PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2023

Control 02

Duración total: 70 minutos

Problema 1 [3.0 puntos] [Forma A]

Dos bloques están conectados mediante una cuerda. El bloque A pesa 20 kg y el bloque B pesa 100 kg. El coeficiente de fricción en el plano inclinado es de $\mu = 0{,}025$. Los bloques parten del reposo. Determine la velocidad del bloque B cuando se ha desplazado dos metros. Considere $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$

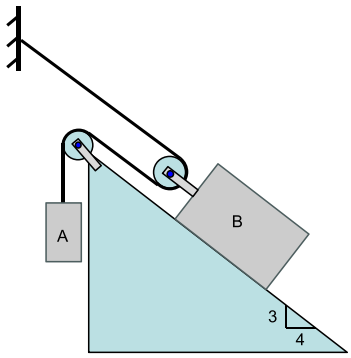


Figura 1: Sistema masa-polea del problema 1

Solución

A continuación se muestra un diagrama de los ejes locales, las alturas de los bloques y del nivel de referencia considerado.

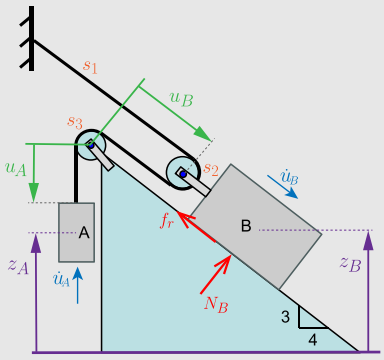


Figura 1.1: Diagrama donde se muestran los ejes locales de los bloques, las alturas de estos y el nivel de referencia (línea morada).

El largo de la cuerda es:

$$l = s_1 + 2\,u_B + s_2 + s_3 + u_A$$

la condición de ligadura para el desplazamiento y velocidad de ambos bloques es entonces:

$$\text{Desplazamiento} \;:\; 2\,\Delta u_B + \Delta u_A = 0 \;\longrightarrow\; \Delta u_A = -2\,\Delta u_B \tag{1}$$
$$\text{Velocidad} \;:\; 2\,\dot{u}_B + \dot{u}_A = 0 \;\longrightarrow\; \dot{u}_A = -2\,\dot{u}_B \tag{2}$$

Si el bloque B se desplaza 2 metros ($\Delta u_B = 2\,\text{m}$), entonces, el bloque A sube 4 metro ($\Delta u_A = -4\,\text{m}$). De enunciado se tiene que $\sin(\alpha) = 3/5$ y $\cos(\alpha) = 4/5$. Aplicando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton sobre el bloque B en dirección perpendicular al plano inclinado se obtiene:

$$\begin{aligned}
\sum f &= m\ddot{u} \\
N_B - m_B g\cos(\alpha) &= 0 \\
N_B &= \frac{4}{5} m_B g \\
&= \left(\frac{4}{5}\right)(100)(10) = 800\,\text{N}
\end{aligned}$$

Como el bloque B se mueve, la fuerza de fricción es cinética[1]:

$$f_r = \mu N_B = \left(\frac{1}{40}\right)(800) = 20\,\text{N}$$

Aplicando conservación de energía entre un estado de reposo (estado 1) hasta cuando el bloque B se ha desplazado 2 metros (estado 2) se obtiene:

$$\begin{aligned}
U_{12} &= T_2 - T_1 \\
m_A g(z_{A1} - z_{A2}) + m_B g(z_{B1} - z_{B2}) - (f_r)(2) &= \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2
\end{aligned} \tag{3}$$

Como el bloque A sube, se tiene que:

$$z_{A1} - z_{A2} = \Delta u_A = -4\,\text{m}$$

Para el bloque B es distinto al ser inclinado, la diferencia de altura, cuando se desplaza 2 metros, es:

$$z_{B1} - z_{B2} = \Delta u_B \sin(\alpha) = (2)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5}\,\text{m}$$

Reemplazando las diferencias de altura de cada bloque y la ecuación de ligadura (2) en (3) se obtiene:

$$\begin{aligned}
m_A g\Delta u_A + m_B g\Delta u_B \sin(\alpha) - (f_r)(2) &= \frac{1}{2} m_A(-2\,\dot{u}_B)^2 + \frac{1}{2} m_B(\dot{u}_B)^2 \\
(20)(10)(-4) + (100)(10)(6/5) - (20)(2) &= \left(\frac{1}{2}\right)(20)(-2\,\dot{u}_B)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)(100)(\dot{u}_B)^2 \\
-800 + 1200 - 40 &= 40\,\dot{u}_B^2 + 50\,\dot{u}_B^2 \\
360 &= 90\,\dot{u}_B^2 \\
4 &= \dot{u}_B^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la velocidad del bloque es

$$\dot{u}_B = 2\,\text{m/s}$$

[1] El coeficiente de roce es $\mu = 0{,}025 = 1/40$.

Problema 2 [3.0 puntos] [Forma B]

Dos bloques están conectados mediante una cuerda. El bloque A pesa 60 kg y el bloque B pesa 40 kg. El coeficiente de fricción en el plano inclinado es de $\mu = 0{,}05$. Los bloques parten del reposo. Determine la velocidad del bloque B cuando el bloque A se ha desplazado dos metros. Considere $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$

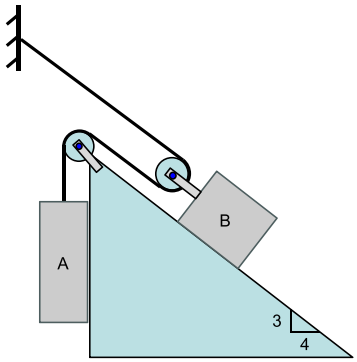


Figura 2: Sistema masa-polea del problema 2

Solución

A continuación se muestra un diagrama de los ejes locales, las alturas de los bloques y del nivel de referencia considerado.

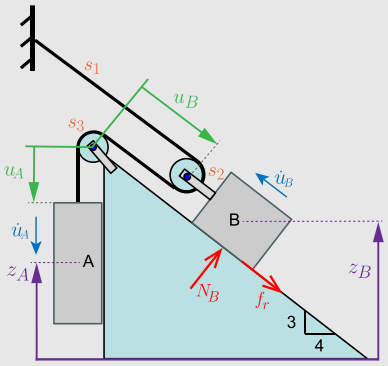


Figura 2.1: Diagrama donde se muestran los ejes locales de los bloques, las alturas de estos y el nivel de referencia (línea morada).

El largo de la cuerda es:

$$l = s_1 + 2\,u_B + s_2 + s_3 + u_A$$

la condición de ligadura para el desplazamiento y velocidad de ambos bloques es entonces:

$$\text{Desplazamiento} \;:\; 2\,\Delta u_B + \Delta u_A = 0 \;\longrightarrow\; \Delta u_A = -2\,\Delta u_B \tag{3}$$

$$\text{Velocidad} \;:\; 2\,\dot{u}_B + \dot{u}_A = 0 \;\longrightarrow\; \dot{u}_A = -2\,\dot{u}_B \tag{4}$$

Si el bloque A se desplaza 2 metros ($\Delta u_A = 2\,\mathrm{m}$), entonces, el bloque B sube 1 metro ($\Delta u_B = -1\,\mathrm{m}$). De enunciado se tiene que $\sin(\alpha) = 3/5$ y $\cos(\alpha) = 4/5$. Aplicando la 2^{da} ley de Newton sobre el bloque B en dirección perpendicular al plano inclinado se obtiene:

$$\sum f = m\ddot{u}$$
$$N_B - m_B g\cos(\alpha) = 0$$
$$N_B = \frac{4}{5} m_B g$$
$$= \left(\frac{4}{5}\right)(40)(10) = 320\,\mathrm{N}$$

Como el bloque B se mueve, la fuerza de fricción es cinética[2]:

$$f_r = \mu N_B = \left(\frac{1}{20}\right)(320) = 16\,\mathrm{N}$$

Aplicando conservación de energía entre un estado de reposo (estado 1) hasta cuando el bloque A se ha desplazado 2 metros (estado 2) se obtiene:

$$U_{12} = T_2 - T_1$$
$$m_A g(z_{A1} - z_{A2}) + m_B g(z_{B1} - z_{B2}) - (f_r)(1) = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2 \tag{3}$$

Como el bloque A baja, se tiene que:

$$z_{A1} - z_{A2} = \Delta u_A = 2\,\mathrm{m}$$

Para el bloque B es distinto al ser inclinado, la diferencia de altura, cuando se desplaza 1 metro, es:

$$z_{B1} - z_{B2} = \Delta u_B \sin(\alpha) = (-1)\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{5}\,\mathrm{m}$$

Reemplazando las diferencias de altura de cada bloque y la ecuación de ligadura (2) en (3) se obtiene:

$$m_A g\Delta u_A + m_B g\Delta u_B \sin(\alpha) - (f_r)(1) = \frac{1}{2} m_A(-2\,\dot{u}_B)^2 + \frac{1}{2} m_B(\dot{u}_B)^2$$
$$(60)(10)(2) + (40)(10)(-3/5) - (16)(1) = \left(\frac{1}{2}\right)(60)(-2\,\dot{u}_B)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)(40)(\dot{u}_B)^2$$
$$1200 - 240 - 16 = 120\,\dot{u}_B^2 + 20\,\dot{u}_B^2$$
$$944 = 140\,\dot{u}_B^2$$
$$\frac{944}{140} = \dot{u}_B^2$$

Por lo tanto, la velocidad del bloque es

$$\dot{u}_B = \sqrt{\frac{944}{140}}\,\mathrm{m/s}$$

[2]El coeficiente de roce es $\mu = 0{,}05 = 1/20$.

Problema 3 [3.0 puntos] [Forma A]

El Checo Pérez va en su auto F1 a una velocidad constante de 50 $^{\text{m}}/_{\text{s}}$. El auto y el piloto pesan 800 kg en total y el viento genera una fuerza de fricción proporcional a la velocidad igual a $f_D = 0{,}1v^2$. Desde un cierto instante de tiempo el auto acelera a 8 $^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$. El motor tiene una eficiencia de 0,6.

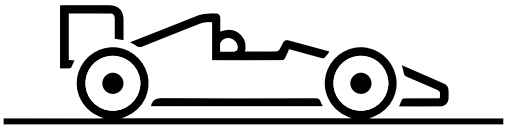


Figura 3: Auto de F1

a) Determine la potencia suministrada al motor para mantener la velocidad constante de 50 $^{\text{m}}/_{\text{s}}$.

b) Determine la potencia suministrada al motor en $t = 5$ segundos, después de que el auto comienza a acelerar.

Solución

Solución a)

En base a la eficiencia[3] se puede obtener la potencia suministrada (i.e. potencia de entrada):

$$\epsilon = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = 0{,}6 = \frac{3}{5} \longrightarrow P_{\text{in}} = \frac{5}{3}P_{\text{out}}$$

La potencia de salida para que el motor mantenga la velocidad constante de 50 $^{\text{m}}/_{\text{s}}$ es:

$$\begin{aligned} P_{\text{out}} &= (f_D)(v) \\ &= (0{,}1v^2)(v) \\ &= 0{,}1v^3 \\ &= (1/10)(50)^3 = 12500\,^{\text{N}\cdot\text{m}}/_{\text{s}} \end{aligned}$$

Entonces, la potencia suministrada por el motor es de:

$$P_{\text{in}} = (5/3)(12500) = \frac{62500}{3}\,^{\text{N}\cdot\text{m}}/_{\text{s}}$$

Solución b)

Para determinar la potencia después de 5 segundos es necesario determinar la velocidad y la fuerza que ejerce el motor en dicho instante de tiempo. A continuación se muestra un diagrama de cuerpo libre del auto:

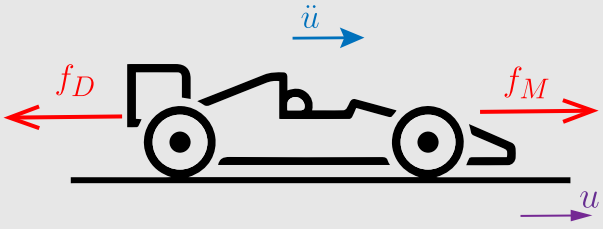


Figura 3.1: Diagrama de cuerpo libre del auto de F1

Aplicando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton se puede obtener el valor de la fuerza que ejerce el motor:

$$\begin{aligned}\sum_i f_i &= m\,\ddot{u}\\ -f_D + f_M &= m\,\ddot{u}\\ -0{,}1v^2 + f_M &= (800)(8)\\ f_M &= 6400 + 0{,}1v^2\end{aligned}$$

La ecuación de velocidad del auto, sabiendo que $v_0 = 50\,{}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}$, es:

$$v(t) = 8\,t + 50\,{}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}$$

entonces, en 5 segundos la velocidad del auto es:

$$v(5) = (8)(5) + 50 = 90\,{}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}$$

por lo tanto, la fuerza que ejerce el motor después de 5 segundos es:

$$f_M = 6400 + ({}^{1}\!/_{10})(90)^2 = 7210\,\text{N}$$

La potencia de salida del auto es:

$$\begin{aligned}P_{\text{out}} &= (f_M)(v)\\ &= (7210)(90)\\ &= 648900\,{}^{\text{N}\cdot\text{m}}\!/_{\text{s}}\end{aligned}$$

Finalmente, la potencia suministrada al motor debe ser:

$$P_{\text{in}} = ({}^{5}\!/_{3})(648900) = 1081500\,{}^{\text{N}\cdot\text{m}}\!/_{\text{s}}$$

[3] La eficiencia del motor es $\epsilon = 0{,}6 = {}^{3}\!/_{5}$.

Problema 4 [3.0 puntos] [Forma B]

El Checo Pérez va en su auto F1 a una velocidad constante de 40 $^{\text{m}}/_{\text{s}}$. El auto y el piloto pesan 1000 kg en total y el viento genera una fuerza de fricción proporcional a la velocidad igual a $f_D = 0{,}1v$. Desde un cierto instante de tiempo el auto acelera a 5 $^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$. El motor tiene una eficiencia de 0,7.

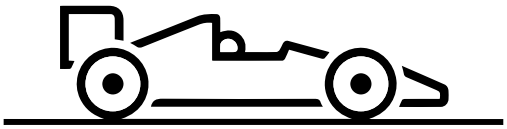


Figura 4: Auto de F1

a) Determine la potencia suministrada al motor para mantener la velocidad constante de 40 $^{\text{m}}/_{\text{s}}$.

b) Determine la potencia suministrada al motor en $t = 4$ segundos, después de que el auto comienza a acelerar.

Solución

Solución a)

En base a la eficiencia[4] se puede obtener la potencia suministrada (i.e. potencia de entrada):

$$\epsilon = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = 0{,}7 = \frac{7}{10} \longrightarrow P_{\text{in}} = \frac{10}{7} P_{\text{out}}$$

La potencia de salida para que el motor mantenga la velocidad constante de 40 $^{\text{m}}/_{\text{s}}$ es:

$$\begin{aligned} P_{\text{out}} &= (f_D)(v) \\ &= (0{,}1v)(v) \\ &= 0{,}1v^2 \\ &= (1/10)(40)^2 = 160\ ^{\text{N}\cdot\text{m}}/_{\text{s}} \end{aligned}$$

Entonces, la potencia suministrada por el motor es de:

$$P_{\text{in}} = (10/7)(160) = \frac{1600}{7}\ ^{\text{N}\cdot\text{m}}/_{\text{s}}$$

Solución b)

Para determinar la potencia después de 4 segundos es necesario determinar la velocidad y la fuerza que ejerce el motor en dicho instante de tiempo. A continuación se muestra un diagrama de cuerpo libre del auto:

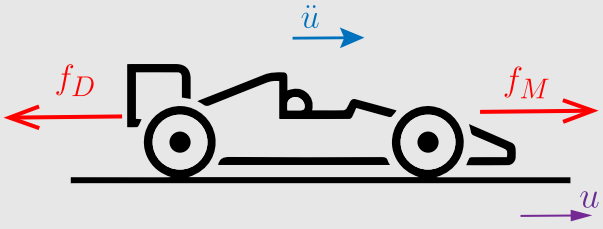


Figura 4.1: Diagrama de cuerpo libre del auto de F1

Aplicando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton se puede obtener el valor de la fuerza que ejerce el motor:

$$\begin{aligned}\sum_i f_i &= m\,\ddot{u}\\ -f_D + f_M &= m\,\ddot{u}\\ -0{,}1v + f_M &= (1000)(5)\\ f_M &= 5000 + 0{,}1v\end{aligned}$$

La ecuación de velocidad del auto, sabiendo que $v_0 = 40\,{}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}$, es:

$$v(t) = 5\,t + 40\,{}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}$$

entonces, en 4 segundos la velocidad del auto es:

$$v(4) = (5)(4) + 40 = 60\,{}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}$$

por lo tanto, la fuerza que ejerce el motor después de 4 segundos es:

$$f_M = 5000 + ({}^{1}\!/_{10})(60) = 5006\,\text{N}$$

La potencia de salida del auto es:

$$\begin{aligned}P_{\text{out}} &= (f_M)(v)\\ &= (5006)(60)\\ &= 300360\,{}^{\text{N}\cdot\text{m}}\!/_{\text{s}}\end{aligned}$$

Finalmente, la potencia suministrada al motor debe ser:

$$P_{\text{in}} = ({}^{10}\!/_{7})(300360) = \frac{3003600}{7}\,{}^{\text{N}\cdot\text{m}}\!/_{\text{s}}$$

[4] La eficiencia del motor es $\epsilon = 0{,}7 = {}^{7}\!/_{10}$