PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
**ICE1513 — Dinámica**
Segundo Semestre 2018

# Taller 05

## Cinética I

**Problema 1.**

Se tiene una caja de masa $m$ apoyada contra una pared como muestra la Figura 1. Una fuerza no constante e igual a $F(t) = (m/k)\, t$ la mantiene pegada a la pared. La caja parte del reposo y el coeficiente de roce (estático y dinámica) entre la caja y la pared es $\mu_0$. Se pide:

a) Determine el tiempo $t_b$ en el que la caja comienza a desacelerar (frenar).

b) Determine la distancia total recorrida por la caja.

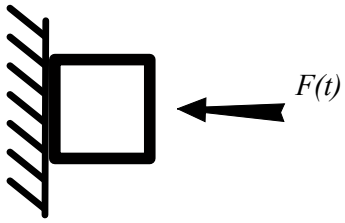



Figura 1: Caja apoyada contra pared.

**Problema 2.**

Una pelota de masa $m$ cuelga desde el techo por una cuerda de largo $\ell$ y describe un movimiento circular de forma tal que la cuerda forma un ángulo $\alpha$ respecto a la vertical (ver Figura 2). Determine $\omega = \dot{\theta}$ del movimiento circular descrito en función de los demás parámetros.

Hint1: Determine el radio del movimiento circular (en el plano).
Hint2: Haga un diagrama de cuerpo libre (DCL) de la pelota en el plano $\hat{\mathbf{e}}_r$ – $\hat{\mathbf{k}}$.

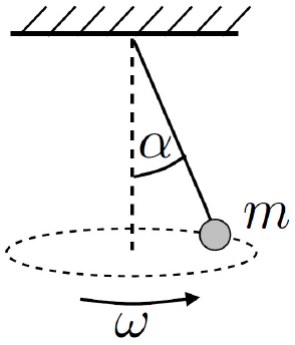



Figura 2: Péndulo circular.

**Problema 3.**

Una caja de masa $m = 120\,kg$ se arrastra por el suelo tirada por un cable que se retrae a velocidad constante $\dot{l} = -4\,m/s$, desde un motor ubicado a una altura $h = 2\,m$ sobre la caja. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el piso es $\mu_k = 0{,}236$. Llamando a la distancia de la caja a la pared $b$, la longitud (no retraída) del cable $l$, y la altura del motor $h = 2\,m$; se pide determinar:

a) La velocidad con que la caja se acerca a la pared $\dot{b}$, en función de $l$, $b$, y $\dot{l}$.

b) La aceleración con que la caja se acerca a la pared $\ddot{b}$, en función de $l$, $b$, y $\dot{l}$ (ver el Hint 1).

c) Evalúe las expresiones de $\dot{b}$ y $\ddot{b}$ para la posición que se muestra en la Figura 3; i.e. cuando $b = 4\,m$ y $l = 2\sqrt{5}\,m$.

d) La fuerza en el cable $T$ para la posición que se muestra en la Figura 3 (vea el Hint 2).

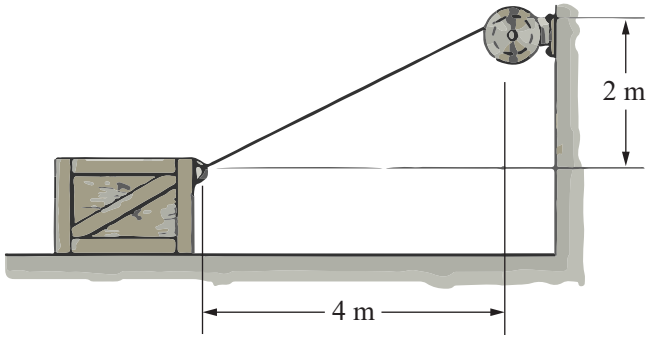



Figura 3: Caja arrastrada por un motor que retrae la cuerda a $4\,m/s$.

Hint 1: Si tiene una expresión del tipo $f\left(x, \dot{x}\right)$, su derivada temporal debe tomar en consideración que tanto $x$ como $\dot{x}$ son variables en el tiempo. Es decir:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[f\left(x, \dot{x}\right)\right] = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\dot{x}} \cdot \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot \dot{x} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\dot{x}} \cdot \ddot{x}$$

Hint 2: Una reducción en $b$ significa que la caja se movió hacia $+x$. Es decir: $\dot{b} = -\dot{x}_{\text{caja}}$ y $\ddot{b} = -\ddot{x}_{\text{caja}}$.

**Soluciones.**

Problema 1[1]
El diagrama de cuerpo libre del problema se muestra en la Figura 4.

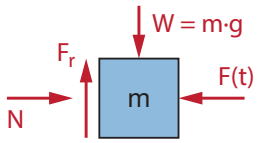



Figura 4: Diagrama de cuerpo libre (DCL) de la caja apoyada contra la pared.

Como el bloque no acelera en $x$, entonces $\sum (f_x)_i = 0$ y con ello:

$$N - F(t) = 0 \qquad \rightarrow \qquad N = F(t) = \frac{m}{k}\, t$$

, y con ello la fuerza de roce resulta: $F_r = \mu_0 \cdot N = \mu_0 \left({}^{m}/_{k}\right) t$. En la dirección $y$ la $2^a$ Ley de Newton dice $\sum (f_y)_i = m \cdot a_y$. Es decir:

$$m \cdot a_y = -W + F_r = -mg + \frac{\mu_0 \cdot m}{k}\, t$$
$$a_y(t) = \frac{\mu_0}{k}\, t - g$$

El bloque inicialmente acelera (moviéndose hacia abajo) hasta que $a_y(t_b) = 0$, instante previo a que comience a frenar:

$$\frac{\mu_0}{k}\, t_b - g = 0 \qquad \rightarrow \qquad t_b = \frac{g \cdot k}{\mu_0}$$

El tiempo que tarda la caja en detenerse está dado por $v(t^\star) = 0$. Es decir:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a(t) \qquad \text{con} \qquad v(0) = v_0 = 0$$
$$v(t) = \frac{\mu_0}{2k}\, t^2 - g \cdot t = t\left(\frac{\mu_0}{2k}\, t - g\right)$$
$$\rightarrow \qquad t^\star = \begin{cases} 0 & \leftarrow \quad \text{punto de partida: solución trival} \\ 2\frac{k \cdot g}{\mu_0} \end{cases}$$

En $t = t^\star$ la caja ha descendido $|u(t^\star)|$. Es decir:

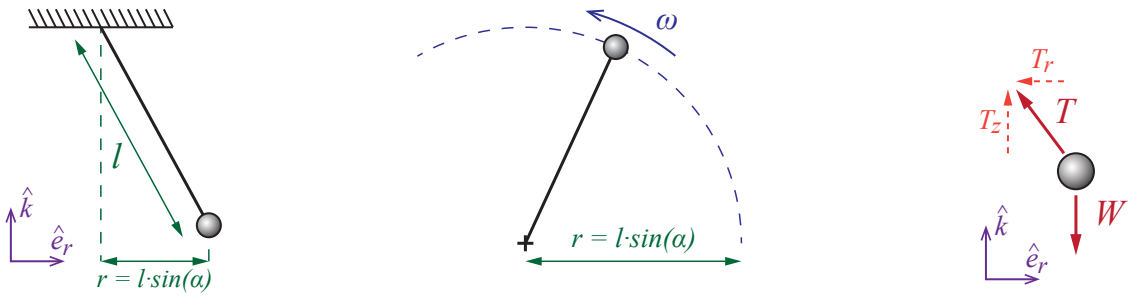
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = v(t) \qquad \text{con} \quad u(0) = u_0 = 0$$
$$u(t) = \frac{\mu_0}{6k}\, t^3 - \frac{g}{2}\, t^2$$
$$u(t^\star) = \left(\frac{\mu_0}{6k}\right)\left(\frac{8k^3 g^3}{\mu_0^3}\right) - \left(\frac{g}{2}\right)\left(\frac{4k^2 g^2}{\mu_0^2}\right) = \frac{k^2 g^3}{\mu_0^2}\left(\frac{4}{3} - 2\right)$$
$$u(t^\star) = \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{k^2 g^3}{\mu_0}\right)$$

Notar que la constante $k$ tiene unidades de $\left(s^3/m\right)$, para que así $F(t)$ resulte en *fuerza*.

Problema 2
El radio del movimiento es $r = l \cdot \sin(\alpha)$. Como la pelota no acelera en $z$, tenemos que $\sum (f_z)_i = 0$. Es decir:

$$T_z - m \cdot g = T\cos(\alpha) - m \cdot g = 0$$
$$T = \frac{m \cdot g}{\cos(\alpha)}$$

[1] Creado por F. Bertín.




(a) (b) (c)

Figura 5: Péndulo circular: **(a)** vista frontal $\hat{\mathbf{e}}_r$–$\hat{\mathbf{k}}$; **(b)** Vista en planta; **(c)** Diagrama de cuerpo libre en $\hat{\mathbf{e}}_r$–$\hat{\mathbf{k}}$.

En la dirección radial la pelota acelera con $a_r = -r\,\dot{\theta}^2 = -r\,\omega^2$. Usando la $2^a$ Ley de Newton en la dirección radial $\sum (f_r)_i = m \cdot a_r$:

$$-T_r = -\left[T \sin(\alpha)\right] = m \cdot a_r = m\left(-r\,\omega^2\right)$$

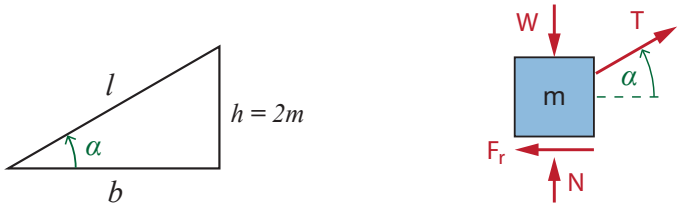
, donde reemplazamos el valor de $T$ obtenido del equilibrio en $z$ para obtener:

$$\left(\frac{m \cdot g}{\cos(\alpha)}\right) \sin(\alpha) = m \cdot r \cdot \omega^2$$

$$\omega^2 = \left(\frac{g}{r}\right)\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right) = \left(\frac{g}{l \cdot \sin(\alpha)}\right)\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cdot \cos(\alpha)}}$$

Problema 3




(a) (b)

Figura 6: Huinche arrastrando una caja: **(a)** geometría del problema; **(b)** diagrama de cuerpo libre.

De la geometría del problema sabemos que $b^2 + h^2 = l^2$, y derivando respecto al tiempo:

$$2b \cdot \dot{b} = 2l \cdot \dot{l}$$

$$\dot{b} = \left(\frac{l}{b}\right)\dot{l}$$

, y derivando nuevamente respecto al tiempo:

$$\dot{b} \cdot \dot{b} + b \cdot \ddot{b} = \dot{l} \cdot \dot{l} + l \cdot \ddot{l}$$

, pero como $\dot{l} = \text{const}$, entonces $\ddot{l} = 0$. Es decir:

$$\ddot{b} = \frac{\dot{l}^2 - \dot{b}^2}{b} = \frac{\dot{l}^2}{b}\left(1 - \frac{l^2}{b^2}\right)$$

Evaluando cuando $b = 4\,m$ y $l = 2\sqrt{5}$ se obtiene:

$$\dot{b} = \frac{2\sqrt{5}}{4}(-4) = -2\sqrt{5} = -4{,}4721\,m/s \qquad \leftarrow \qquad b \text{ se está acortando}$$

$$\ddot{b} = \frac{(-4)^2}{4}\left(1 - \frac{\left(2\sqrt{5}\right)^2}{4^2}\right) = -1\,m/s^2 \qquad \leftarrow \qquad \text{la caja acelera hacia la derecha}$$

La caja está en equilibrio en $y$, con lo que $\sum (f_y)_i = 0$. Es decir:

$$-m \cdot g + T\sin(\alpha) + N = 0$$
$$N = m \cdot g - T\frac{h}{l}$$

La caja acelera en $x$ con $a_x = -\ddot{b}$. Es decir:

$$-F_r + T\cos(\alpha) = 0$$
$$-\mu_s\left[m \cdot g - T\frac{h}{l}\right] + T\frac{b}{l} = m \cdot \ddot{b}$$
$$T\left[\mu_s\frac{h}{l} + \frac{b}{l}\right] = m \cdot \ddot{b} + \mu_s \cdot m \cdot g$$
$$T = 120 + 277{,}82$$
$$T = 397{,}82\,N$$