PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1513 — Dinámica
Segundo Semestre 2018

Taller 08

Trabajo & Energía II — Movimiento armónico I

Problema 1

Una pelota de masa m con una velocidad de $v_A = \sqrt{5gr}$ en en el punto A. Cuando alcanza B la cuerda golpea al poste P, que luego describe una trayectoria circular. Si $x = \frac{2}{3}r$. Determine la velocidad y tensión en el punto C.

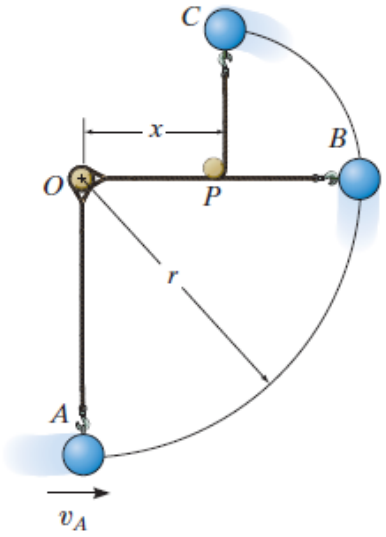


Figura 1: Péndulo con pin/poste.

Problema 2

Un motor tira a un bloque de $150\,kg$ sobre una superficie con coeficiente de roce estático $\mu_s = 0{,}3$ y roce cinético es $\mu_k = 0{,}2$. Si el motor M ejerce una fuerza de $F = \left(8t^2 + 20\right)\,N$. Se pide determinar:

a) El instante en que la caja se empieza a mover.

b) La velocidad en $t = 5$

c) La potencia que hace el motor en $t = 5$ s

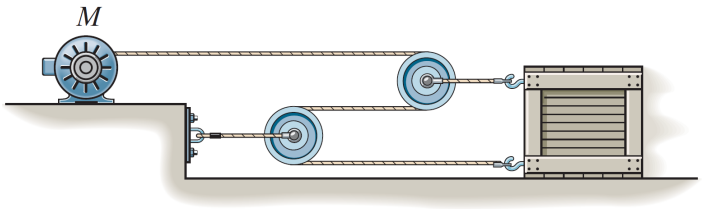


Figura 2: Máquina que tira de bloque de $150\,kg$.

Problema 3

Se tiene un resorte con $k = 144\,N/m$ que cuelga el techo en reposo. En un instante $t = 0$ se cuelga una masa $m = 4\,kg$ del resorte. Se pide:

a) Determinar la deflexión estática del sistema cuando se cuelga la masa (posición de equilibrio del sistema resorte–masa), llamado δ_{st}.

b) Cuando se cuelga la masa, el sistema queda en la condición $z_0 = -\delta_{\text{st}}$: ¿Cuál es el valor de $\dot{z}_0$?

c) Determinar el tiempo que tarda el sistema (desde que se cuelga la masa) en volver a la misma posición dada por z_0.

d) Determinar el tiempo que tarda el sistema (desde que se cuelga la masa) en pasar por el punto de equilibrio (i.e. $z = 0$).

e) Determinar la velocidad de la masa cuando pasa por dicho punto (i.e. $z = 0$).

f) Determinar la aceleración de la masa cuando pasa por dicho punto (i.e. $z = 0$).

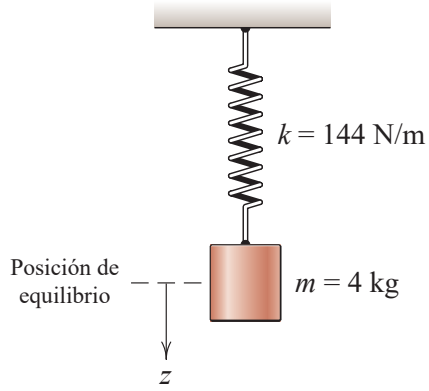
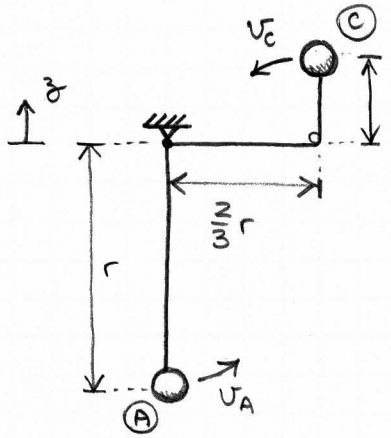


Figura 3: Sistema masa–resorte.

- **Problema 1**



Sabemos que $v_A = \sqrt{5gr}$, $z_A = -r$, $v_C = ?$, $z_C = r/3$

Usando el principio de conservación de energía:

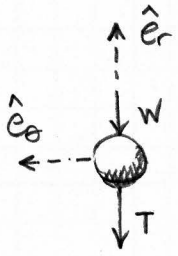
$$V_A + T_A = V_B + T_B$$

$$mg(-r) + \frac{1}{2}m(5gr) = mg(r/3) + \frac{1}{2}m(v_C)^2$$

$$mgr\left[-1 - \frac{1}{3} + \frac{5}{2}\right] = \frac{1}{2}m(v_C)^2$$

$$(v_C)^2 = \frac{7}{3}gr \quad \rightarrow \quad v_C = \sqrt{\frac{7}{3}gr}$$

Para determinar la tensión en la cuerda hacemos un DCL en el punto C.



Usando la 2ª Ley de Newton:

$$\Sigma f_r = m \cdot a_r$$

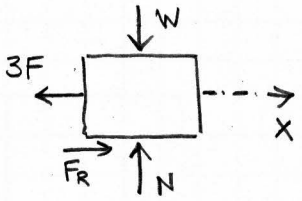
$$-W - T = m\left(-\frac{v_\theta^2}{r}\right)$$

(radio del mov. circular es $r/3$)

$$-mg - T = m\left[-\left(\frac{7}{3}gr\right)\left(\frac{1}{r/3}\right)\right]$$

$$T = 7mg - mg \quad \rightarrow \quad T = 6mg$$

- **Problema 2**



Haciendo un DCL de la caja y recordando que una cuerda lleva una única tensión.

La caja se empieza a mover cuando vence a $(F_R)_{max} = \mu_s \cdot N$, i.e. cuando:

$$-3F + (F_R)_{max} = 0$$

$$3F = (0.3)(150g)$$

$$F = 15g$$

Sabemos que $F(t) = 8t^2 + 20$ [N], con lo que:

$$8(t^*)^2 + 20 = 15g$$

$$t^* = \sqrt{\frac{15g - 20}{8}} = 3.987s \approx 4s$$

Una vez que la caja está en movimiento ($t > 4s$), la fuerza de roce es:

$$F_R = (F_R)_k = (0.2)(mg) = 30g$$

Usando la 2ª Ley de Newton:

$$m \cdot a_x = -3F + F_R$$

$$a_x = \frac{1}{m}\left[-24t^2 - 60 + 30g\right]$$

La velocidad en $t=5$ partiendo del reposo es:

$$v(t=5) = \int_{t=4s}^{t=5s} a_x \cdot dt = \frac{1}{m}\int_{4s}^{5s}\left[-24t^2 - 60 + 30g\right]dt = \frac{1}{m}\left[-8t^3 - 60\cdot t + 30g\cdot t\right]_{t=4s}^{t=5s}$$

$$v(t=5) = \frac{30g - 548}{m} = -1.69\ m/s \quad \text{(movimiento hacia la izquierda : ok)}$$

La condición de ligadura entre la caja y el motor es:

$$\dot{x}_m = 3\dot{x}_c$$

$$\rightarrow \dot{x}_m = -5.07\ m/s$$

La fuerza que hace el motor en $t = 5s$ es:

$$F(t=5s) = 8(5^2) + 20 = 220\ N$$

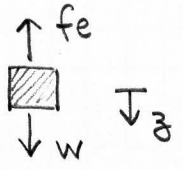
La potencia del motor es: $P = (5.07)(220) = 1115\ N\cdot m/s$

$1115\ J/s$

$1115\ W$

- **Problema 3**

a) En la posición de equilibrio la masa no se mueve. Haciendo un DCL de la masa en esa situación.



$$\Sigma f = 0 \rightarrow -fe + W = 0$$

$$k \cdot \delta_{st} = mg$$

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k} = \frac{(4)(9.81)}{144} = 0.2725\ m$$

b) En el instante $t=0$ el sistema no tiene velocidad, i.e.: $\dot{z}_0 = 0$

c) La frecuencia natural circular es: $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{144}{4}} = \sqrt{36} = 6\ rad/s$

La frecuencia natural es: $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{3}{\pi}\ hz$

El período natural es: $T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{\pi}{3}$ segundos

Para volver a z_0 el oscilador debe hacer una oscilación completa; i.e. el oscilador tarda $\pi/3 = 1.047\ s$.

d) Desde $t=0$, $z_0 = -\delta_{st}$, y $\dot{z}_0 = 0$; la masa pasará por $z=0$ en 1/4 de oscilación! Es decir, pasará por $z=0$ en:

$$\frac{T_n}{4} = \left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{12} = 0.262\ s \;//$$

e) La ecuación de movimiento es:

$$x(t) = A\cdot\cos(\omega_n\cdot t) + B\cdot\sin(\omega_n\cdot t) \qquad \text{donde } A = x_0 \text{ y } B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

Es decir: $x(t) = -\delta_{st}\cdot\cos(\omega_n\cdot t)$

$$\dot{x}(t) = \delta_{st}\cdot\omega_n\cdot\sin(\omega_n\cdot t)$$

$$\ddot{x}(t) = \delta_{st}\cdot\omega_n^2\cdot\cos(\omega_n\cdot t)$$

* Recordar que (del enunciado) z positivo apunta hacia abajo.

La velocidad pedida es:

$$\dot{x}\left(t=\frac{\pi}{12}\right) = \frac{mg}{k}(6)\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{12}\right) = \frac{g}{6} \;//$$

f) La aceleración es:

$$\ddot{x}\left(t=\frac{\pi}{12}\right) = \frac{mg}{k}(36)\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{12}\right) = 0$$

Lo que hace sentido ya que $\Sigma f = m\cdot\ddot{x}$, y en la posición de equilibrio $\Sigma f = 0$.