,m}\right) v_a = \left(\frac{6000 \cdot 10^6}{75 \cdot 10^6}\right)(740) = (80)\,(740) = 59200\,\mathrm{m/s}$$

Ejemplo

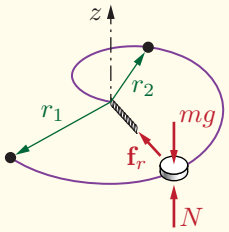
Basado en Hibbeler 14th ed, Example 15.14



Un disco de 0,5 kg gira con velocidad $\mathbf{v}_{1\theta} = 1\,\text{m/s}$ y radio constante $r_1 = 0{,}9\,\text{m}$ (movimiento circular) sobre una mesa sin roce. El disco está sujeto por una cuerda que pasa por un orificio al centro de la mesa. Sobre la cuerda se aplica una fuerza $\mathbf{f}_r$ que recoge la cuerda por el agujero a velocidad $\mathbf{v}_r = 4\,\text{m/s}$ (constante). Se pide determinar:

a) La velocidad (vector)y rapidez del disco cuando el radio es $r_2 = 0{,}3\,\text{m}$.

b) El trabajo hecho por la fuerza $\mathbf{f}_r$ al reducir el radio de r_1 a r_2.



Comenzamos haciendo un DCL del problema, donde se muestra el disco y todas las fuerzas que actúan sobre él en su trayecto desde r_1 a r_2, y se ubica el eje $\hat{\mathbf{k}}$ en el centro de la mesa.
Las fuerzas en el eje $\hat{\mathbf{k}}$ son mg y N: iguales pero de signo contrario porque el disco no acelera en el eje $\hat{\mathbf{k}}$. Es decir, no generan momento respecto al eje $\hat{\mathbf{k}}$ porque: **(1)** se cancelan; y **(2)** porque de generar momento lo harían en el plano XY.

En este caso la magnitud de la fuerza $\mathbf{f}_r = -f\,\hat{\mathbf{e}}_r$ varía a medida que acortamos el radio, pero no genera momento respecto al centro de la mesa en el eje Z: su brazo de momento es cero (fuerza central). Es decir, el momentum angular respecto al eje Z se conserva.

La velocidad del disco es $\mathbf{v} = v_r\,\hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$. Inicialmente la velocidad no tiene componente radial (movimiento circular):

$$\mathbf{v}_1 = 1\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\ \text{m/s}$$

En la segunda posición, cuando $r = r_2$, se tiene que $v_r = -4\,\text{m/s}$ y con ello:

$$\mathbf{v}_2 = -4\,\hat{\mathbf{e}}_r + v_{2\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Recordando que el momentum angular es el "momento de un momentum (lineal)", entonces sólo v_θ contribuye al momentum angular (el momentum $m\,v_r$ no genera momento respecto al centro de la mesa). Debido a que el momentum angular se conserva, se tiene que:

$$\begin{aligned} (H_O)_1 &= (H_O)_2 \\ r_1\,(m\,v_{1\theta}) &= r_2\,(m\,v_{2\theta}) \\ \longrightarrow \qquad v_{2\theta} &= \left(\frac{r_1}{r_2}\right) v_{1\theta} = \left(\frac{0{,}9}{0{,}3}\right)(1) = 3\,\text{m/s} \end{aligned}$$

Es decir, la velocidad de la masa en $r_2 = 0{,}3\,m$ es:

$$\mathbf{v}_2 = -4\,\hat{\mathbf{e}}_r + 3\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\ \text{m/s}$$

, cuya magnitud (rapidez) es $v_2 = |\mathbf{v}_2| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = 5\,\text{m/s}$.

Como no hay desplazamiento en $\hat{\mathbf{k}}$ del disco, las fuerzas de meso mg y normal N no hacen trabajo. La única que fuerza que hace trabajo en el sistema es $\mathbf{f}_r$, con lo que aplicando el principio de energía

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

y trabajo:

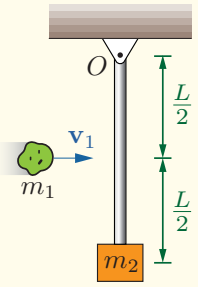
$$\underbrace{V_1}_{=0} + T_1 + \underbrace{U_{12}^{\star}}_{\text{trabajo de } \mathbf{f}_r} = \underbrace{V_2}_{=0} + T_2$$

$$\frac{1}{2}\, m\, |\mathbf{v}_1|^2 + U_{12}^{\star} = \frac{1}{2}\, m\, |\mathbf{v}_2|^2$$

$$U_{12}^{\star} = \frac{1}{2}\, m \left(|\mathbf{v}_2|^2 - |\mathbf{v}_1|^2 \right) = \left(\frac{1}{2} \right) (0{,}5)\, (25 - 1) = 6\,\text{N} \cdot \text{m} = 6\,\text{J}$$

Ejemplo

Basado en Meriam 9th ed, Problem 3/188

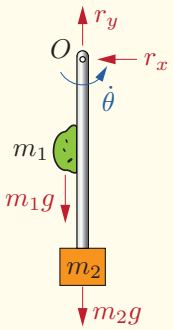


Una bola de plastilina m_1 con velocidad horizontal inicial v_1 golpea y se adhiere a una barra rígida de masa despreciable que soporta una masa m_2, la que se puede asumir como una partícula. El péndulo es libre de rotar en el pivote en O y está inicialmente en reposo.

a) Determine la velocidad angular $\dot{\theta}$ del sistema combinado el instante después del impacto.

b) ¿Por qué no se conserva el momentum lineal del sistema?

El primer paso consiste en hacer un DCL del sistema barra–plastilina. El impacto genera un par de fuerzas idénticas, pero con signo contrario en el sistema péndulo–plastilina (fuerzas de colisión), que debido a que se cancelan no generan momento. Las fuerzas de reacción en el pivote en O llamadas r_x y r_y no generan momento respecto a O, y tampoco lo hacen $m_1 g$ y $m_2 g$.



Es decir, respecto al punto O se conserva el momentum angular antes y después de la colisión ya que $\sum \int m\, \mathrm{d}t = 0$. Es decir:

$$(H_O)_1 = (H_O)_2$$

$$\left(\frac{L}{2}\right) \underbrace{(m_1 \cdot v_1)}_{\substack{\text{momentum} \\ \text{lineal}}} = \left(\frac{L}{2}\right) \underbrace{\left[m_1 \left(\frac{L}{2} \cdot \dot{\theta} \right) \right]}_{\substack{\text{momentum} \\ \text{lineal}}} + (L) \underbrace{\left[m_2 \left(L \cdot \dot{\theta} \right) \right]}_{\substack{\text{momentum} \\ \text{lineal}}}$$

Los momentum angulares son todos positivos según la *regla de la mano derecha*. Simplificando y despejando $\dot{\theta}$:

$$2\, m_1\, v_1 = m_1\, L\, \dot{\theta} + 4\, m_2\, L\, \dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{2\, m_1\, v_1}{m_1\, L + 4\, m_2\, L} = \left(\frac{2\, m_1}{m_1 + 4\, m_2} \right) \frac{v_1}{L}$$

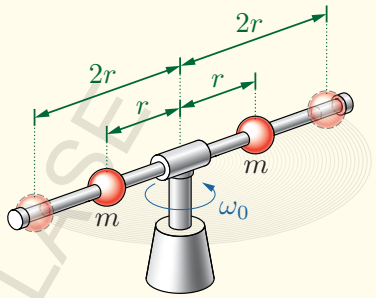
El momentum lineal no se conversa porque existen reacciones r_x y r_y en el pivote del péndulo que producen impulsos sobre el sistema.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

Basado en Meriam 9th ed, Problem 3/184

Dos esferas de igual masa m pueden deslizar por una barra sin roce y de masa despreciable. La barra inicialmente rota con velocidad angular ω_0 y con las dos esferas retenidas a una distancia r del eje de rotación. En cierto instante las esferas se liberan y asumen una nueva posición a distancia $2r$ del eje de rotación. Se pide determinar:



a) La nueva velocidad angular ω después que se liberan las esferas.

b) La fracción de la energía cinética inicial $n = |\Delta T/T_1|$ que se pierde.

Las fuerzas de choque cuando las esferas llegan al extremo de la barra, y luego la fuerza centrípeta que mantiene a las esferas girando con radio constante; no generan momento en torno al eje de rotación. Es decir, se conserva el momentum angular en torno a dicho eje y con ello:

$$(H_0)_1 = (H_0)_2$$

$$(r)\left[(2\,m)\underbrace{(r\,\omega_0)}_{v_1}\right] = (2r)\left[(2\,m)\underbrace{(2r\,\omega)}_{v_2}\right]$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{4}$$

La energía cinética inicial es:

$$T_1 = (2)\left[\frac{1}{2}\,m\,(r\,\omega_0)^2\right] = m\,r^2\,\omega_0^2$$

La energía cinética final es:

$$T_2 = (2)\left[\frac{1}{2}\,m\left(2r\,\frac{\omega_0}{4}\right)^2\right] = \frac{1}{4}\,m\,r^2\,\omega_0^2$$

La variación de energía es:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{3}{4}\,m\,r^2\,\omega_0^2$$

El valor negativo indica que se ha perdido energía. Finalmente, la fracción de la energía cinética inicial que se ha perdido es:

$$n = \left|\frac{\Delta T}{T_1}\right| = \frac{3}{4}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

7.3. Cinemática rotacional

El Capítulo 2 tuvo enfoque en la cinemática de partículas, la cual es sólo traslacional. Un cuerpo en cambio, puede trasladarse y rotar al mismo tiempo. En ciertas situaciones ambos movimientos (rotación y traslación) estarán ligados o vinculados (e.g. una rueda que gira sin deslizar o un yo-yo).

La cinemática de traslación se extiende directamente a la cinemática de rotación de un cuerpo. La cinética, principio de trabajo–energía, y principio de impulso–momentum se extienden también a cuerpos, pero falta derivar un término equivalente a la masa asociada a la rotación (no es igual a la masa).

Dado un sólido de dimensiones no-despreciables (un *cuerpo*), podemos aplicar las mismas ecuaciones que hemos usado para cinemática traslacional de partículas, pero en el sentido rotacional:

Tipo de cinemática	Posición	Velocidad	Aceleración
Traslacional	$\mathbf{u}$	$\dot{\mathbf{u}}$, $\mathbf{v}$	$\ddot{\mathbf{u}}$, $\dot{\mathbf{v}}$, $\mathbf{a}$
Rotacional	$\boldsymbol{\theta}$	$\dot{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\omega}$	$\ddot{\boldsymbol{\theta}}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, $\boldsymbol{\alpha}$

, donde $\Delta\boldsymbol{\theta} = \theta_2 - \theta_1 =$ desplazamiento angular;
$\boldsymbol{\omega} =$ velocidad angular;
$\boldsymbol{\alpha} =$ aceleración angular.

La cinemática rotacional funciona de la misma forma que la traslacional. Es decir, la derivada de la posición $\boldsymbol{\theta}$ es la velocidad $\boldsymbol{\omega}$, y la derivada de la velocidad $\boldsymbol{\omega}$ es la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Así mismo, la solución para el caso particular de aceleración constante tiene la misma forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) &= \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\alpha}\, t \\ \boldsymbol{\theta}(t) &= \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\omega}_0\, t + \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\alpha}\, t^2 \end{aligned} \qquad \leftarrow \quad \text{sólo cuando } \boldsymbol{\alpha} = \text{const}$$

En caso en que $\boldsymbol{\alpha} \neq$ const se debe resolver la EDO al igual que en el caso traslacional.

7.3.1. Cinemática rotacional en 2D

La velocidad y aceleración que describe un punto A de un cuerpo que gira sobre un determinado eje en O es:

$$v = r\,\omega \tag{7.16a}$$
$$a_n = -a_r = r\,\omega^2 = v^2/r = v\,\omega \tag{7.16b}$$
$$a_t = a_\theta = r\,\alpha \tag{7.16c}$$

Estas expresiones son idénticas a las de una partícula en movimiento circular. En el caso 2D, las ecuaciones anteriores demuestran que es posible trabajar con los giros como magnitudes escalares, donde los signos se obtienen de acuerdo a la "regla de la mano derecha". Es crítico comprender que pese a poder analizar los giros de forma escalar, los giros son en realidad vectores $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\omega}$, y $\boldsymbol{\alpha}$, que salen o entran del plano. Las componentes de los vectores de velocidad y aceleración se muestran gráficamente en la Figura 7.6.

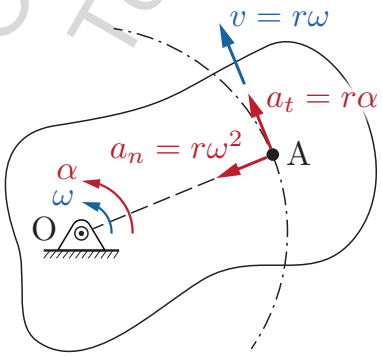


Figura 7.6: Cinemática rotacional en 2D: velocidad y aceleración para un punto A a distancia r del eje de rotación.

El término de aceleración $a_t = r\,\alpha$ podría parecer demasiado sencillo, al igual que el término radial $a_n = -a_r = r\,\omega^2$, pero su derivación es sencilla. Debido a que un cuerpo que no se deforma, entonces

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

$\ddot{r} = \dot{r} = 0$, y las expresiones en coordenadas polares se simplifican:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$
$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta = -r\,\omega^2\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\alpha\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

7.3.2. Cinemática rotacional en 3D

Cuando no es posible simplificar la dinámica del problema a un plano 2D es conveniente utilizar operaciones vectoriales. La Figura 7.7 explica gráficamente la relación entre los vectores de giro y la velocidad y aceleración de un punto A cualquiera en un cuerpo. Es decir:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{7.17a}$$
$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\omega^2\,\mathbf{r} \tag{7.17b}$$
$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \tag{7.17c}$$

El vector de aceleración completo es: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2\,\mathbf{r}$.

Notar que $\mathbf{r}$ es el vector perpendicular desde el eje de rotación al punto A. Este vector se encuentra (necesariamente) contenido en el plano de rotación del punto A y su norma es la distancia mínima de A al eje de rotación.

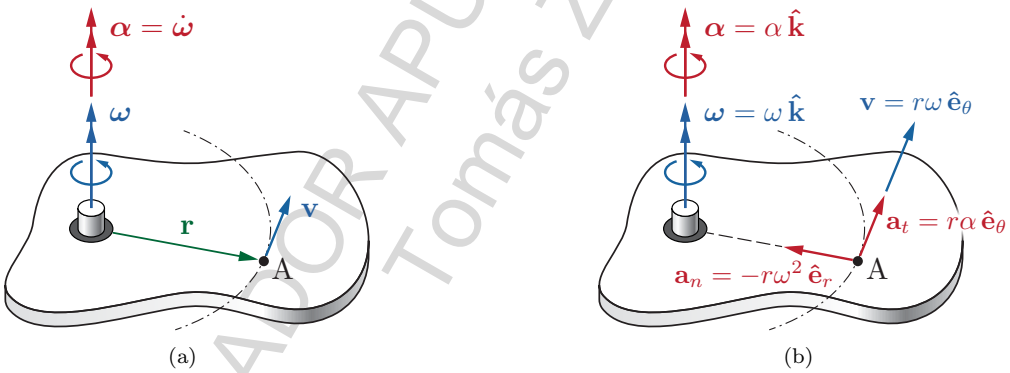


Figura 7.7: Cinemática rotacional de un punto A ubicado a $\mathbf{r}$ del eje de rotación, el cual es perpendicular al eje de rotación: **(a)** vectores de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$, y velocidad $\mathbf{v}$; **(b)** cálculo de los vectores de aceleración normal $\mathbf{a}_n$ y tangencial $\mathbf{a}_t$, y el vector de velocidad $\mathbf{v}$.

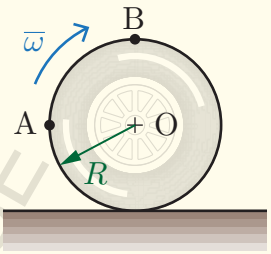
Operar de forma vectorial con las rotaciones tiene como ventaja que no hay que usar la "regla de la mano derecha"; i.e. los signos estarán siempre correctos. No obstante, un producto cruz suele requerir mayor cantidad de cálculos (a menos que se utilice una calculadora).

En este curso no es común evaluar la cinemática 3D (vectorial) en los instrumentos de evaluación.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

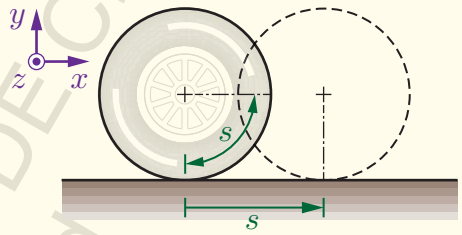
Basado en Pytel & Kiusalaas 3rd ed, Sample Problem 16.4



Una rueda de radio R rueda sin deslizar girando en sentido horario con velocidad angular $\overline{\omega}$, es decir $\boldsymbol{\omega} = -\overline{\omega}\,\hat{\mathbf{k}}$. Para la posición que muestra la figura, se pide determinar el vector de velocidad para:

a) El punto A

b) El punto B



Gracias a que la rueda gira sin deslizar, existe una "ligadura" o "movimiento dependiente" entre el giro y la traslación de la rueda (también llamada condición de "rodadura"). Es importante ser consistente con los signos según los ejes coordenados: un giro en $-\hat{\mathbf{k}}$, es decir ⊗, produce un desplazamiento de la rueda según $+\hat{\mathbf{i}}$. Es decir, la coordenada x del centro O de la rueda es:

$$x = x_0 + s = x_0 - \theta\, R$$

Notar que en la expresión anterior un valor $\theta < 0$ produce un desplazamiento positivo, i.e., $\Delta x > 0$.

Derivando la "ligadura" (o condición de rodadura) respecto al tiempo, se obtiene una relación entre la velocidad del centro de la rueda $\mathbf{v}_O$ y su velocidad angular ω:

$$\mathbf{v}_O = -\omega\, R\,\hat{\mathbf{i}}$$

La velocidad angular en nuestro caso es $\boldsymbol{\omega} = -\overline{\omega}\,\hat{\mathbf{k}}$ (negativo por ser en sentido horario), y con ello:

$$\mathbf{v}_O = \overline{\omega}\, R\,\hat{\mathbf{i}}$$

La velocidad del punto A es igual a la velocidad del centro de la rueda O, sumado a la velocidad de A respecto a O (asumiendo este último como fijo):

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{A/O} = \quad v_O = \overline{\omega}\cdot R \quad + \quad \overline{\omega}\cdot R,\ R,\ \overline{\omega}$$

Es decir:

$$\mathbf{v}_A = (\overline{\omega}\, R)\,\hat{\mathbf{i}} + (\overline{\omega}\, R)\,\hat{\mathbf{j}}$$

Similarmente, la velocidad del punto B es:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{B/O} = \quad v_O = \overline{\omega}\cdot R \quad + \quad R,\ \overline{\omega}\cdot R,\ \overline{\omega}$$

Es decir:

$$\mathbf{v}_B = (\overline{\omega}\, R)\,\hat{\mathbf{i}} + (\overline{\omega}\, R)\,\hat{\mathbf{i}} = (2\,\overline{\omega}\, R)\,\hat{\mathbf{i}}$$

Resumiendo, las velocidades de los puntos A y B son:

$$\mathbf{v}_A = \begin{Bmatrix} \overline{\omega}\, R \\ \overline{\omega}\, R \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{v}_B = \begin{Bmatrix} 2\,\overline{\omega}\, R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Procedimiento alternativo: El problema puede ser resuelto también operando de forma vectorial y no escalar. Sabemos que las velocidades son:

$$\boldsymbol{\omega} = -\varpi\,\hat{\mathbf{k}} \qquad\qquad \mathbf{v}_O = \varpi\,R\,\hat{\mathbf{i}}$$

La posición del punto A respecto a O es:

$$\mathbf{r}_{A/O} = -R\,\hat{\mathbf{i}}$$

La velocidad del punto A es:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{A/O} = \varpi\,R\,\hat{\mathbf{i}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/O} = \varpi\,R\,\hat{\mathbf{i}} + \left(-\varpi\,\hat{\mathbf{k}}\right) \times \left(-R\,\hat{\mathbf{i}}\right)$$
$$\mathbf{v}_A = \varpi\,R\,\hat{\mathbf{i}} + \varpi\,R\,\hat{\mathbf{j}}$$

La posición del punto B respecto a O es:

$$\mathbf{r}_{B/O} = R\,\hat{\mathbf{j}}$$

La velocidad del punto B es:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{B/O} = \varpi\,R\,\hat{\mathbf{i}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/O} = \varpi\,R\,\hat{\mathbf{i}} + \left(-\varpi\,\hat{\mathbf{k}}\right) \times \left(R\,\hat{\mathbf{j}}\right)$$
$$\mathbf{v}_B = \varpi\,R\,\hat{\mathbf{i}} + \varpi\,R\,\hat{\mathbf{i}} = 2\,\varpi\,R\,\hat{\mathbf{i}}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

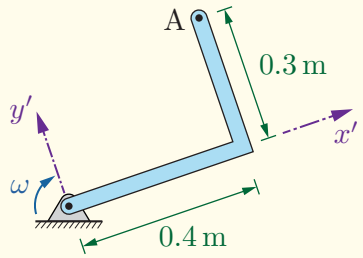
Basado en Meriam 9th ed, Sample Problem 5/3

La barra en ángulo de la figura está girando en sentido horario pero desacelerando a $4\,\mathrm{rad/s^2}$. Se pide determinar:

a) La velocidad y aceleración angular en el instante de interés de forma vectorial si $\hat{\mathbf{k}}$ sale del plano (lo importante son los signos).

b) Los vectores de velocidad y aceleración del punto A cuando $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$.

c) Las magnitudes de velocidad y aceleración.



Se puede determinar lo pedido pese a que es imposible determinar $\theta\,(t)$ al desconocer θ_0 y ω_0.

Por la "regla de la mano derecha" el sentido horario es negativo. La velocidad y aceleración angular en el instante pedido son:

$$\boldsymbol{\omega} = -2\,\hat{\mathbf{k}} \quad \mathrm{rad/s} \qquad\qquad \boldsymbol{\alpha} = 4\,\hat{\mathbf{k}} \quad \mathrm{rad/s^2}$$

Es conveniente definir los ejes $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ relativos a la barra, coincidiendo así con $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$). Es decir, los ejes x' e y' rotan con la barra. Si se llega a conocer $\theta(t)$ se pueden transformar los resultados a los ejes $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ reales.

El vector de posición de A (según los ejes locales x' e y') es:

$$\mathbf{r} = 0{,}4\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}3\,\hat{\mathbf{j}} \quad \mathrm{m}$$

Con ello, el vector de velocidad del punto A es:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & -2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \end{bmatrix} = 0{,}6\,\hat{\mathbf{i}} - 0{,}8\,\hat{\mathbf{j}} \quad \text{m/s}$$

La aceleración del punto A es:

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \left(-2\,\hat{\mathbf{k}}\right) \times \left(0{,}6\,\hat{\mathbf{i}} - 0{,}8\,\hat{\mathbf{j}}\right) = -1{,}6\,\hat{\mathbf{i}} - 1{,}2\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} = \left(4\,\hat{\mathbf{k}}\right) \times \left(0{,}4\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}3\,\hat{\mathbf{j}}\right) = -1{,}2\,\hat{\mathbf{i}} + 1{,}6\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\rightarrow \qquad \mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t = -2{,}8\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}4\,\hat{\mathbf{j}} \quad \text{m/s}^2$$

Las magnitudes de ambos vectores (velocidad y aceleración) son:

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(0{,}6)^2 + (0{,}8)^2} = 1 \text{ m/s}$$

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{(-2{,}8)^2 + (0{,}4)^2} = \sqrt{8} = 2{,}828 \text{ m/s}^2$$

7.4. Cinética de cuerpos rígidos

La cinética establece la relación entre las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo y su movimiento: traslación y (ahora también) rotación. En el caso de la traslación la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton resultaba en la Ecuación (3.1):

$$\sum_i \mathbf{f}_i = \mathbf{f} = m\,\ddot{\mathbf{u}}$$

En el caso de una rotación, en lugar de la masa debemos introducir una propiedad del cuerpo que considera la "distribución radial de la masa respecto al eje en que ocurre la rotación". Dicha propiedad se llama *momento de inercia*, o *momento de inercia másico*, con nomenclatura I y unidades $\text{kg} \cdot \text{m}^2$, $\text{ton} \cdot \text{mm}^2$, y similares.

La posición, desplazamiento, velocidad, y aceleración, de cualquier punto en un cuerpo quedan determinados conociendo: **(1)** la trayectoria de su centro de masa G, y **(2)** el giro del cuerpo respecto al mismo G; como muestra la Figura 7.8. La dificultad radica en que la trayectoria del centro de masa G y el giro respecto al mismo se suelen expresar en sistemas coordenados diferentes: cartesiano ($\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$) para la traslación; y polar/cilíndrico ($\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, y $\hat{\mathbf{k}}$) para los giros.

Sabemos calcular el momentum angular de una partícula que rota (Sección 7.2). El momentum angular de una fracción de masa pequeña m_i de un cuerpo mayor se puede obtener igual que para una partícula:

$$[\mathbf{H}_G]_i = \mathbf{r}_i \times \underbrace{(m_i\,\dot{\mathbf{r}}_i)}_{\substack{\text{momentum} \\ \text{lineal}}} = m_i\,(\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i)$$

, donde el subíndice G indica que es el momentum angular es calculado con respecto al centro de masa G del cuerpo. Pero de la sección anterior sabemos que $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es común a todo el cuerpo[3]. Reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$[\mathbf{H}_G]_i = m_i\,\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \tag{7.18}$$

Esto corresponde al momentum angular de una fracción de masa m_i. Sólo resta considerar el cuerpo completo para obtener una expresión válida para la cinética del cuerpo.

[3] En un cuerpo rígido todos los puntos rotan por igual, y por eso no es necesario un subíndice i.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

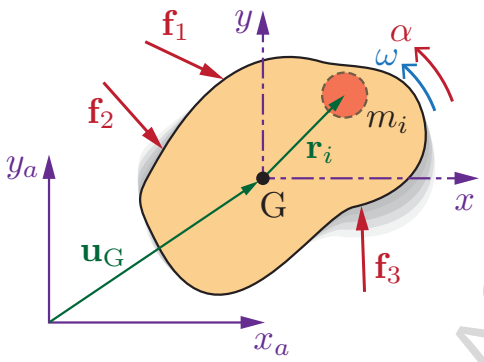


Figura 7.8: Cuerpo que se traslada y rota: la traslación se puede analizar respecto al centro de masa G como si fuera una partícula; mientras que la rotación ocurre en torno al mismo centro de masa G, como si se tuviera un sistema coordenado móvil.

7.4.1. Momento de inercia 2D

En el caso específico de un problema 2D, la velocidad angular es $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\hat{\mathbf{k}}$ y es perpendicular a $\mathbf{r}_i$. Debido a ello, el producto cruz entre ambos es trivial y su magnitud es:

$$[\mathbf{H}_G]_i = m_i\, r_i^2\, \omega$$

El cuerpo completo está compuesto por todas las fracciones de masa m_i. Considerando todos los m_i del cuerpo, es posible entonces determinar el momentum angular del cuerpo completo que se encuentra rotando con velocidad angular ω:

$$\mathbf{H}_G = \sum_i [\mathbf{H}_G]_i = \omega \left(\sum_i m_i\, r_i^2 \right)$$

, donde en realidad la fracción de masa m_i debe ser un diferencial de masa $\mathrm{d}m$ del cuerpo completo:

$$\boxed{\mathbf{H}_G = \omega \int r^2\, \mathrm{d}m = I\, \omega} \tag{7.19}$$

, donde el momento de inercia másico está definido como:

$$\boxed{I = \int r^2\, \mathrm{d}m} \tag{7.20}$$

, donde r es el vector desde el eje de rotación al diferencial de masa $\mathrm{d}m$. Notar que el momento de inercia másico I depende de: **(a)** la masa; **(b)** la geometría o forma del cuerpo; y **(c)** el eje de rotación del cuerpo.

La Ecuación (7.12) entrega una relación entre la variación del momentum angular y la sumatoria de momentos. El momento de inercia de un cuerpo rígido I no varía en el tiempo, y con ello:

$$\sum \mathbf{m}_z = \dot{\mathbf{H}}_O = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I\, \boldsymbol{\omega}_z\right)$$
$$\boxed{\sum \mathbf{m}_z = I\, \boldsymbol{\alpha}_z} \tag{7.21}$$

Esta ecuación complementa las ecuaciones de cinética traslacional vistas anteriormente. Finalmente,

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

para un cuerpo 2D se tienen las siguientes ecuaciones de cinética:

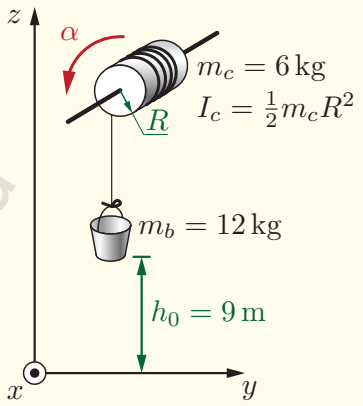
$$\sum \mathbf{f}_x = m\,\ddot{\mathbf{u}}_x \tag{7.22a}$$
$$\sum \mathbf{f}_y = m\,\ddot{\mathbf{u}}_y \tag{7.22b}$$
$$\sum \mathbf{m}_z = I\,\boldsymbol{\alpha}_z \tag{7.22c}$$

El momento de inercia de un cuerpo se suele calcular (o reportar) en torno a su centro de masa. Cuando el cuerpo rota en torno a un punto O distinto al centro de masa, se puede utilizar la inercia respecto al centro de masa I_G y hacer un *cambio de eje de rotación* para así obtener I_O; lo que será estudiado más adelante.

Ejemplo

Basado en Knight 4th ed, Example 12.12

Un pozo de agua tiene un balde unido a una cuerda sin masa que se enrolla en un cilindro. La masa del balde es $m_b = 12\,\text{kg}$, la del cilindro es $m_c = 6\,\text{kg}$, el radio del cilindro es $R = 10\,\text{cm}$, la inercia del cilindro es $I_c = \frac{1}{2} m_c R^2$, y el balde se encuentra a una altura $h_0 = 9\,\text{m}$ del fondo. Asuma que $g = 10\,^{m}/_{s^2}$. Determine el tiempo que tarda el balde en tocar el fondo del pozo si se libera desde el reposo.



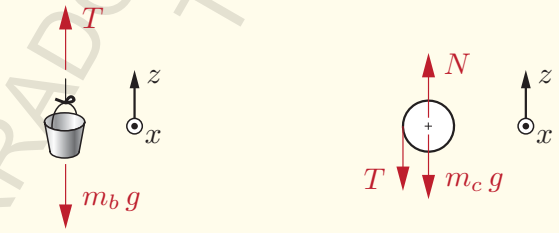
Un giro positivo en $\hat{i}$ hace descender el balde, con lo que la "ligadura" del sistema es: Es decir:

$$z_b = h_0 - \theta\, R$$

Derivando la expresión respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{z}_b = -\omega\, R$$
$$\ddot{z}_b = -\alpha\, R$$

Para poder analizar la cinética del problema el primer paso consiste en hacer DCLs para el cilindro y el balde:



Utilizando la 2^a ley de Newton en el eje z para el balde:

$$\sum \mathbf{f}_z = T - m_b\, g = m_b\, \ddot{z}_b$$

, mientras que para los giros en el eje x:

$$\sum \mathbf{m}_x = T\, R = I_c\, \alpha \qquad \text{con} \quad I_c = \frac{1}{2} m_c\, R^2$$

Las dos ecuaciones de la cinética y la ecuación de la ligadura son suficientes para obtener las incógni-

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

tas del problema T, α, y $\ddot{z}_b$:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{z}_b &= -\alpha\, R \\ T - m_b\, g &= m_b\, \ddot{z}_b \\ T\, R &= I_c\, \alpha \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{R}\left(\frac{2\, g\, m_b}{2\, m_b + m_c}\right) \quad ; \quad \ddot{z}_b = \frac{-2\, g\, m_b}{2\, m_b + m_c} \\ T &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{g\, m_b\, m_c}{m_b + m_c}\right) \end{aligned}$$

Si se reemplazan los valores de g, m_b, y m_c, para la aceleración del balde se obtiene:

$$\ddot{z}_b = \frac{-2\, g\, m_b}{2\, m_b + m_c} = \left[\frac{-\,(2)\,(10)\,(12)}{(2)\,(12)+6}\right] = -8\ {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}^2}$$

El tiempo que tarda el balde en tocar el fondo del pozo se obtiene de la cinemática del balde. Las condiciones iniciales son $z_0 = h_0$ y $\dot{z}_0 = 0$, y con ello:

$$z\,(t^\star) = h_0 + \frac{1}{2}\ddot{z}_b\,(t^\star)^2 = 9 + \frac{1}{2}\,(-8)\,(t^\star)^2 = 9 - 4\,(t^\star)^2 = 0$$

$$\rightarrow \qquad t^\star = \frac{3}{2}\ \mathrm{s}$$

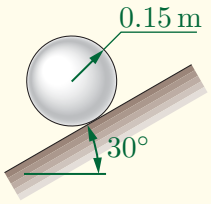
Es decir, el balde tarda 1,5 segundos en toca el fondo.

Nota: Es interesante cómo en este ejemplo específico el radio del cilindro no afecta el resultado que se pide. En otros problemas, como por ejemplo el *yo–yo*, esto no será cierto.

La inercia de un cilindro sólido de masa m y radio R es efectivamente $I = \frac{1}{2}mR^2$. El cálculo de ésta y otras inercias típicas se verá en detalle en la siguiente sección.

Ejemplo

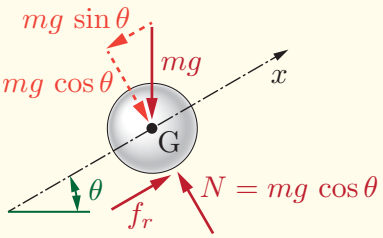
Basado en Hibbeler 14th ed, Problem F17–16



Una esfera de 20 kg y radio 0,15 m rueda por un plano inclinado sin deslizar. Determine la aceleración del centro de masa y la aceleración angular de la esfera.

Nota: La inercia de una esfera respecto a su centro es $I_G = \frac{2}{5}\, m\, R^2$.

El primer paso consiste en hacer un DCL de la esfera. Si la esfera no desliza, entonces tiene una fuerza de roce f_r que hace girar (rodar) a la esfera.



Utilizando la 2da ley de Newton en los ejes $\hat{\mathbf{i}}$ (dirección del plano inclinado) y el giro según $\hat{\mathbf{k}}$ (fuera del plano), se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{dirección } x: \quad & -mg\,\sin\theta + f_r = m\, a_G \\ \text{giro en } \theta_z: \quad & f_r\, R = I_G\, \alpha \end{aligned}$$

Como la esfera no desliza, existe una compatibilidad por rodadura entre v_G y ω:

$$v_G = -R\,\omega$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

, donde se debe tener cuidado con los signos. En este problema específico; una velocidad angular ω positiva (según la regla de la mano derecha) implica una traslación en la dirección $-x$. Tomando la derivada (temporal) de la expresión anterior:

$$a_G = -R\,\alpha$$

El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\left.\begin{aligned} -mg\,\sin\theta + f_r &= m\,a_G \\ f_r\,R &= I_G\,\alpha \\ a_G &= -R\,\alpha \end{aligned}\right\}$$

, cuya solución es:

$$a_G = -\frac{5}{7}\,g\,\sin\theta \qquad \alpha = \frac{-a_G}{R} = \frac{5g}{7R}\,\sin\theta \qquad f_r = \frac{2\,mg}{7}\,\sin\theta$$

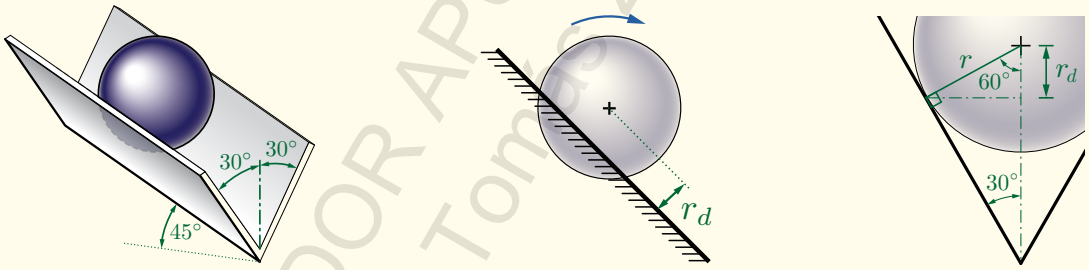
En este problema específico se tiene $\theta = 30°$, y con ello:

$$a_G = -\frac{5}{14}\,g = -3{,}504\,\mathrm{m/s^2} \qquad \alpha = \left(\frac{5g}{14}\right)\left(\frac{100}{15}\right) = \frac{50}{21}\,g = 23{,}36\,\mathrm{rad/s^2}$$

Ejemplo

Basado en Hibbeler 14th ed, Problem 17–119

Una bola sólida de radio r y masa m rueda por un perfil ángulo de 60° inclinado a 45° sobre la horizontal. Determine la aceleración angular de la bola si esta rueda sin deslizar por el perfil.



La bola rueda sin deslizar sobre un "plano" a distancia r_d del centro de la bola. A partir de la geometría del problema, se puede ver que el radio de rodadura es:

$$r_d = r\,\cos 60°$$

El siguiente paso consiste en hacer un DCL del problema, que como es tridimensional, es conveniente separarlo en múltiples vistas planas. En este caso, se utiliza: **(1)** vista lateral, y **(2)** vista perpendicular al perfil (normal al eje u).



BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Cada superficie del perfil genera una reacción normal, N_1 y N_2, las que sumadas resultan en una única reacción N en la dirección del eje v. Utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton en los ejes u, v, y de rotación, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{f}_u = m\,a \;: &\qquad mg\,\sin 45^\circ - f_r = m\,a \\ \sum \mathbf{f}_v = 0 \;: &\qquad -mg\,\cos 45^\circ + N = 0 \\ \sum \mathbf{m}_G = I\,\alpha \;: &\qquad -f_r\,r_d = I\,\alpha \end{aligned}$$

La condición de rodadura (ligadura) resulta en:

$$-\theta\,r_d = s \qquad \longrightarrow \qquad -\alpha\,r_d = a$$

Las 3 ecuaciones de cinética (2$^{\text{da}}$ ley de Newton) y la ecuación de rodadura permiten resolver para las 4 incógnitas del problema:

$$\begin{aligned} N &= \frac{mg}{\sqrt{2}} & f_r &= \frac{4\sqrt{2}}{13}\,mg \\ a &= \frac{5\sqrt{2}}{26}\,g & \alpha &= -\frac{5\sqrt{2}}{13}\,\frac{g}{r} \end{aligned}$$

7.4.2. Momento de inercia en 3D

Los cuerpos son objetos tridimensionales los que pueden rotar respecto a todos los ejes, θ_x, θ_y, y θ_z. La dificultad del análisis de las rotaciones en 3D es que usualmente estos giros están relacionados (acoplados) entre sí.

El análisis de un cuerpo rígido sometido a varias fuerzas externas $\mathbf{f}_i$ es equivalente al mismo cuerpo con: **(a)** la resultante de fuerzas $\sum \mathbf{f}$, y **(b)** la resultante de momentos $\sum \mathbf{m}$; ambos aplicados en el centro de masa u otro punto sobre el cual el cuerpo rota. Las resultantes de fuerza y de momento permiten calcular las aceleraciones (traslacional y angular) del cuerpo sometido a ese conjunto de fuerzas. La Figura 7.9 ilustra la cinética del cuerpo para obtener aceleraciones a partir de las fuerzas aplicadas.

- La cinética traslacional del cuerpo se rige por: $\sum \mathbf{f} = m\,\ddot{\mathbf{u}}$
- La cinética rotacional[4] del cuerpo se rige por: $\sum \mathbf{m} = \mathbf{I}\,\boldsymbol{\alpha}$

Un cuerpo 3D suele girar en todos los planos a la vez, lo que lo diferencia de un cuerpo plano (2D). El acoplamiento de los giros se hace evidente de la estructura de la matriz de inercias $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

, donde los términos fuera de la diagonal acoplan los momentos y giros entre los distintos planos.

> En este curso no es común evaluar o estudiar la rotación de un cuerpo en 3D. No obstante, es importante comprender los fundamentos de la rotación en 3D ya que nuestro mundo es realmente 3D, y sólo en casos muy específicos se puede simplificar a un análisis 2D.

[4] Notar que en el caso 3D la inercia $\mathbf{I}$ es una matriz.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

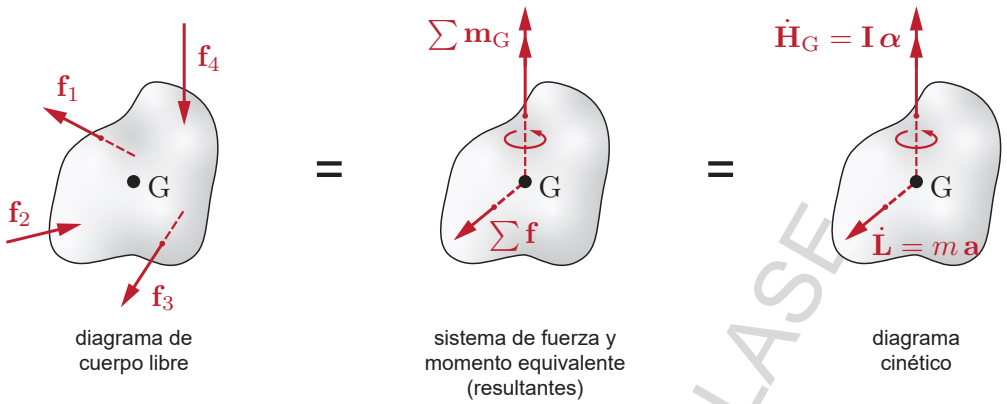


Figura 7.9: Análisis de la cinética tridimensional de un cuerpo. El diagrama de cuerpo libre (DCL) se puede representar como una fuerza y momento resultantes actuando sobre el centro de rotación, lo que permite calcular las aceleraciones (traslacional y angular) del cuerpo.

> En ciertos problemas, en vez de preguntar por la resultante de momentos $\sum \mathbf{m}$, se pregunta por la "variación del momentum angular" $\dot{\mathbf{H}}_G$. Análogamente, en vez de preguntar por la resultante de fuerzas $\sum \mathbf{f}$, se podría pedir la "variación del momentum lineal" $\dot{\mathbf{L}}$. Este tipo de preguntas evalúa si se comprende la conexión que hay entre los conceptos de momentum, fuerzas, y aceleraciones.

7.4.3. Cálculo del momento de inercia

Recordando que la masa de un objeto es una medida de su resistencia a acelerar traslacionalmente, el momento de inercia es una medida de su resistencia a acelerar rotacionalmente. La Figura 7.10 muestra un cuerpo que rota respecto a un eje O–O. El momento de inercia (másico) respecto a ese eje se obtiene al considerar el aporte de cada diferencial dm a la rotación:

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m = \int \rho \, r^2 \, \mathrm{d}v \tag{7.24}$$

En caso que se tenga un sistema de partículas rígidamente vinculadas, la inercia (másica) es:

$$I = \sum_i m_i \, r_i^2 \tag{7.25}$$

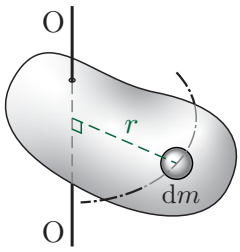


Figura 7.10: Cuerpo que rota respecto a un eje O–O.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

En el caso de un cuerpo 3D, los momentos de inercia respecto a los ejes cartesianos son:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int r_x^2 \,\mathrm{d}m = \int \left(y^2 + z^2\right) \,\mathrm{d}m & I_{xy} &= I_{yx} = \int xy \,\mathrm{d}m \\ I_{yy} &= \int r_y^2 \,\mathrm{d}m = \int \left(z^2 + x^2\right) \,\mathrm{d}m & I_{yz} &= I_{zy} = \int yz \,\mathrm{d}m \\ I_{zz} &= \int r_z^2 \,\mathrm{d}m = \int \left(x^2 + y^2\right) \,\mathrm{d}m & I_{zx} &= I_{xz} = \int zx \,\mathrm{d}m \end{aligned} \tag{7.26}$$

, quedando así completamente definida la matriz de inercias de la Ecuación (7.23). En la ecuación anterior, e inspeccionando la Figura 7.10, es claro que r_x es la distancia mínima y perpendicular del diferencial de masa $\mathrm{d}m$ al eje x. Análogamente, r_y y r_z son las distancias mínimas a los ejes y y z, respectivamente.

> Notar que los términos de la diagonal (I_{xx}, I_{yy}, e I_{zz}) son siempre positivos. Por el contrario, las *inercias cruzadas*, también llamados *productos de inercia*, pueden ser positivos o negativos.

En el caso 2D, el eje de rotación siempre sale del plano; i.e., su dirección está claramente definida. En el caso 3D en cambio, existen infinitas orientaciones de los 3 ejes cartesianos, pese a mantener el origen de los ejes fijo en el punto respecto a cuál el cuerpo rota. Es decir, en el caso 3D los términos de la matriz dependerán de la orientación de los ejes del sistema de coordenadas. Existe una orientación específica para los ejes que diagonaliza la matriz $\mathbf{I}$. Es decir, en dicha orientación de ejes se tiene:

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

Esta orientación corresponde a los *ejes principales de inercia* y es conveniente a la hora de analizar la rotación de un cuerpo 3D ya que las ecuaciones $\sum \mathbf{m} = \mathbf{I}\,\boldsymbol{\alpha}$ se desacoplan[5].

> Existe un fenómeno físico muy curioso llamado *teoría del eje intermedio* (o *efecto Dzhanibekov*). Más aún, es fácil recrearlo en casa con una raqueta de tenis. Una explicación detallada del fenómeno se encuentra en el siguiente link: `https://www.youtube.com/watch?v=1VPfZ_XzisU`

7.4.4. Momento de inercia de área

> **El momento de inercia de área no es parte de este curso y no tiene utilidad para nosotros.** No obstante, es importante saber de su existencia para no confundirlo en el futuro con el momento de inercia másico.

Es fácil confundir el momento de inercia másico con el *momento de inercia de área*, también conocido como *segundo momento de inercia*, o *segundo momento de área*. Para empeorar la situación, en la práctica a ambas se les suele llamar simplemente "inercia", además de compartir el mismo símbolo "I". La Figura 7.11 muestra un área de interés. Los segundos momentos de inercia para el área plana A respecto a los ejes x, y, y z, respectivamente, son:

$$I_x = \int y^2 \,\mathrm{d}A \qquad I_y = \int x^2 \,\mathrm{d}A \qquad I_z = \int r^2 \,\mathrm{d}A$$

La única diferencia es que el momento de inercia de área se suele indicar con 1 solo subíndice, en vez de doble como es el caso del momento de inercia másico.

[5] Cuando el sistema de ecuaciones se desacopla, entonces cada ecuación (fila del sistema) se puede analizar por separado.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

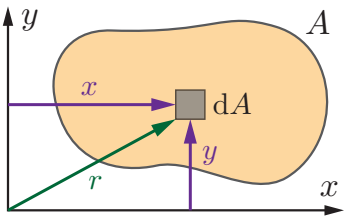


Figura 7.11: Área de interés A sobre la cual se desea calcular los segundos momentos de inercia (inercia de área).

El momento de inercia de área es muy utilizado en ingeniería estructural y mecánica; no tanto así el momento de inercia másico (que se estudia en este curso). Notar que las unidades del momento de inercia de área son m^4, cm^4, in^4, y similares. El momento de inercia de área se calcula para una sección plana (2D), i.e., *sección* de un sólido, corte transversal, o sección transversal.

7.4.5. Cambio de eje de rotación

El teorema de cambio de eje de rotación se llama también *teorema de ejes paralelos*, o *teorema de Steiner*. Si conocemos el momento de inercia $\overline{I}$ respecto al centro de masa G, entonces la inercia respecto a un punto C cualquiera como muestra la Figura 7.12 es:

$$I = \int r^2 \,\mathrm{d}m = \int \left(r_o^2 + d^2 + 2\, r_o\, d\cos\theta\right) \mathrm{d}m$$
$$I = \int r_o^2 \,\mathrm{d}m + d^2 \int \mathrm{d}m + 2d \int u \,\mathrm{d}m$$

La tercera integral ($2d \int u \,\mathrm{d}m$) es cero en torno al CM: notar que es una integral del momento (torque) de todo el cuerpo en torno a su propio centro de masa. Sabemos por definición que el momento es cero en torno al centro de masa (si concentramos el peso del cuerpo en un punto, ese punto corresponde al centro de masa). Respecto al CM, el lado izquierdo y derecho de un cuerpo producen momentos iguales pero opuestos. Es debido a ello que un cuerpo colgado o clavado en su centro de masa no tiende a rotar en ninguna dirección, debido a que su peso W no genera momento alguno que induzca una rotación en el mismo. Finalmente, la inercia respecto al punto C es:

$$\boxed{I = \overline{I} + m\, d^2} \tag{7.27}$$

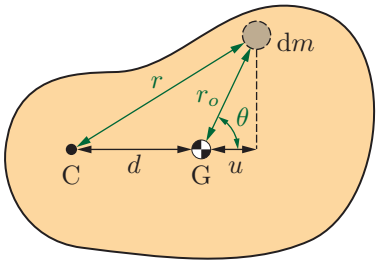


Figura 7.12: Conocida la inercia en el centro de masa G, se quiere calcular la inercia respecto a un eje perpendicular al plano que pasa por el punto C. Para ello, es importante descubrir que $\int u \,\mathrm{d}m = 0$ respecto al centro de masa.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Un concepto similar de aplica al momento de inercia de área:

$$I_{\text{área}} = \overline{I}_{\text{área}} + A\,d^2$$

, donde el segundo término usa el área en vez de la masa.

El cambio de ejes de rotación para el caso de un cuerpo tridimensional está fuera del alcance del curso.

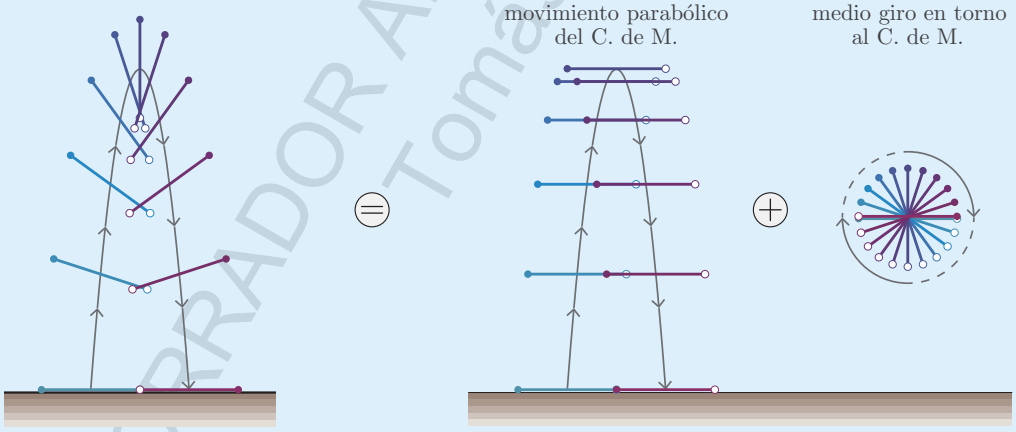
Un análisis de la Ecuación (7.27) revelará que la inercia de un cuerpo es mínima respecto a su centro de masa, ya que la masa no puede ser negativa, mientras que d^2 es siempre positivo. Es decir, para un cuerpo cualquiera se tiene que:

$$I_G < I_C$$

, donde G es centro de masa y C es otro punto cualquiera. Como $\sum \mathbf{m}_z = I\,\boldsymbol{\alpha}_z$ y la inercia I_G es mínima, entonces el cuerpo rotará más fácilmente en torno a G. Es decir, un cuerpo rotará en torno a su centro de masa a menos que se le fuerce a rotar en torno a otro punto (con un eje, clavo, pin, o similar). Cuando se avienta un objeto en el aire este rotará en torno a su centro de masa ya que es el eje (o mejor dicho, punto,) sobre el cual el cuerpo rota con el mínimo esfuerzo. La dinámica de aventar un cuerpo en el aire se analiza como: **(1)** la traslación de una partícula (ubicada en el centro de masa), y **(2)** una rotación del cuerpo en torno al mismo centro de masa.

El hecho que todos los objetos libres de rotar lo hacen en torno a su centro de masa se puede verificar con un experimento casero. Para ello se necesita una raqueta de tenis, palo, u objeto similar: es imposible lanzar la raqueta o palo al aire girando en torno a un punto distinto al centro de masa.

Considere que se lanza un objeto de modo que sólo haga medio giro antes de caer, como muestra la Figura a continuación. Se podría creer erróneamente que ha logrado hacer que gire en torno a uno de sus extremos. En realidad, el objeto giró media vuelta en torno a su CM, mientras el CM describía una trayectoria parabólica que lo hizo "avanzar". Esta duda se elimina si el cuerpo rota varias veces en el aire: el centro de rotación (su centro de masa) se visualizará con facilidad.



BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

7.4.6. Radio de giro

El radio de giro k de un cuerpo es:

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{I}{m}}} \tag{7.28}$$

A partir de la expresión anterior se tiene también que: $I = k^2\,m$. Es decir, dado un radio de giro y la masa de un cuerpo, es sencillo obtener su inercia. El radio de giro tiene dimensiones de longitud, i.e. m, cm, mm, $in\ldots$

El radio de giro es una medida de la distribución espacial de la masa de un cuerpo. Por ejemplo, dadas dos ruedas de bicicleta de igual masa, pero distinto tamaño; la rueda de mayor radio tiene un radio de giro mayor. Es decir, mientras más lejos del eje de rotación se ubica la masa, mayor será el radio de giro y mayor será su inercia.

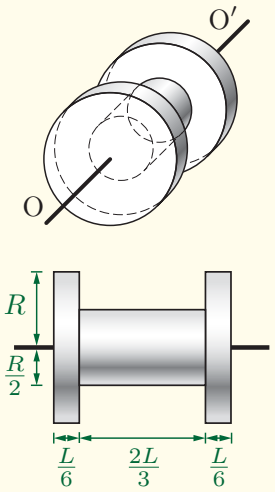
Reescribiendo las inercias con sus respectivos radios de giro en la Ecuación (7.27), se obtiene:

$$k^2 = \overline{k}^2 + d^2 \tag{7.29}$$

, donde $\overline{k}$ es el radio de giro asociado a la inercia respecto al centro de masa $\overline{I}$ o I_G. El radio de giro tiene una interpretación física: si toda la masa del cuerpo se concentra en una partícula (o anillo) a distancia k al eje de rotación, la inercia será equivalente a la inercia del cuerpo.

> El segundo momento de inercia (inercia de área) también tiene un radio de giro asociado. Para este se suele utilizar la letra r y está definido como:
>
> $$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Ejemplo



Se tiene un carrete de masa total m_T, con radio interno $\frac{R}{2}$, y donde los bordes son de espesor $\frac{L}{6}$ cada uno, con L siendo el largo total del carrete. El carrete está hecho de material uniforme y homogéneo. Determine la inercia respecto al eje O–O' de la forma $I = \lambda m_T$.

La inercia del cuerpo es la suma de inercias de: **(1)** un cilindro interno con radio $r_i = \frac{R}{2}$ y largo $\frac{2L}{3}$; y **(2)** un cilindro externo de radio $r_e = R$ y largo $\left(\frac{L}{6} + \frac{L}{6}\right) = \frac{L}{3}$ (notar que los dos cilindros de los extremos se trabajarán como uno).

La inercia de un cilindro sólido que rota sobre su eje es conocida e igual a $I = \frac{1}{2}mR^2$. Para utilizar dicha expresión, es necesario determinar la fracción de la masa total m_T de cada componente del carrete; fracción que es proporcional al volumen gracias a que el material es uniforme. Los volumenes de los cilindros interior, exterior, y total son:

$$v_e = \left(\pi\, r_e^2\right)\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{1}{3}\,\pi\, R^2\, L$$

$$v_i = \left(\pi\, r_i^2\right)\left(\frac{2L}{3}\right) = \frac{1}{6}\,\pi\, R^2\, L$$

$$v_T = v_e + v_i = \frac{1}{2}\,\pi\, R^2\, L$$

Con ello, las masas de los componentes del carrete son:

$$m_e = \frac{v_e}{v_T}\, m_T = \frac{2}{3}\, m_T \qquad m_i = \frac{v_i}{v_T}\, m_T = \frac{1}{3}\, m_T$$

Es decir, el cilindro externo (que en realidad son dos cilindros de largo $\frac{L}{6}$) representa $\frac{2}{3}$ de la masa total; mientras que el cilindro interno representa el $\frac{1}{3}$ restante. Las inercias de cada cilindro son:

$$I_e = \frac{1}{2}\, m_e\, r_e^2 = \frac{1}{3}\, m_T\, R^2 \qquad I_i = \frac{1}{2}\, m_i\, r_i^2 = \frac{1}{24}\, m_T\, R^2$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Notar que la diferencia entre las inercias de ambos es considerable.

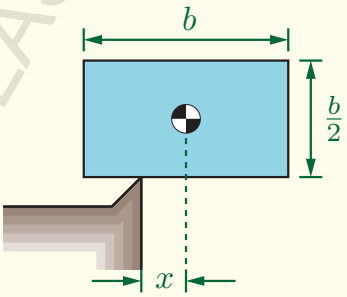
Finalmente, la inercia del carrete completo es:

$$I = I_e + I_i = \frac{3}{8}\, m_T\, R^2$$

Ejemplo

Referencia original desconocida.

Se tiene un bloque de masa M y dimensiones $b \times {}^{b}/_{2}$ apoyado en un filo (o borde) como muestra la Figura. Se pide determinar:



a) La distancia x del apoyo para que el bloque acelere con α máximo.

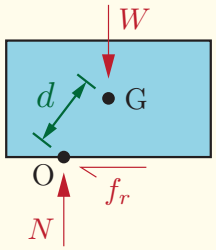
b) La magnitud de la aceleración angular máxima α.

En sus cálculos, le será de utilidad saber que el momento de inercia de un rectángulo de lados $a \times b$ que gira respecto a un eje normal al plano que pasa por su centro de masa es:

$$I = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

La inercia del bloque respecto a su centro de masa G es:

$$\overline{I} = \frac{M}{12}\left[b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = \frac{5}{48}\, Mb^2$$



La inercia en torno al punto de rotación O (pivote de apoyo) es:

$$I_O = \overline{I} + Md^2 \qquad \text{donde} \quad d = \sqrt{x^2 + \left(\frac{b}{4}\right)^2}$$

El momento en torno al punto O es:

$$\mathbf{m}_z = -\left(W\right)\left(x\right) = -Mg\, x$$

negativo según la regla de la mano derecha. En el punto de pivote (punto O) hay una fuerza normal y otra de roce, las que no causan momento en torno al punto O. Usando la 2^{da} ley de Newton en rotación:

$$\sum \mathbf{m}_z = I_O\, \alpha = \left[\frac{5}{48}\, Mb^2 + M\left(x^2 + \frac{b^2}{16}\right)\right]\alpha$$

$$-Mg\, x = \frac{M}{6}\left(b^2 + 6x^2\right)\alpha$$

$$\alpha = \frac{-6gx}{b^2 + 6x^2}$$

Queremos maximizar el módulo de α: como el giro es negativo ⊗ en realidad estamos minimizando α. Para ello, buscamos el valor de $0 < x < {}^{b}/_{2}$ tal que su primera derivada es cero:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} = (6g)\left[\frac{6x^2 - b^2}{\left(b^2 + 6x^2\right)^2}\right] = 0$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Se tiene que $\left(b^2+6x^2\right)^2 \neq 0$ siempre, con lo que eliminamos el denominador y con ello:

$$6x^2 - b^2 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x = \frac{b}{\sqrt{6}}$$

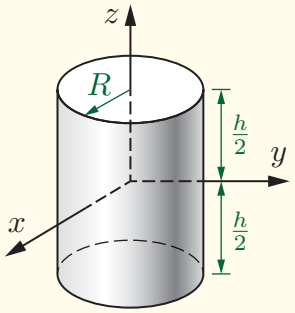
Finalmente, la aceleración mínima (máximo módulo) es:

$$\alpha\left(x = \frac{b}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}\,\frac{g}{b}$$

Ejemplo

Basado en Hibbeler 14th ed, Example 17.1

Determine el momento de inercia del cilindro de radio R y densidad constante ρ respecto al eje z.



Podemos integrar el cilindro fácilmente si tomamos un diferencial de volumen $\mathrm{d}V$ igual a un cascarón cilíndrico:

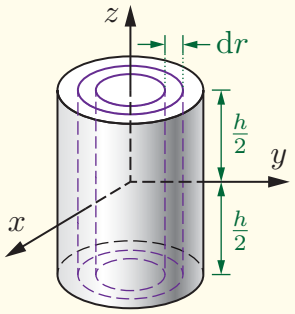
$$\mathrm{d}V = (2\,\pi\,r)\,(h)\,\mathrm{d}r$$

, con lo que un diferencial de masa es:

$$\mathrm{d}m = \rho \cdot \mathrm{d}V = (2\,\pi\,r\,h\,\rho)\,\mathrm{d}r$$

La masa total del cilindro es:

$$m = \int \mathrm{d}m = \int_0^R (2\,\pi\,r\,h\,\rho)\;\mathrm{d}r = 2\,\pi\,h\,\rho \int_0^R r\;\mathrm{d}r = \rho\,\pi\,h\,R^2$$



La inercia respecto al eje z es:

$$I_{zz} = \int r^2\,\mathrm{d}m = \int_0^R \left(r^2\right)(2\,\pi\,r\,h\,\rho)\;\mathrm{d}r = 2\,\pi\,h\,\rho \int_0^R r^3\;\mathrm{d}r = \rho\,\frac{\pi}{2}\,h\,R^4$$

$$I_{zz} = \left(\rho\,\pi\,h\,R^2\right)\left(\frac{1}{2}\,R^2\right) = \frac{1}{2}\,m\,R^2$$

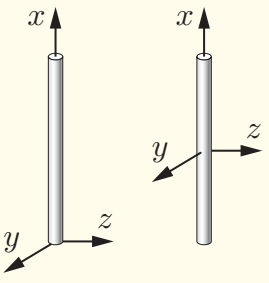
Ejemplo

Se tiene una barra de sección transversal a uniforme y pequeña en relación a su longitud ℓ. La densidad de la barra es uniforme e igual a ρ. Se pide:

a) La inercia cuando la barra rota en torno a uno de sus extremos.

b) La inercia cuando la barra rota en torno a su punto medio.

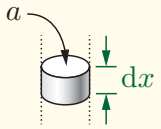
c) Use cambio de ejes para llegar al resultado **(a)** desde **(b)**.



BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

El diferencial de volumen es:

$$\mathrm{d}V = a\,\mathrm{d}x$$



, con lo que un diferencial de masa es:

$$\mathrm{d}m = \rho\, a\,\mathrm{d}x$$

La masa total de la barra es:

$$m = \int \mathrm{d}m = \int_0^\ell (\rho\, a)\,\mathrm{d}x = \rho\, a\, \ell$$

La inercia en el caso que la barra rota en uno de sus extremos es:

$$I_{zz}^{(a)} = \int x^2\,\mathrm{d}m = \int_0^\ell \rho\, a\, x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\rho\, a\, \ell^3 = \frac{1}{3}\, m\, \ell^2$$

La inercia en el caso que la barra rota en torno a su punto medio (su centro de masa) es:

$$I_{zz}^{(b)} = \int x^2\,\mathrm{d}m = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \rho\, a\, x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\rho\, a\, x^3\Big|_{x=-\ell/2}^{x=\ell/2} = \frac{1}{12}\rho\, a\, \ell^3 = \frac{1}{12}\, m\, \ell^2$$

Volviendo al caso **(a)**: el centro de masa se encuentra a una distancia $\overline{x} = \ell/2$ del eje de rotación. Usando el resultado del caso **(b)**, que corresponde a la inercia de la barra en torno a su CM (inercia mínima), podemos usar el cambio de ejes de rotación (Ecuación (7.27)) para obtener:

$$I_{zz}^{(a)} = \overline{I} + m\, d^2 = I_{zz}^{(b)} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}\, m\, \ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\, m\, \ell^2$$

Como se esperaba; el resultado es idéntico al obtenido anteriormente.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

La inercia de los sólidos más comunes es de conocimiento universal y se suelen encontrar en tablas como muestra la Figura 7.13. Cuerpos más complejos se pueden obtener por composición de partículas y/o cuerpos más sencillos obtenidos de la tabla, y así evitar el método integral.

Los textos de dinámica suelen tener una tabla de inercias cerca del principio o final del texto.

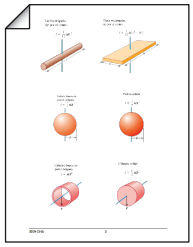


Figura 7.13: Ejemplo de una tabla de inercias.

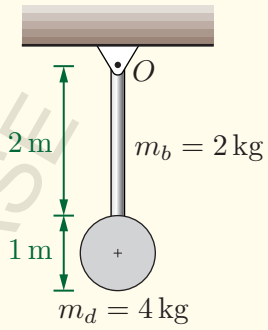
Ejemplo

Basado en Hibbeler 14th ed, Problem 17–10

Un péndulo consiste de un disco circular de 4 kg y de una barra esbelta de 2 kg, como muestra la Figura. Se pide determinar:

a) El radio de giro respecto a un eje perpendicular al plano pasando por O.

b) El radio de giro si el péndulo se desconecta del pivote en O y se lanza en el aire para que gire libremente.



Nota: La inercia de una barra esbelta respecto a su punto medio es $I = \frac{1}{12} m\ell^2$, mientras que la inercia de un disco (cilindro de baja altura) respecto a su centro es $I = \frac{1}{2} mR^2$.

La masa total del péndulo es:

$$m_t = m_b + m_d = 6\,\text{kg}$$

La inercia de la barra respecto al punto O es:

$$(I_b)_O = \overline{I}_b + m_b\, d^2 = \frac{1}{12}\, m_b\, \ell_b^2 + m_b \left(\frac{\ell_b}{2}\right)^2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

La inercia del disco respecto al punto O es:

$$(I_d)_O = \overline{I}_d + m_b\, d^2 = \frac{1}{2}\, m_d\, r_d^2 + m_d\, (\ell_b + r_d)^2 = \frac{1}{2} + 25 = \frac{51}{2}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Finalmente, la inercial del péndulo respecto a O es:

$$I = (I_b)_O + (I_d)_O = \frac{8}{3} + \frac{51}{2} = \frac{169}{6} = 28{,}1667\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

, y su radio de giro es:

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\left(\frac{169}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{13}{6} = 2{,}1667\ \text{m}$$

Si el sistema barra–disco es libre de girar sobre cualquier eje, entonces lo hará sobre su centro de masa (inercia mínima). Para ello, debemos determinar primero la ubicación del centro de masa:

$$\overline{z} = \frac{m_b\, \overline{z}_b + m_d\, \overline{z}_d}{m_t} = \frac{(2)\,(1) + (4)\,(2 + 0{,}5)}{6} = \frac{12}{6} = 2\ \text{m}$$

Las inercias de la barra y disco respecto a este punto son:

$$(I_b)_G = \overline{I}_b + m_b\, d^2 = \frac{1}{12}\, m_b\, \ell_b^2 + m_b \left(\overline{z} - \frac{\ell_b}{2}\right)^2 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$(I_d)_G = \overline{I}_d + m_d\, d^2 = \frac{1}{2}\, m_d\, r_d^2 + m_d\, (\ell_b + r_d - \overline{z})^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Finalmente, la inercia del péndulo respecto a su centro de masa es:

$$I = (I_b)_G + (I_d)_G = \frac{8}{3} + \frac{3}{2} = \frac{25}{6}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

, y el radio de giro es:

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\left(\frac{25}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{5}{6} = 0{,}8333\ \text{m}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

7.5. Trabajo y energía de rotación

La energía cinética asociada a una fracción de masa m_i de un cuerpo es:

$$T_i = \frac{1}{2}\,(m_i)\,(v_i)^2 = \frac{1}{2}\,(m_i)\,(r_i\,\omega)^2$$

Notar que la velocidad es proporcional a su distancia al eje de rotación: $v_i = r_i\,\omega$, como muestra la Figura 7.14. Considerando todas las fracciones de masa que componen al cuerpo, la energía cinética de rotación del cuerpo completo es:

$$T = \frac{1}{2}\,\omega^2 \left[\sum_i m_i\,r_i^2\right]$$

Si la fracción de masa m_i se hace tan pequeño de modo que $m_i \to \mathrm{d}m$ (elemento diferencial de masa), vemos que:

$$T = \frac{1}{2}\,\omega^2 \int r^2\,\mathrm{d}m$$

En la ecuación anterior es posible reconocer el término de la inercia del cuerpo, obteniendo así:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\,I_O\,\omega^2} \tag{7.30}$$

, donde I_O es la inercia respecto al eje de rotación "O".

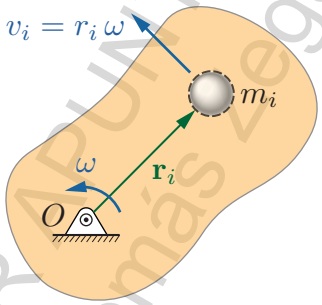


Figura 7.14: Velocidad con que se mueve una fracción de masa m_i de un cuerpo mayor que rota con velocidad angular ω respecto a un punto O.

7.5.1. Energía de un cuerpo que se traslada y rota

Un cuerpo rígido puede trasladarse y girar a la vez: el centro de masa se mueve con velocidad $\overline{\mathbf{v}}$, mientras que el cuerpo gira en torno al mismo con velocidad angular ω. Una fracción de masa m_i de ese cuerpo, como muestra la Figura 7.15, se moverá con una velocidad que depende de estos dos movimientos:

$$\mathbf{v}_i = \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{r}_i\,\omega$$

Usando la ley de los cosenos, la energía cinética del cuerpo completo es:

$$T = \sum_i \frac{1}{2}\,m_i\,v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}\,m_i\left(\overline{v}^2 + r_i^2\,\omega^2 + 2\,\overline{v}\,r_i\,\omega\cos\theta\right)$$

Mirando en detalle el tercer término:

$$\sum_i \frac{1}{2}\,m_i\left(\overline{v}^2 + r_i^2\,\omega^2 + 2\,\overline{v}\,r_i\,\omega\cos\theta\right) = \omega\,\overline{v}\sum_i m_i\,r_i\cos\theta = \omega\,\overline{v}\sum_i m_i\,y_i$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Sabemos que $\sum_i m_i\, y_i$ es cero en torno al centro de masa. Con ello, la energía cinética de un cuerpo que se traslada y rota es:

$$T = \sum_i \frac{1}{2}\, m_i \left(\overline{v}^2 + r_i^2\, \omega^2\right)$$

En la ecuación anterior es posible reconocer el término de la inercia del cuerpo, obteniendo así:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\, m\, \overline{v}^2 + \frac{1}{2}\, \overline{I}\, \omega^2} \tag{7.31}$$

Es evidente de la ecuación anterior que la energía cinética de un cuerpo tiene dos componentes: una asociada a la traslación, y otra a la rotación del cuerpo.

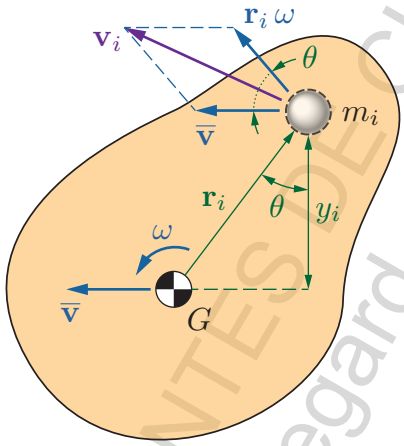


Figura 7.15: Velocidad con que se mueve una fracción de masa m_i de un cuerpo mayor: el cuerpo rota en torno a su CM con velocidad ω y se traslada con velocidad $\overline{v}$.

7.5.2. Trabajo hecho por un momento (torque)

La ecuación de trabajo–energía sigue siendo válida luego de introducir la energía rotacional:

$$T_1 + U_{12} = T_2$$

Separando las energías potenciales gravitacionales y elásticas (fuerzas conservativas) de U_{12}, resulta:

$$T_1 + V_1 + U_{12}^{\star} = T_2 + V_2$$

, donde $U_{12}^{\star}$ es el trabajo hecho por las fuerzas externas y las no-conservativas (i.e., toda fuerza no incluida en V). La ecuación anterior es idéntica la Ecuación (4.14), excepto que ahora incluimos términos asociados a la rotación en T y $U_{12}^{\star}$. Es decir, la energía cinética T_1 y T_2 ahora incorpora términos de rotación acorde a la Ecuación (7.31).

El trabajo hecho por un momento (torque) externo constante es:

$$\boxed{U_{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}} \tag{7.32}$$

En el caso particular de un análisis 2D resulta:

$$U_m = m\, \theta$$

Esta expresión es análoga al caso de una fuerza constante: trabajo es fuerza × desplazamiento. Cuando el momento externo no es constante, entonces es necesario utilizar la forma integral del trabajo al igual que en el caso de fuerzas y traslaciones.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Con el estudio de la rotación de los cuerpos vimos que las 3 ecuaciones de Newton de traslación se complementan con 3 ecuaciones adicionales para la rotación. Lo mismo ocurrió con el principio de impulso–momentum: además de las 3 ecuaciones de traslación, se sumaron 3 ecuaciones adicionales para los giros/momentos.

La ecuación de energía, en cambio, no agrega nuevas ecuaciones al contenido del curso, sino que sólo adiciona términos de rotación. Expandiendo los términos de la ecuación de trabajo–energía para un cuerpo 2D que se desplaza y rota, se tiene:

$$\frac{1}{2}\,m\,\overline{v}_1^2 + \frac{1}{2}\,\overline{I}\,\omega_1^2 + m\,g\,z_1 + (V_e)_1 + U_{12}^{\star} = \frac{1}{2}\,m\,\overline{v}_2^2 + \frac{1}{2}\,\overline{I}\,\omega_2^2 + m\,g\,z_2 + (V_e)_2$$

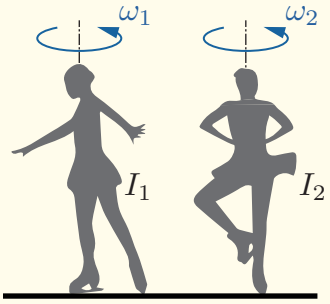
, donde z_1 y z_2 se calculan respecto al centro de masa del cuerpo.

Finalmente, las ecuaciones de cinética comprendidas en este curso son 13: 6 ecuaciones de Newton, 6 ecuaciones de impulso–momentum, y 1 ecuación de trabajo–energía.

Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Example 5.14

Una patinadora de hielo gira inicialmente con sus brazos extendidos, lo que le confiere una inercia I_1. Luego de algunos giros, con lo que su inercia cambia a I_2, donde $I_2 < I_1$. Despreciando el roce de los patines:



a) ¿Se conserva el momentum angular?

b) ¿Se conserva la energía cinética?

c) Determina la pérdida/ganancia en caso que alguno no se conserve

Los momentums angulares inicial y final son:

$$(H_O)_i = I_1\,\omega_1 \qquad\qquad (H_O)_f = I_2\,\omega_2$$

La fuerza que debe hacer la patinadora para contraer sus brazos es de tipo radial (fuerza central), la que no produce momento sobre el eje de giro. Al no haber momento, no hay impulso angular ($\int \mathbf{m}_z\,\mathrm{d}t = 0$) con lo que se conserva el momentum angular. Con ello podemos calcular la razón entre la rapidez angular inicial y final:

$$\begin{aligned}(H_O)_i &= (H_O)_f\\ I_1\,\omega_1 &= I_2\,\omega_2\\ \omega_2 &= \left(\frac{I_1}{I_2}\right)\omega_1\end{aligned}$$

En este caso, se sabe que $I_2 < I_1$ con lo que $\omega_2 > \omega_1$. Es decir, la patinadora gira más rápido al contraer sus brazos.

Las energías cinéticas inicial y final son:

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{1}{2}\,I_1\,(\omega_1)^2\\ T_2 &= \frac{1}{2}\,I_2\,(\omega_2)^2 = \frac{1}{2}\,I_2\left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2(\omega_1)^2 = T_1\left(\frac{I_1}{I_2}\right)\end{aligned}$$

Es decir, la relación entre las energías cinéticas es la misma razón que hay entre las inercias. Podemos entonces concluir que la energía cinética no se conserva, sino que aumenta ($T_2 > T_1$). Como no hay

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

fuerzas externas, el aumento de energía cinética se obtiene de la fuerza radial que hacen los músculos de la patinadora para contraer los brazos (no es fácil). La variación de energía cinética es positiva:

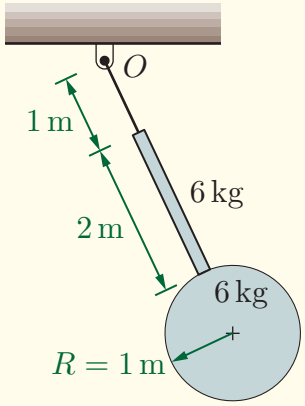
$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1 \left(\frac{I_1}{I_2} - 1 \right)$$

El siguiente video explica cómo los patinadores deben hacer mucha fuerza para contraer sus brazos y así poder hacer saltos cuádruples:
`https://www.youtube.com/watch?v=RtFGwpMlOYo`

Una situación similar ocurre durante *El lago de los cisnes*, donde el cisne negro debe usar una serie de trucos basados en momento (torque, y momentum angular, para hacer un total de 32 giros:
`https://www.youtube.com/watch?v=l5VgOdgptRg`

Ejemplo

Andre Agassi, Pete Sampras y Michael Chang están montando un museo del tenis donde tendrán un reloj cucú de gran tamaño. El péndulo del reloj es una raqueta de 4 m de largo que cuelga de una cuerda (de masa despreciable) de 1 m de largo. El mango se idealiza como una barra delgada de largo 2 m y masa 6 kg. La cabeza de la raqueta se idealiza como un disco (cilindro sólido) de radio 1 m y masa 6 kg. Asumiendo en sus cálculos que $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, se pide:



a) Determinar la ubicación del centro de masa (CM) medida desde el pivote en O.

b) La inercia del sistema (péndulo que rota en el pivote en O).

c) El péndulo tiene velocidad $v_\theta = \frac{6}{5}\,m/s$ medida en el CM cuando está en la posición más baja: ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará el CM desde esa posición?

d) ¿Cuál es la frecuencia natural circular ω_n del sistema si θ es pequeño?

La ubicación de los centros de masa del mango (barra) y cabeza (disco) son:

$$\overline{r}_b = 1 + \frac{2}{2} = 2\,\mathrm{m} \qquad\qquad \overline{r}_d = 1 + 2 + 1 = 4\,\mathrm{m}$$

La ubicación del centro de masa del péndulo completo está en:

$$\overline{r} = \frac{\overline{r}_b\, m_b + \overline{r}_d\, m_d}{m_b + m_d} = \frac{(2)\,(6) + (4)\,(6)}{12} = 3\,\mathrm{m}$$

La inercia de cada componente con respecto a su propio CM se obtienen una tabla de inercias y son:

$$\overline{I}_{\text{barra}} = \frac{1}{12} m_b\, \ell^2 = \frac{1}{12}\,(6)\,\left(2^2\right) = 2\,\mathrm{kg \cdot m^2}$$
$$\overline{I}_{\text{disco}} = \frac{1}{2} m_d\, R^2 = \frac{1}{2}\,(6)\,\left(1^2\right) = 3\,\mathrm{kg \cdot m^2}$$

La inercia del péndulo completo respecto a su pivote O se obtiene usando el *cambio de eje de rotación* (teorema de Steiner) y sumando ambos componentes:

$$I_O = \overline{I}_{\text{barra}} + m_b\,(\overline{r}_b)^2 + \overline{I}_{\text{disco}} + m_d\,(\overline{r}_d)^2$$
$$I_O = 2 + (6)\,\left(2^2\right) + 3 + (6)\,\left(4^2\right) = 125\,\mathrm{kg \cdot m^2}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

La velocidad angular del péndulo al pasar por el punto más bajo es:

$$\omega = \frac{v_\theta}{\overline{r}} = \frac{6/5}{3} = \frac{2}{5}\,{}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$$

Usando conservación de energía entre el punto más bajo del péndulo y su punto más alto:

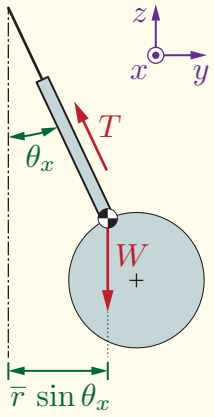
$$\underbrace{V_1}_{=0} + T_1 = V_2 + \underbrace{T_2}_{=0} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{1}{2}\, I_O\, \omega^2 = m\, g\, h$$

$$\frac{1}{2}\,(125)\left(\frac{2}{5}\right)^2 = (12)\,(10)\,(h)$$

$$h = \frac{1}{12}\,\text{m}$$

Es decir, el centro de masa del péndulo alcanza una altura máxima de 8,3 cm medida desde el punto más bajo de su recorrido.

Haciendo un DCL del péndulo–raqueta y utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton en θ_x (el eje $\hat{\mathbf{i}}$ sale del plano), se tiene que



$$\sum \mathbf{m}_x = I\,\boldsymbol{\alpha}_x$$

$$-\,(W)\,(\overline{r}\,\sin\theta\,) = I\,\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{360}{125}\,\sin\theta = 0$$

Como el ángulo es pequeño, entonces $\sin\theta \approx \theta$, y con ello:

$$\ddot{\theta} + \frac{72}{25}\,\sin\theta = 0 \qquad \longleftarrow \qquad \text{(ecuación de un oscilador armónico)}$$

, de donde se desprende que la frecuencia natural circular es:

$$\omega_n^2 = \frac{72}{25} \qquad \longrightarrow \qquad \omega_n = \frac{6}{5}\sqrt{2}\,{}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$$

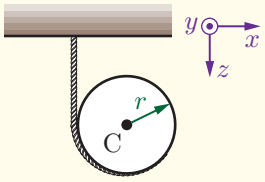
Esto significa que el péndulo tiene una frecuencia natural $f_n = 0{,}2701\,\text{hz}$, o bien que su periodo natural es $T_n = 3{,}7024\,\text{s}$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

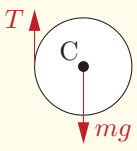
Basado en McGill & King 4$^{\text{th}}$ ed, Example 5.11

Un cilindro de masa m y radio r tiene una cuerda enrollada en su manto. El cilindro se encuentra inicialmente en reposo, tras lo cual se libera. Determine la velocidad del punto C en función del tiempo.

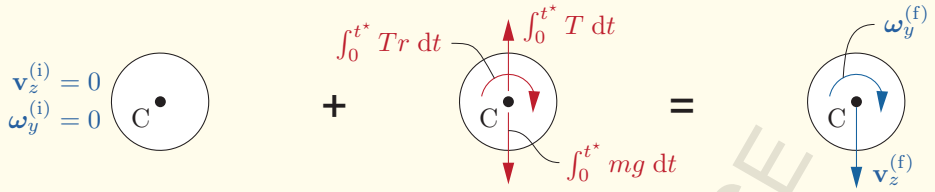


El primer paso consiste en hacer un DCL del cilindro. Como se tiene que $\sum \mathbf{f}_x = 0$, entonces $\ddot{\mathbf{u}}_x = 0$, lo que significa que el cilindro desciende verticalmente.

La tensión de la cuerda se aplica en el manto del cilindro. Esto es equivalente a aplicar la tensión directamente sobre el punto C, pero junto a un momento que considera el real punto de aplicación de la fuerza.



El diagrama de impulso–momentum del sistema se muestra a continuación:



Las ecuaciones de impulso–momentum en las direcciones z (vertical) y θ_y (giro fuera del plano) son:

$$\underbrace{m\,\mathbf{v}_z^{(\mathrm{i})}}_{=0} + \int_0^{t^\star} mg \, \mathrm{d}t - \int_0^{t^\star} T \, \mathrm{d}t = m\,\mathbf{v}_z^{(\mathrm{f})} \qquad \underbrace{I_C\,\boldsymbol{\omega}_y^{(\mathrm{i})}}_{=0} - \int_0^{t^\star} T\,r \, \mathrm{d}t = I_C\,\boldsymbol{\omega}_y^{(\mathrm{f})}$$

La tensión en la cuerda no es de interés, por lo que despejaremos el impulso que ejerce la misma en ambas ecuaciones:

$$-\int_0^{t^\star} T \, \mathrm{d}t = m\,\mathbf{v}_z^{(\mathrm{f})} - mg\,t^\star \qquad -\int_0^{t^\star} T\,r \, \mathrm{d}t = \frac{I_C\,\boldsymbol{\omega}_y^{(\mathrm{f})}}{r}$$

, con lo que:

$$I_C\,\boldsymbol{\omega}_y^{(\mathrm{f})} = m\,r\left[\mathbf{v}_z^{(\mathrm{f})} - g\,t^\star\right]$$

Se tiene también una relación entre la coordenada z_C del centro del cilindro y los giros del mismo. Esta relación puede ser derivada temporalmente para encontrar una ligadura entre las velocidades angular y vertical:

$$r\,\boldsymbol{\theta}_y = \mathrm{const} - z_C$$
$$r\,\boldsymbol{\omega}_y = -v_C$$

Esta expresión es consistente con los signos definidos según los ejes en las figuras del problema. Reemplazando el valor de $\boldsymbol{\omega}_y$ en el resultado anterior se obtiene:

$$I_C\left[-\frac{\mathbf{v}_z^{(\mathrm{f})}}{r}\right] = m\,r\left[\mathbf{v}_z^{(\mathrm{f})} - g\,t^\star\right]$$

La inercia de un cilindro sólido respecto a su centro de masa es $I_C = \frac{1}{2}\,mr^2$, y con ello:

$$\left[\frac{1}{2}\,m\,r^2\right]\left[-\frac{\mathbf{v}_z^{(\mathrm{f})}}{r}\right] = m\,r\left[\mathbf{v}_z^{(\mathrm{f})} - g\,t^\star\right]$$
$$v_C(t^\star) = \frac{2}{3}\,g\,t^\star$$

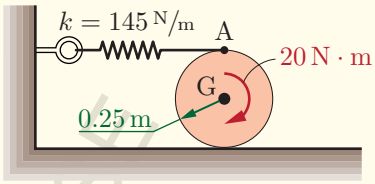
Curiosidad: Notar que el radio y masa del cilindro no inciden sobre la magnitud de la aceleración vertical.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

Basado en Hibbeler 14th ed, Example 18.3

La rueda de la figura tiene masa $m = 18\,\text{kg}$ y radio de giro $k_G = 0{,}18$ respecto a su centro de masa G. La rueda tiene una cuerda enrollada en su manto con un resorte de rigidez $k = 145\,\text{N/m}$ que se encuentra en su longitud natural con la rueda inicialmente en reposo. Sobre la rueda actúa un momento de magnitud $20\,\text{N}\cdot\text{m}$, tras lo cual rueda sin deslizar. Determine la velocidad angular cuando el centro G se ha movido $0{,}15\,\text{m}$.



Debido a que la rueda parte del reposo y el resorte está en su longitud natural, se sabe que:

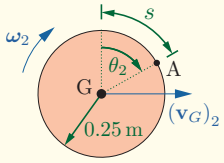
$$T_1 = 0 \qquad\qquad V_1 = (V_e)_1 = 0$$

La condición de rodadura (ligadura entre la rotación y traslación del cuerpo) resulta en:

$$v_{G2} = -r\,\omega_2 = -0{,}25\,\omega_2$$

La inercia de la rueda es:

$$I_G = (k_G)^2\ m = 0{,}5832\,\text{m}^4$$



Con ello, la energía cinética en un instante cualquiera es:

$$T_2 = \frac{1}{2}\,I_G\,(\omega_2)^2 + \frac{1}{2}\,m\,(v_{G2})^2 = \left[\frac{1}{2}\,(0{,}5832) + \frac{1}{2}\,(18)\,(-0{,}25)^2\right](\omega_2)^2$$

$$T_2 = 0{,}8541\ (\omega_2)^2$$

La dificultad en este problema radica en notar que si el punto G se mueve s hacia la derecha, entonces el resorte se estira $2s$: un s por el movimiento de G y otro s por haber enrollado la cuerda una longitud s (movimiento del punto A en la figura). Se sabe del enunciado que $s = 0{,}15\,\text{m}$, con lo que:

$$V_2 = \frac{1}{2}\,k\,\delta^2 = \frac{1}{2}\,k\,(2s)^2 = 6{,}525\ \text{J}$$

Para llegar a $s = 0{,}15\,\text{m}$, la rueda ha girado:

$$\theta_2 = -\frac{s}{r} = -\frac{0{,}15}{0{,}25} = -0{,}6\ \text{rad}$$

El trabajo hecho por el momento es:

$$U_{\mathbf{m}} = \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\theta} = (-20)\,(-0{,}6) = 12\ \text{J}$$

Finalmente, utilizando el principio de trabajo y energía, se tiene que:

$$T_1 + V_1 + U^{\star}_{12} = T_2 + V_2$$

$$0 + 0 + 12 = 0{,}8541\ (\omega_2)^2 + 6{,}525$$

$$\omega_2 = 2{,}532\ \text{rad/s}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard