PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1513 — Dinámica
Segundo Semestre 2018

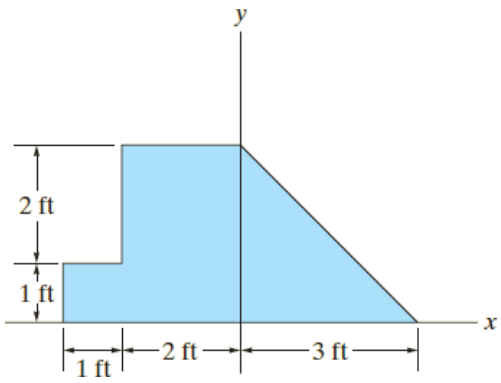
Taller 12

Centro de masa – Momento – Momentum Angular

Problema 1

Encuentre el centro de masa de la siguiente figura. Asuma que el espesor t es constante, y que la densidad ρ es uniforme.

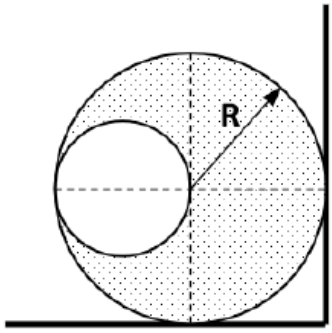
Hint: Un cuerpo se puede descomponer en cuerpos más pequeños cuyos centros de masa son conocidos; los que pueden ser trabajados como partículas para obtener el centro de masa del cuerpo original.



Problema 2

Un disco perforado de peso total W se apoya en una superficie horizontal rugosa con coeficiente de roce μ, y contra una pared vertical lisa ($\mu = 0$). Asuma que el espesor t es constante, y que la densidad ρ es uniforme. Determine las normales de cada superficie.

Hint1: Si el cuerpo no se mueve $\sum \mathbf{f} = 0$ y además $\sum \mathbf{m} = 0$.
Hint2: Para efectos del cálculo del centro de masa, se puede tener un "área negativa". Esto se traduce en una resta de centros de masa.

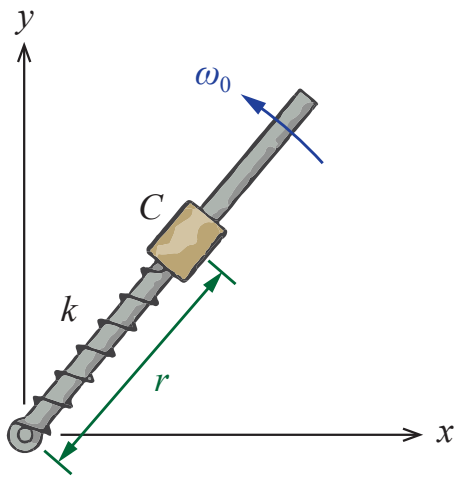


Problema 3

Una barra rota en un plano horizontal (i.e. una mesa, no hay gravedad) sobre un pin en su extremo. El buje de $2\,kg$ llamado C desliza sobre la barra sin roce. La rigidez del resorte es $k = 40\,N/m$, y tiene un largo natural $\ell_0 = 0{,}8\,m$. En el instante $t = 0$, la velocidad angular de la barra es $\omega_0 = 6\,rad/s$, $r = 0{,}2\,m$, y la velocidad radial del buje es $v_r = 0$. El peso de la barra y resorte son despreciables en comparación al buje.

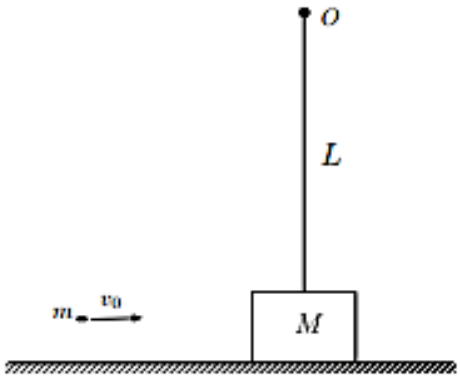
a) Determine la velocidad angular de la barra cuando el resorte alcanza su largo natural.

b) Determine la velocidad radial del buje cuando el resorte alcanza su largo natural.

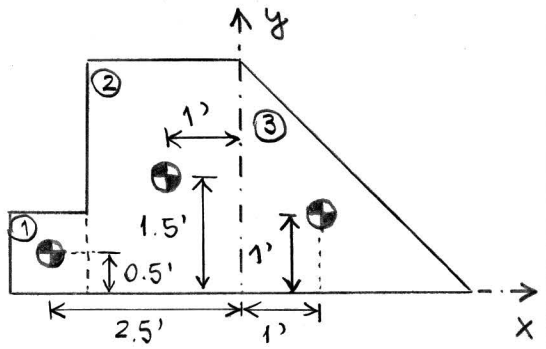


Problema 4

Se dispara un proyectil de masa m con una velocidad v sobre un péndulo balístico que tiene masa M. El péndulo está sujeto al extremo inferior de una cuerda ideal de longitud L que puede girar en torno a su extremo superior. El proyectil se incrusta en el péndulo proveyendo un movimiento de rotación en torno al punto de sujeción. Hallar la velocidad mínima del proyectil para que el péndulo llegue a describir una circunferencia completa manteniendo la cuerda bajo tensión.



- **Problema 1**



Un cuerpo complejo se puede dividir en sub-cuerpos cuyos C.M. son conocidos y así obtener el c.M. del cuerpo original.

Se asume que el cuerpo dado tiene espesor "t" y densidad "ρ" uniforme.

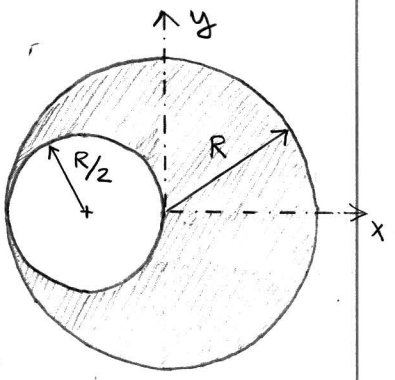
* El C.M. de un triángulo con "t" y "ρ" uniforme está ubicado en el promedio de sus vértices.

$$\underset{\sim}{\bar{X}}_{CM} = \frac{\sum m_i \underset{\sim}{x}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \rho v_i \underset{\sim}{x}_i}{\sum \rho v_i} = \frac{\sum \rho \cdot t \cdot a_i \underset{\sim}{x}_i}{\sum \rho \cdot t \cdot a_i} = \frac{\sum a_i \underset{\sim}{x}_i}{\sum a_i}$$

$$\underset{\sim}{\bar{X}}_{CM} = \frac{(1\cdot 1)\begin{Bmatrix}-2.5\\0.5\end{Bmatrix} + (2\cdot 3)\begin{Bmatrix}-1.0\\1.5\end{Bmatrix} + (\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3)\begin{Bmatrix}1.0\\1.0\end{Bmatrix}}{(1\cdot 1) + (2\cdot 3) + (\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3)} = \frac{\begin{Bmatrix}-4\\14\end{Bmatrix}}{11.5}$$

$$\underset{\sim}{\bar{X}}_{CM} = \begin{Bmatrix}-8/23\\28/23\end{Bmatrix} ft \;//$$

- **Problema 2**



En el cálculo del C.M., se puede restar o sacar masa y su respectivo centro de masa. Se trabaja como una "masa negativa", aunque eso realmente no existe.

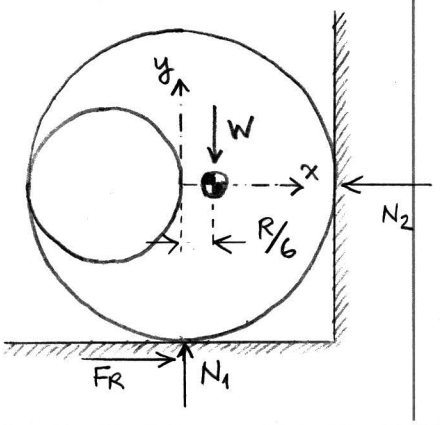
En este caso tomaremos el círculo completo, y le sacaremos el círculo pequeño y su C.M.

Asumiendo espesor y densidad uniformes:

$$\underset{\sim}{\bar{X}}_{CM} = \frac{\sum a_i \underset{\sim}{x}_i}{\sum a_i} = \frac{(\pi R^2)\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} + (-\pi\frac{R^2}{4})\begin{Bmatrix}-R/2\\0\end{Bmatrix}}{\pi R^2 - \pi\frac{R^2}{4}} = \frac{\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} + (-\frac{1}{4})\begin{Bmatrix}-R/2\\0\end{Bmatrix}}{3/4}$$

$$\underset{\sim}{\bar{X}}_{CM} = \begin{Bmatrix}R/6\\0\end{Bmatrix} //$$

Ahora podemos hacer un DCL y ubicar el peso W en el C.M.
Como el cuerpo no se mueve (no se traslada ni rota), entonces $\underset{\sim}{\ddot{u}} = \underset{\sim}{0}$ y $\alpha_z = 0$, y con ello:



$$\sum \underset{\sim}{f} = m\,\underset{\sim}{\ddot{u}} \rightarrow \begin{cases} \sum f_x = 0 \\ \sum f_y = 0 \end{cases}$$

$$\sum m_z = I\alpha_z \rightarrow \sum m_z = 0$$

Tomando el momento en el centro del circulo:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum f_x = 0: & -N_2 + F_R = 0 \\ \sum f_y = 0: & N_1 - W = 0 \\ \sum m_z = 0: & -(W)(R/6) + (F_R)(R) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} F_R = W/6 \\ N_2 = W/6 \\ N_1 = W \end{array} \;//$$

* Notar que para que se cumpla la condición de que el cuerpo está quieto, entonces:

$$\mu \cdot N_1 = (F_R)_{max} \geq F_R$$

$$\mu \geq \frac{1}{6} \;//$$

- **Problema 3**

Como la fuerza del resorte actua en la dirección radial, entonces se conserva el momentum angular ($v_\theta^{(1)} = r_1 \cdot \omega_1 = 0.2 \cdot 6$):

$$(H_O)_1 = (H_O)_2$$

$$(r_1)(m \cdot v_\theta^{(1)}) = (r_2)(m\, v_\theta^{(2)})$$

$$(0.2)(2)(0.2 \cdot 6) = (0.8)(2)(v_\theta^{(2)}) \rightarrow v_\theta^{(2)} = 0.3\ m/s$$

$$\rightarrow \omega_2 = v_\theta^{(2)}/r_2 = \frac{0.3}{0.8} = \frac{3}{8}\ rad/s \;//$$

Como no hay fuerzas externas o no-conservativas actuando sobre el sistema, se debe conservar la energía:

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$

$$\frac{1}{2}k\delta_1^2 + \frac{1}{2}m\cancel{(v_r^{(1)})^2}^{\,0} + \frac{1}{2}m\,(v_\theta^{(1)})^2 = \cancel{\frac{1}{2}k\delta_2^2}^{\,0} + \frac{1}{2}m\,(v_r^{(2)})^2 + \frac{1}{2}m\,(v_\theta^{(2)})^2$$

$$\frac{1}{2}k(0.8-0.2)^2 + \frac{1}{2}m\,(0.2\cdot 6)^2 = \frac{1}{2}m\,(v_r^{(2)})^2 + \frac{1}{2}m\,(0.3)^2$$

$$17.1 = (2)\,(v_r^{(2)})^2$$

$$v_r^{(2)} = 2.924\ m/s \;//$$

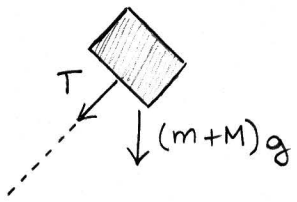
- **Problema 4**

En el impacto de la bala con el péndulo se conserva el momentum y además $e = 0$:

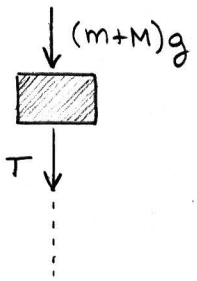
$$m \cdot v_0 + M \cdot 0 = (m+M) \cdot v_1$$

$$v_1 = \frac{m}{m+M} v_0$$

Haciéndo un DCL del péndulo:



caso crítico es en el punto más alto.



Como el péndulo describe una trayectoria circular, es necesario que $a_r = -r\dot{\theta}^2 = -v_\theta^2/r$. Usando la 2ª Ley de Newton:

$$\sum f_r = m_T \cdot a_r \qquad (m_T = \text{masa total})$$

, que en el punto más alto es:

$$-T - (m+M)g = (m+M)\left(-\frac{v_\theta^2}{r}\right)$$

, donde en nuestro caso $r = L$.

Una cuerda sólo puede estar en tensión; i.e. no puede estar en compresión y empujar la masa total hacia afuera. En el caso crítico $T = 0$, y con ello:

$$-\cancel{(m+M)}\,g = \cancel{(m+M)}\left(-\frac{v_\theta^2}{L}\right)$$

$$v_\theta^2 = L \cdot g$$

Es decir, $v_\theta^2 \geq L \cdot g$ para que la cuerda se encuentre tensionada. Para obtener la velocidad en el punto más alto usamos el principio de conservación de energía (tomando $z = 0$ en el punto más bajo del péndulo):

$$\cancel{V_1}^{\,0} + T_1 = V_2 + T_2$$

$$\frac{1}{2}(m+M)(v_1)^2 = (m+M)(g)(2L) + \frac{1}{2}(m+M)(v_2)^2$$

$$\frac{m^2}{(m+M)^2} v_0^2 = 4gL + v_2^2$$

$$v_2^2 = \frac{m^2}{(m+M)^2} v_0^2 - 4gL$$

Reemplazando en la condición para que la cuerda este tensa:

$$\frac{m^2}{(m+M)^2} v_0^2 - 4gL \geq Lg$$

$$v_0^2 \geq \frac{(m+M)^2}{m^2}(5gL)$$

$$v_0 \geq \frac{m+M}{m}\sqrt{5gL} \;//$$