PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1513 — Dinámica
Segundo Semestre 2018

Taller 09

Movimiento armónico II — Impulso & Momentum I

Problema 1

Un bloque pequeño de masa m en reposo se suelta desde el punto A y desliza por el tobogán como muestra la Figura 1. La superficie es lisa (no hay roce) y al final hay un resorte con rigidez k (punto F). Considere que en todo momento el bloque permanece en contacto con la superficie.
Se pide:

a) Determinar la compresión máxima del resorte en términos de m, g, R, y k.

b) Determinar el intervalo del tiempo que transcurre entre que el bloque pasa la primera y la segunda vez por el punto F.

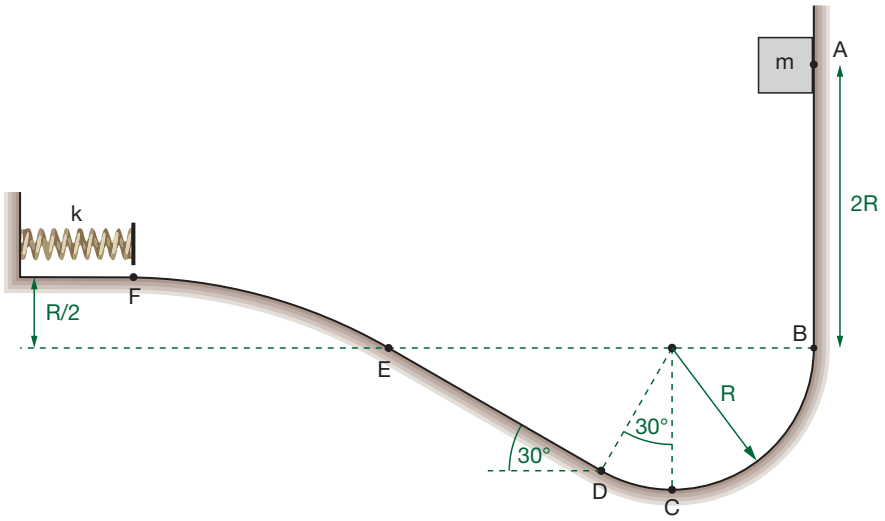


Figura 1: Caja que cae por tobogán hacia un resorte.

Problema 2

Una caja está siendo subida por el motor B a velocidad constante $v_0 = 5\,m/s$ (ver Figura 2). En el instante $t = 0$ la cuerda se corta. Usando el principio de impulso y momentum lineal, se pide:

a) Determinar la velocidad de la caja en $t = 2\,s$.

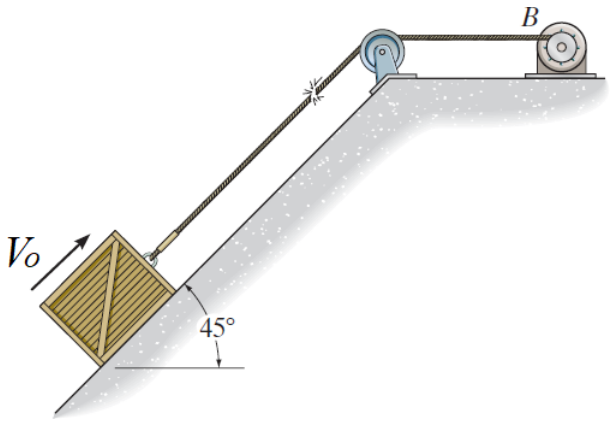


Figura 2: Caja tirada por motor con $v_0 = 5\,m/s$ con cuerda que se corta.

Problema 3

Un helicóptero de $1200\,kg$ comienza desde el reposo en $t = 0$ (ver Figura 3). Las componentes de la fuerza neta sobre el helicóptero entre $t = 0$ y $t = 10\,s$ son:

$$\sum (\mathbf{f}_i)_x = \mathbf{f}_x = 720t\ [N] \quad ; \quad \sum (\mathbf{f}_i)_y = \mathbf{f}_y = 0 \quad ; \quad \sum (\mathbf{f}_i)_z = \mathbf{f}_z = 2160 - 360t\ [N]$$

Se pide:

a) Determinar la velocidad del helicóptero en $t = 10\,s$.

b) Si en $t = 20\,s$ la velocidad del helicóptero es $\mathbf{v} = 36\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{k}}\ [m/s]$: ¿Cuál es la fuerza promedio $\overline{\mathbf{f}}$ que actúa sobre el helicóptero entre $t = 10\,s$ y $t = 20\,s$?

Hint: La fuerza promedio $\overline{\mathbf{f}}$ entre t_1 y t_2 no depende del tiempo en dicho intervalo.

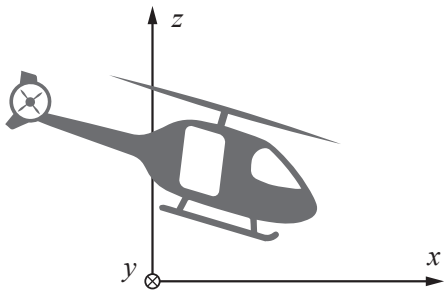


Figura 3: Helicóptero sometido a fuerzas $\mathbf{f} = (720 \cdot t)\,\hat{\mathbf{i}} + (2160 - 360 \cdot t)\,\hat{\mathbf{k}}\ [N]$ entre $t = 0 \ldots 10\,s$.

- **Problema 1**

* Si bien este problema se puede resolver usando conservación de energía, la idea es resolverlo usando las ecuaciones de movimiento armónico (lo que es un camino un poco más largo). Esto no estaba explícito en el enunciado.

La velocidad del bloque en el punto F (justo antes de hacer contacto con el resorte) es:

$$V_A + T_A = V_F + T_F$$

$$mg(2R) + 0 = mg(R/2) + \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$\frac{3}{2} mgR = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$v_f = \sqrt{3gR}$$

La ecuación del oscilador armónico es:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_n \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \qquad \text{donde } A = x_0 \text{ y } B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

En nuestro caso: $A = 0$ y $B = \frac{v_f}{\omega_n} = \frac{\sqrt{3gR}}{\sqrt{k/m}} = \sqrt{\frac{3mgR}{k}}$

, y con ello: $x(t) = \sqrt{\frac{3mgR}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

La amplitud máxima del oscilador es $C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{0^2 + B^2} = B$; con lo que la amplitud máxima en nuestro caso es:

$$C = \sqrt{\frac{3mgR}{k}} \quad //$$

(usando conservación de energía se obtiene el mismo resultado)

La frecuencia natural es: $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

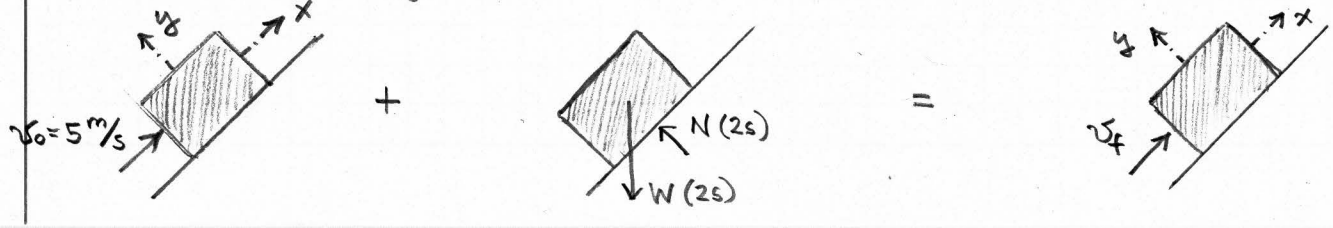
El período natural es: $T_n = \frac{1}{f_n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

El oscilador pasa nuevamente por el punto F (punto de equilibrio del oscilador) en media oscilación. Es decir, en:

$$\frac{T_n}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad //$$

- **Problema 2**

Haciendo un diagrama de impulso - momentum (con "x" orientado en 45°):



En el diagrama de impulsos (fuerzas), la fuerza neta en el eje x es:

$$\sum (f_i)_x = -W \cdot \sin 45° = \frac{-mg}{\sqrt{2}}$$

Usando el principio de impulso - momentum en la dirección del eje "x":

$$m \cdot v_0 + \int_{t=0}^{t=2s} -\frac{mg}{\sqrt{2}}\, dt = m \cdot v_f$$

$$5m - \frac{2mg}{\sqrt{2}} = m \cdot v_f$$

$$v_f = 5 - \sqrt{2}\, g = -8.873 \text{ m/s}$$

* La caja cambia de dirección entre $t=0$ y $t=2s$ (ahora desciende).

- Problema 3

Usando el principio de impulso - momentum:

$$m \cdot \underset{\sim}{0} + \int_0^{10} \{ 720t \,,\, 0 \,,\, 2160 - 360t \}\, dt = m \cdot \underset{\sim}{v_2}$$

$$\{ 360t^2 \,,\, 0 \,,\, 2160 \cdot t - 180t^2 \} \Big|_0^{10} = m \cdot \underset{\sim}{v_2}$$

$$\underset{\sim}{v_2} = \left\{ \frac{36000}{1200} \,,\, 0 \,,\, \frac{21600 - 18000}{1200} \right\}$$

Es decir, la velocidad del helicóptero en $t=10s$ es:

$$\underset{\sim}{v_2} = 30\,\hat{i} + 3\,\hat{k} \quad [m/s]$$

Luego, usando el principio de impulso - momentum nuevamente para $t_1 = 10s$ y $t_2 = 20s$:

$$m\, \underset{\sim}{v_1} + \int_{10}^{20} \underset{\sim}{f}\, dt = m\, \underset{\sim}{v_2}$$

$$m \begin{Bmatrix} 30 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix} + \bar{\underset{\sim}{f}} \int_{10}^{20} (1)\, dt = m \begin{Bmatrix} 36 \\ 0 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\underset{\sim}{f}} (20 - 10) = m \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

La fuerza promedio entre $t_1 = 10s$ y $t_2 = 20s$ es:

$$\bar{\underset{\sim}{f}} = 720\,\hat{i} + 600\,\hat{k} \quad [N]$$