PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1513 — Dinámica
Segundo Semestre 2018

Taller 07

Cinética III — Trabajo & Energía

Problema 1

Un paracaidista de masa m salta con un *wingsuit* (traje aéreo) desde gran altura (ver Figura 1). Su roce con el aire produce una fuerza $\mathbf{f}_D = -c\,|v|^{3/2}\,\hat{\mathbf{v}}$. Se pide determinar:

a) La aceleración del paracaidista el instante justo al inicio de su salto si empieza su caída desde el reposo (i.e $v_0 = 0$), en función de m, g, y c.

b) La velocidad terminal $v_{\max}$ (velocidad máxima) que alcanza, en función de m, g, y c.

c) Si en este caso: $m = 72\,kg$; $g = 9{,}81\,m/s^2$; y $c = 1{,}26\,Ns^{1,5}/m^{1,5}$. Compare la velocidad terminal $v_{\max}$ con la velocidad del sonido en el aire[1]. ¿Le parece razonable este resultado?

Hint: No intente obtener la ecuación del movimiento. Las condiciones límite (i.e. $v = 0$ y $v = v_{\max}$) se pueden obtener simplemente usando la segunda ley de Newton: $\sum \mathbf{f}_i = m\,\mathbf{a}$.

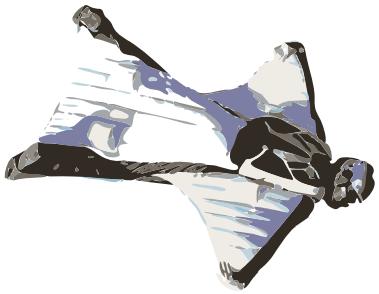


Figura 1: Paracaidista con un *wingsuit*.

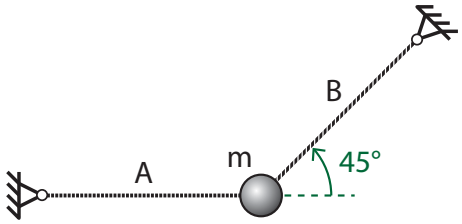


Figura 2: Masa $m = 2\,kg$ suspendida por cables.

Problema 2

Dado el sistema de la Figura 2 con una masa suspendida $m = 2\,k$; se pide:

a) Determine la tensión en los cables si la masa está inmóvil.

b) Si se corta el cable A; ¿Cuál es la tensión en el cable B el instante justo después?

[1] La velocidad del sonido en el aire es $343\,m/s$ o $1235\,km/h$

Problema 3

Los bloques A y B comienzan en reposo. La fricción entre ambos bloques es μ_k, y no hay fricción entre el bloque B y el plano inclinado, como muestra la Figura 3. ¿Cuál es la velocidad de los bloques cuando se han desplazado una distancia b (cada uno)?
La expresión debe quedar en función de b, g, μ_k, m_A, m_B, y θ.

Nota: Resuelva este problema usando el principio de trabajo–energía.

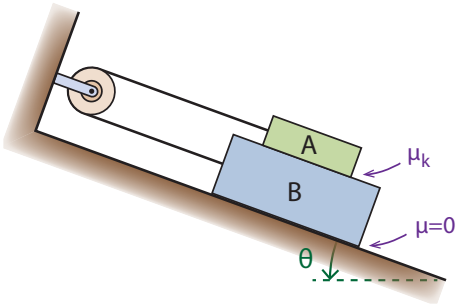


Figura 3: Masas vinculadas por una cuerda con roce en entre ellas.

Problema 4

El sistema de la Figura 4 consiste en un carro de m que desliza por una barra semicircular. El carro se mueve producto de la acción de la gravedad y del resorte, y comienza en reposo en el punto A: i.e. $v_0 = 0$. La rigidez del resorte es k, y su longitud en reposo es l_0. Se pide determinar:

a) Una expresión para el largo del resorte en función de θ, R, y h.

b) La velocidad del carro $v(\theta)$ en función de θ, R, h, l_0, k, y m.

c) Usando la expresión anterior, determine la velocidad del carro al llegar al punto B.

Nota: Resuelva este problema usando el principio de conservación de energía.

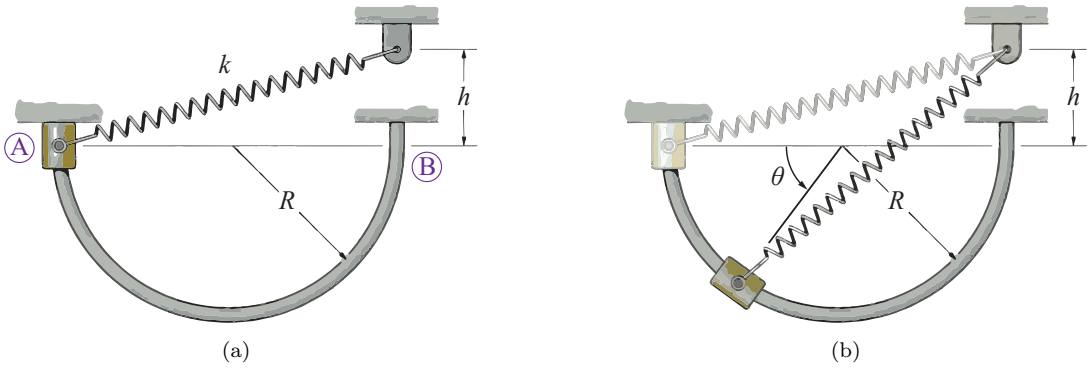


Figura 4: Carro propulsado por gravedad y resorte: **(a)** Configuración inicial del sistema; **(b)** Configuración intermedia en función del ángulo θ.

Soluciones.

Problema 1.a
Aplicando la 2^a ley de Newton al paracaidista (y tomando positivo *hacia abajo*) se tiene:

$$m\,a = mg - c\,|v|^{3/2}$$

, pero como inicialmente el paracaidista tiene velocidad $v_0 = 0$, entonces:

$$m\,a_{t\to 0} = mg$$
$$a_0 = g$$

Es decir, al comienzo el paracaidista acelera sólo bajo la acción de la fuerza de gravedad.

Problema 1.b
Aplicando la 2^a ley de Newton al paracaidista, y considerando que cuando alcanza velocidad terminal él ya no acelera:

$$mg - c\,|v_{\max}|^{3/2} = m\,(0)$$
$$v_{\max} = \left(\frac{mg}{c}\right)^{2/3}$$

Nota: Sólo es necesario obtener la ecuación del movimiento si necesitamos conocer su condición para todo tiempo t.

Problema 1.c
Reemplazando valores para $v_{\max}$ se obtiene:

$$v_{\max} = \left(\frac{mg}{c}\right)^{2/3} = \left(\frac{72\cdot 9{,}81}{1{,}26}\right)^{2/3} = (560{,}5714)^{2/3} = 68\,m/s$$

, lo que constituye una fracción razonable de la velocidad del sonido.
Nota: Es tremendamente difícil romper la barrera del sonido en caída libre.

Problema 2.a
Si la masa está inmóvil, entonces el sistema está en equilibrio, y con ello:

$$m\mathbf{a} = -T_A\,\hat{\mathbf{i}} + T_B\left(\cos 45^\circ\,\hat{\mathbf{i}} + \sin 45^\circ\,\hat{\mathbf{j}}\right) - mg\,\hat{\mathbf{j}}$$

, lo que constituye 2 ecuaciones de equilibrio (ya que $\mathbf{a} = \mathbf{0}$):

$$-T_A + T_B\cos 45^\circ = 0$$
$$T_B\sin 45^\circ - mg = 0$$

La solución del sistema es:

$$T_B = \sqrt{2}\,mg \qquad \text{y} \qquad T_A = mg$$

Problema 2.b
Cuando se corta el cable A, la masa se moverá describiendo un movimiento circular con condiciones iniciales $\theta_0 = -45^\circ$ y $\omega_0 = \dot{\theta}_0 = 0$. Aplicando a dicho sistema la 2^a ley de Newton:

$$m\,\mathbf{a} = -T_B\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + mg\,(\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta)$$
$$m\left(-r\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + r\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\right) = -T_B\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + mg\,(-\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta)$$

Para obtener la tensión en el cable usamos la ecuación asociada $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$ con la condición $\omega_0 = \dot{\theta}_0 = 0$ para obtener:

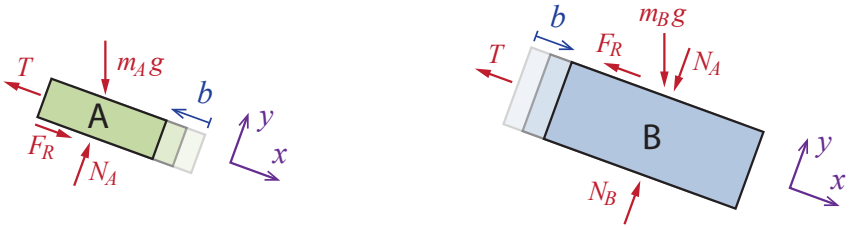
$$m\left(-r\cdot 0^2\right) = 0 = -T_B + mg\cos\theta$$
$$T_B = mg\cos\theta$$

, que con $\theta = 45°$ resulta:

$$T_B = mg\cos\theta = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

Problema 3

Comenzamos dibujando un DCL por bloque. Notar que la fuerza de roce entre los bloques son iguales y contrarias, y se orienta asumiendo que el bloque pequeño sube, mientras que el grande baja.



Debido a la vinculación (condición de ligadura), las velocidades de ambos bloques es igual y contraria:

$$\dot{v}_A = -\dot{v}_B \qquad \text{y} \qquad \ddot{a}_A = -\ddot{a}_B$$

El trabajo hecho por las fuerzas sobre el bloque A es igual a la variación de su energía cinética (recordar que los bloques comienzan del reposo; i.e. $v_{A1} = 0$):

$$\begin{aligned} U_{12} &= \frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 - \frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 \\ \int_0^b -T + m_A g\sin\theta + \mu_k m_A g\cos\theta \,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 \\ (-T + m_A g\sin\theta + \mu_k m_A g\cos\theta)\,(b) &= \frac{1}{2}m_A\,(-v_{B2})^2 \end{aligned}$$

Repitiendo el cálculo para el bloque B (con $v_{B1} = 0$):

$$\begin{aligned} U_{12} &= \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2 - \frac{1}{2}m_B v_{B1}^2 \\ \int_0^b -T + m_B g\sin\theta - \mu_k m_A g\cos\theta \,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2 \\ (-T + m_B g\sin\theta - \mu_k m_A g\cos\theta)\,(b) &= \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2 \end{aligned}$$

Eliminando T de ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} (m_B g\sin\theta - \mu_k m_A g\cos\theta)\,(b) - (m_A g\sin\theta + \mu_k m_A g\cos\theta)\,(b) &= \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2 - \frac{1}{2}m_A\,(-v_{B2})^2 \\ (g\,b\sin\theta)\,(m_B - m_A) - 2b\mu_k m_A g\cos\theta &= \left(\frac{m_A + m_B}{2}\right)v_{B2}^2 \end{aligned}$$

, con lo que finalmente:

$$v_{B2} = \sqrt{\frac{2gb}{m_A + m_B}\left[(m_B - m_A)\sin\theta - 2\mu_k m_A\cos\theta\right]}$$

, y donde $v_{A2} = -v_{B2}$.

Problema 4.a

Situando el origen al centro del semicírculo, la posición del carro es:

$$\mathbf{u} = (-R\cos\theta)\,\hat{\mathbf{i}} + (-R\sin\theta)\,\hat{\mathbf{j}}$$

La longitud del resorte en función de θ es:

$$l = \left| \begin{Bmatrix} R \\ h \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \right|_2 = \left| \begin{Bmatrix} R \\ h \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -R\cos\theta \\ -R\sin\theta \end{Bmatrix} \right|_2$$
$$l = \sqrt{(R + R\cos\theta)^2 + (h + R\sin\theta)^2}$$

Problema 4.b
El estiramiento del resorte es:

$$\delta = \sqrt{(R + R\cos\theta)^2 + (h + R\sin\theta)^2} - l_0$$

Situando el origen al centro del semicírculo; la posición vertical es $y_A = 0$ y su velocidad inicial es $v_A = 0$. Usando el principio de conservación de energía, se obtiene:

$$\frac{1}{2}k\delta_A^2 + mgy_A + \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}k\delta^2 + mgy + \frac{1}{2}mv^2$$
$$\frac{1}{2}k\left[\sqrt{4R^2 + h^2} - l_0\right]^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}k\left[\sqrt{(R + R\cos\theta)^2 + (h + R\sin\theta)^2} - l_0\right]^2 + mg\left(-R\sin\theta\right) + \frac{1}{2}mv^2$$

Despejando v de la expresión, se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\left[\sqrt{4R^2 + h^2} - l_0\right]^2 - \frac{k}{m}\left[\sqrt{(R + R\cos\theta)^2 + (h + R\sin\theta)^2} - l_0\right]^2 + 2gR\sin\theta}$$

Problema 4.c
En el punto B se tiene $\theta = \pi$, y con ello:

$$v_B = \sqrt{\frac{k}{m}\left[\sqrt{4R^2 + h^2} - l_0\right]^2 - \frac{k}{m}\left[h - l_0\right]^2}$$
$$v_B = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\left[\sqrt{4R^2 + h^2} - l_0\right]^2 - \left[h - l_0\right]^2\right)}$$